Exercices corrigés d'arithmétique

Diviseurs –Division euclidienne :

Exercice 1 :

1) Démontrer que $a \mid b$ si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$, $a \mid (b-ka)$.
2) Déterminer les entiers relatifs a, tels que $(a-5) \mid (a+7)$.

Une solution :

1) $a \mid a$. Si $a \mid b$ alors a divise toute combinaison linéaire de a et b, donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a \mid (b-ka)$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$ si $a \mid (b-ka)$ alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b-ka = qa$ d'où $b = (q+k)a$, donc $a \mid b$.
Par conséquent, $a \mid b$ si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$, $a \mid (b-ka)$.
2) D'après la question 1) $(a-5) \mid (a+7) \Leftrightarrow a-5 \mid (a+7)-(a-5)) \Leftrightarrow a-5 \mid 12$;
d'où $a-5 \in \{1,2,3,4,6,12,-1,-2,-3,-4,-6,-12\}$ donc $a \in \{6,7,8,9,11,17,4,3,2,1,-1,-7\}$.

Exercice 2 :

Déterminer les entiers naturels n tels que : $n-1$ divise $n+3$.

Une solution :

Si $n-1$ divise $n+3$ alors $n-1$ divise $-(n-1)+n+3$ d'où $n-1$ divise 4,
donc $n-1=1$ ou $n-1=2$ ou $n-1=4$
$n=2$ ou $n=3$ ou $n=5$.
Les entiers naturels n tels que : $n-1$ divise $n+3$ sont : 2, 3 et 5.

Exercice 3 :

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^2 - y^2 = 13$.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $2x^3 + xy - 11 = 0$

Une solution :

1) $x^2 - y^2 = 13 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 13$
$\Leftrightarrow ((x-y)(x+y) = 13,\ x-y \mid 13 \text{ et } x+y \mid 13)$
Les diviseurs de 13 sont 1, 13 et leurs opposés.
Par conséquent :

$$x^2 - y^2 = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=13 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=13 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-13 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=-13 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

Dans $\mathbb{N}^2$, le premier et les deux derniers systèmes n'ont pas de solutions

$$x^2 - y^2 = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases} \qquad S = \{(7, 6)\}$$

2) $2x^3 + xy - 11 = 0 \Leftrightarrow x(2x^2+y) = 11 \Leftrightarrow (\ x(2x^2+y) = 11,\ x \mid 11 \text{ et } 2x^2+y \mid 11\ )$
Les diviseurs de 11 sont 1, 11, et leurs opposés ;
Par conséquent :

$$2x^3 + xy - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2x^2+y=11 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x=11 \\ 2x^2+y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-1 \\ 2x^2+y=-11 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x=-11 \\ 2x^2+y=-1 \end{cases}$$

S= { (1, 9), (11, -241), (-1, -13), (-11, -243) }

Exercice 4 :

Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ 2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est multiple de 29.

Une solution :

$2^{0+1} + 3^{0+3} = 29$ est un multiple de 29 ;

Supposons que $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est multiple de 29 pour un entier naturel n ; c'est à dire que $2^{5n+1} + 3^{n+3} = 29k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Démontrons que $2^{5(n+1)+1} + 3^{(n+1)+3}$ est un multiple de 29.

$2^{5(n+1)+1} + 3^{(n+1)+3} = 2^{5n+1}\times 2^5 + 3^{n+3} \times 3 = 2^{5n+1}\times 2^5 + 3\times (29k - 2^{5n+1})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = 2^{5n+1}(32-3) + 3\times 29k = 29(2^{5n+1} + 3k)$;

d'où $2^{5(n+1)+1} + 3^{(n+1)+3}$ est un multiple de 29.

Par conséquent : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ 2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est multiple de 29.

Exercice 5 :

On considère la fraction $q_n = \dfrac{n+19}{n-7}$; n étant un entier naturel strictement supérieur à 7.

1) Comment choisir n pour que q_n soit simplifiable ?

2) Déterminer n pour que q_n soit égale à un entier naturel.

Une solution :

1) $q_n = 1 + \dfrac{26}{n-7}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 7$

q_n est simplifiable si 26 et $n-7$ ont des diviseurs en communs distincts de 1.

Les diviseurs de 26 distincts de 1 sont : 2, 13 et 26.

Par conséquent : q_n est simplifiable si et seulement si : $2 \mid n-7$ ou $13 \mid n-7$ ou $26 \mid n-7$;

Par suite q_n est simplifiable si et seulement si $n = 2k + 7$ ou $n = 13k + 7$ ou $n = 26k + 7$, $k \in \mathbb{N}^*$.

2) q_n est un entier naturel si et seulement si $n-7$ divise 26

$q_n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ ($n-7 = 1$ ou $n-7 = 2$ ou $n-7 = 13$ ou $n-7 = 26$)

$\qquad \Leftrightarrow$ $n = 8$ ou $n = 9$ ou $n = 20$ ou $n = 33$

Par conséquent : $q_n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{ 8, 9, 20, 33 \}$.

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1) $n^2 + 2n$ par $n + 1$.

2) $7n + 15$ par $3n + 2$.

Une solution :

1) $n^2 + 2n = n(n+1) + n$ avec $0 \leq n < n+1$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq n < n+1$,

donc n est le reste de la division euclidienne de $n^2 + 2n$ par $n + 1$.

2) $7n + 15 = 2(3n + 2) + n + 11$, avec $0 \leq n + 11 < 3n+2$

$n + 11 < 3n+2 \Leftrightarrow n > \dfrac{9}{2}$;

d'où si $n \geq 5$ alors le reste de la division euclidienne de $7n + 15$ par $3n + 2$ est $n + 11$.

Si $0 < n \leq 4$ alors $n + 11 \geq 3n+2$. On augmente le quotient d'une unité du diviseur :

$7n + 15 = 3(3n + 2) + n + 11 - 3n - 2 = 3(3n + 2) - 2n + 9$ avec $0 \leq -2n + 9 < 3n+2$

$0 \leq -2n + 9 < 3n+2 \Leftrightarrow (n \leq \frac{9}{2}$ et $n > \frac{7}{5}) \Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4\}$.

Par conséquent, si $n \in \{2, 3, 4\}$alors le reste de la division euclidienne de $7n +15$ par $3n+ 2$est $-2n + 9$.

Si n = 1 alors On augmente le quotient d'une unité du diviseur, dans la division euclidienne précédente.

$7n + 15 = 4(3n +2)-2n + 9-3n-2 = 4(3n +2) -5n+7$ avec $0 \leq -5n+7 < 3n+2$

$0 \leq -5n+7 < 3n+2 \Leftrightarrow (n \leq \frac{7}{5}$ et $n > \frac{5}{8}) \Leftrightarrow n = 1$

Si n=1 alors le reste est $-5n+7 =2$

Remarque : On pourrait pour $0< n \leq 4$ faire la division euclidienne de $7n +15$ par $3n+ 2$ en remplaçant n respectivement par 1 ; 2 ; 3 et 4.

PGCD – PPCM

Exercice 1:

Calculer pour tout entier naturel n non nul :

1) PGCD (n, 2n+1) et PPCM (n, 2n+1) 2) PGCD (2n+2,4n+2) et ¨PPCM (2n+2,4n+2).

Une solution :

1) $-2\times n +1\times(n +1) =1$. D'où n et 2n + 1 sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

Par suite PGCD (n, 2n+1) =1 et PPCM (n, 2n+1) = n(2n+1).

2) PGCD (2n+2,4n+2) = PGCD (2(n+1),2(2n+1)) = 2 PGCD (n+1,2n+1)

On a : $2\times(n +1) -1\times(2n +1) = 1$. On en déduit d'après le théorème de Bézout que n+1 et 2n+1 sont premiers entre eux.

Par suite PGCD (2n+2,4n+2) = $2\times1 = 2$ et PPCM (2n+2,4n+2) = 2(n +1)(2n +1).

Exercice 2 :

Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 5 ; 13 ; 17 lorsqu'on le divise respectivement par 15 ; 23 ; 27.

Une solution :

Soit N cet entier naturel. Il existe des entiers relatifs q_1, q_2 et q_3 tels que :

$N = 15q_1 + 5$, $N = 23 q_2 + 13$ et $N = 27q_3 + 17$;

d'où $N + 10 = 15(q_1 + 1)$, $N + 10 = 23(q_2 + 1)$ et $N + 10 = 27(q_3 + 1)$.

Il en résulte que N + 10 est multiple commun de 15, 23 et 27. N étant le plus petit de ces multiples alors N + 10 = PPCM (15, 23, 27) = $27\times23\times5 = 3105$; d'où $N = 3105 -10 = 3095$.

Exercice 3:

Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur à 40. Si on les regroupe par 9 ou par 12, il en reste 1 chaque fois. Quel est ce nombre ?

Une solution :

Soit n ce nombre.

$n = 9 q_1 +1$ et $n = 12 q_2 +1$; d'où $n-1$ est un multiple commun à 9 et 12, inférieur à 40.

Par conséquent : $n-1 = 36$, d'où $n = 37$.

Exercice 4 :

Deux entiers a et b ont pour PGCD, δ.Quel est le PGCD des entiers $x = 13a+ 5b$ et $y = 5a + 2b$.

Une solution :
PGCD (a, b) = δ. Posons PGCD(x,y) = Δ.
Tout diviseur commun à a et b divise x et y qui sont des combinaisons linéaires de a et b.
Par conséquent, δ est diviseurs commun de x et y, d'où $\delta \le \Delta$.
On déduit de x et y que $a = 2x - 5y$ et $b = -5x + 13y$.
Tout diviseur commun à x et y divise a et b qui sont des combinaisons linéaires de x et y ; d'où $\Delta \le \delta$.
Par conséquent $\delta = \Delta$. Donc PGCD(x, y) =δ.

Equations diophantiennes du type : ax +by = c

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $11x + 16y = 0$

Une solution :

$$11x + 16y = 0 \Leftrightarrow 11x = -16y \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = -16y & (1) \\ 16 \mid 11x & (2) \end{cases}$$

$16 \mid 11x$ et PGCD(11, 16) = 1, d'après le théorème de Gauss 16 divise x ; donc $x = 16k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On déduit de (1) que $y = -11k$. S= {(16k, −11k), $k \in \mathbb{Z}$ }

Exercice 2 :

1) a) Montrer que l'équation $59x + 68y = 1$ admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $59x + 68y = 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $59x + 68y = 2$.

Une solution :
1)a) PGCD(59, 68) = 1, d'après le théorème de Bézout il existe deux entiers relatifs u et v tels que $59u + 68v = 1$. D'où (u, v) est une solution de l'équation ; donc l'équation admet une solution.

b) Recherche d'une solution particulière par l'algorithme d'Euclide :

a	b	q	r	Formons r = a - bq
68	59	1	9	a = b +9, 9= a−b
59	9	6	5	b = 6(a−b) +5 ; 5 = 7b -6a
9	5	1	4	a−b =-6a + 7b +4 ; 4 = 7a -8b
5	4	1	1	7b -6a =7a -8b + 1

On en déduit que $-13a + 15b = 1$ et que le couple (15,-13) est solution de l'équation.
$59x + 68y = 1$.

$$59x + 68y = 1 \Leftrightarrow 59(x-15) + 68(y+13) = 0$$
$$\Leftrightarrow 59(x-15) = -68(y+13) \Leftrightarrow \begin{cases} 59(x-15) = -68(y+13) & (*) \\ 68 \mid 59(x-15) \end{cases}$$

$68 \mid 59(x-15)$ et PGCD(68, 59) = 1, d'après le théorème de Gauss $68 \mid x-15$
$68 \mid x-15$ donc $x = 68k + 15$, $k \in \mathbb{Z}$
En remplaçant x dans (*) on obtient : $y = -59k - 13$.
S = {(68k+15, −59k − 13), $k \in \mathbb{Z}$}

2) Le couple (15,-13) est solution de l'équation $59x + 68y = 1$. On en déduit que le couple (30, −26) est solution de l'équation $59x + 68y = 2$ (E).

$$(E) \Leftrightarrow 59(x-30) = -68(y+26) \Leftrightarrow \begin{cases} 59(x-30) = -68(y+26) & (**) \\ 68 \mid 59(x-30) \end{cases}$$

68| 59(x–30) et PGCD(68, 59) = 1, d'après le théorème de Gauss 68 | x–30
68 | x–30 donc x = 68k + 30 , k∈ ℤ
En remplaçant x dans (**) on obtient : y = –59k – 26.
S = {(68k+30, –59k – 26), k∈ℤ}.

Congruence

Exercice 1 :
1) Vérifier que $1000 \equiv 1$ [37] et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $10^{3n} \equiv 1$ [37].
2) En déduire le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

Une solution :
1) $1000 = 27\times37 + 1$ d'où $1000 \equiv 1$ [37].
$1000= 10^3$, 10^3 d'où pour tout entier naturel n $(10^3)^n \equiv 1^n$ [37] donc $10^{3n} \equiv 1$ [37].

2) $1001037 = 10^6 + 10^3 + 37$
D'après 1) $10^6 \equiv 1$ [37] , $10^3 \equiv 1$ [37] et $37 \equiv 0$ [37].
Par addition $10^6 + 10^3 + 37 \equiv 2$ [37] ; donc $1001037 \equiv 2$ [37]. Par conséquent 2 est le reste de la division de 1001037 par 37.

Exercice 2 :
1) Montrer que $67^{89}-1$ est un multiple de 11.
2) Pour quelles valeurs de n entier naturel, $5^{2n} + 5^n + 1$ est un multiple de 3 ?

Solution
1) $67 = 6\times11 + 1$ d'où $67 \equiv 1$ [11] , $67^{89} \equiv 1^{89}$ [11] et $67^{89} \equiv 1$ [11] ; donc $67^{89} -1$ est un multiple de 11.

2) $5 \equiv -1$ [3] d'où $5^2 \equiv 1$ [3].
On en déduit que pour tout entier naturel n : $5^n \equiv (-1)^n$ [3] et $5^{2n} \equiv 1$ [3].
et $1 \equiv 1$ [3] ; d'où par addition $5^{2n} + 5^n +1 \equiv 2+ (-1)^n$
Si n est pair alors $2+ (-1)^n = 3 \equiv 0$ [3].
Si n est impair alors $2+ (-1)^n = 2 \equiv 2$ [3].
Par conséquent $5^{2n} + 5^n +1$ est un multiple de 3 si n est pair.

Exercice 3 :
Démontrer que le carré de tout entier naturel est de la forme 5n–1 ou 5n ou 5n + 1, n entier naturel.

Une solution :
Soit N∈ ℕ. $N \equiv 0$ [5] ou $N \equiv 1$ ou $N \equiv 2$ [5] ou $N \equiv 3$ [5] ou $N \equiv 4$ [5].
Si $N \equiv 0$ [5] alors $N^2 \equiv 0$ [5]
Si $N \equiv 1$ [5] alors $N^2 \equiv 1$ [5]
Si $N \equiv 2$ [5] alors $N^2 \equiv 4$ [5] et $4 \equiv -1$ [5] d' où $N^2 \equiv -1$ [5]
Si $N \equiv 3$ [5] alors $N^2 \equiv 9$ [5] et $9 \equiv -1$ [5] d'où $N^2 \equiv -1$ [5]
Si $N \equiv 4$ [5] alors $N^2 \equiv 16$ [5] et $16 \equiv 1$ [5] d'où $N^2 \equiv 1$ [5] ;
donc $N^2 \equiv 0$ [5] ou $N^2 \equiv 1$ [5] ou $N^2 \equiv -1$ [5]
Par conséquent il existe n entier naturel tel que N = 5n ou N = 5n +1 ou N = 5n–1, donc le carré de tout entier naturel est de la forme 5n–1 ou 5n ou 5n + 1.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: 1) $14x \equiv 3\ [4]$; 2) $\begin{cases} 3x \equiv 1\ [5] \\ 5x \equiv 2\ [7] \end{cases}$

Une solution :

1) $14x \equiv 3\ [4] \Leftrightarrow 14x + 4k = 3,\ k \in \mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow 2(7x + 2k) = 3$

$\Rightarrow 2$ divise 3, ce qui est faux.

$S = \varnothing$;

2) $\begin{cases} 3x \equiv 1\ [5] \\ 5x \equiv 2\ [7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5k = 1,\ k \in \mathbb{Z} \\ 5x + 7k' = 2,\ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$3x + 5k = 1$ **(1)**

Le couple $(2, -1)$ est uns solution de (**1**).

(**1**) $\Leftrightarrow 3(x-2) + 5(k+1) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2) = -5(k+1)$ et $5 \mid 3(x-2)$

$5 \mid 3(x-2)$ et PGCD $(5, 3) = 1$, d'après le théorème de Gauss $5 \mid x-2$.

$5 \mid x-2$ donc $x = 5q + 2,\ q \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent $3x \equiv 1\ [5]$ équivaut à $x = 5q + 2,\ q \in \mathbb{Z}$. ;

$5x + 7k' = 2$ **(2)**

PGCD$(5, 7) = 1$ d'où il existe u et v entiers relatifs tels $5u + 7v = 1$ (*)

Le couple $(3, -2)$ est solution de (*) ; d'où le couple $(6, -4)$ est solution de **(2).**

(**2**) $\Leftrightarrow 5(x-6) + 7(k'+4) = 0 \Leftrightarrow 5(x-6) = -7(k'+4)$ et $7 \mid 5(x-6)$.

$7 \mid 5(x-6)$ et PGCD$(5, 7) = 1$, d'après le théorème de Gauss $7 \mid x-6$.

$7 \mid x-6$ donc $x = 7q' + 6,\ q' \in \mathbb{Z}$. Par conséquent $5x \equiv 2\ [7]$ équivaut à $x = 7q' + 6,\ q' \in \mathbb{Z}$.

Par suite

$\begin{cases} 3x \equiv 1\ [5] \\ 5x \equiv 2\ [7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5q + 2,\ q \in \mathbb{Z} \\ x = 7q' + 6,\ q' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 5q + 2$ et $5q + 2 = 7q' + 6$

$5q + 2 = 7q' + 6 \Leftrightarrow 5q - 7q' = 4$ **(3)**.

Le couple $(3, 2)$ est solution de l'équation $5q - 7q' = 1$; d'où le couple $(12, 8)$ est solution de l'équation $5q - 7q' = 4$.

(3) $\Leftrightarrow 5(q-12) - 7(q'-8) = 0 \Leftrightarrow 5(q-12) = 7(q'-8)$ et $7 \mid 5(q-12)$

$7 \mid 5(q-12)$ et PGCD $(7, 5) = 1$, d'après le théorème de Gauss $7 \mid q-12$.

$7 \mid q-12$ donc $q = 7k + 12,\ k \in \mathbb{Z}$

Par suite $x = 5(7k + 12) + 2 = 35k + 62$;

$S = \{35k + 62,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercices de synthèse :

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel non nul. On considère deux nombres a et b définis par :

$a = 2n+3$ et $b = 5n-2$.

1) Démontrer que le PGCD de a et b divise 19.

2) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels le PGCD de a et b est 19.

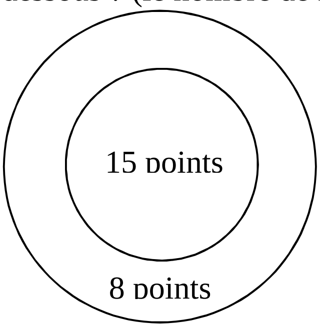
Une solution :

1) $a = 2n+3$ et $b = 5n-2$; $n \in \mathbb{N}$.

Tout diviseur commun à a et b divise toute combinaison linéaire de a et b ; d'où le PGCD (a, b) divise $5a-2b = 19$.
Par suite PGCD (a, b) divise 19.

2) Si PGCD (a, b) = 19 alors il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que : $a = 19a'$ et $b = 19b'$
$5a-2b = 19 \Leftrightarrow 19(5a' - 2b') = 19 \Leftrightarrow 5a' - 2b' = 1$ **(E)**
Le couple (1, 2) est solution de **(E).**
(E) $\Leftrightarrow 5(a'-1)-2(b'-2) = 0 \Leftrightarrow 5(a'-1) = 2(b'-2)$ et $5 | 2(b'-2)$.
$5 | 2(b'-2)$ et PGCD(5, 2) = 1, d'après le théorème de Gauss $5 | b'-2$;
$5 | b'-2$ d'où $b' = 5k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.
On a : $b = 19b'$ d'où $5n - 2 = 19(5k+2)$; $n = 19k + 8$;
donc PGCD (a, b) = 19 si ; $n = 19k + 8$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :
1) Trouver une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E_1) : $15x + 8y = 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_2) : $15x + 8y = 1000$;
3) De combien de façons peut-on obtenir exactement 1000 points en lançant des fléchettes sur la cible ci-dessous ? (le nombre de fléchettes n'est pas limité et on suppose qu'elles atteignent toutes les cibles.)



15 points pour une fléchette qui atteint le disque central.

8 points pour une fléchette qui atteint la couronne.

Une solution :
1) Le couple $(-1, 2)$ est solution de l'équation (E_1).
2) $(-1, 2)$ est solution de l'équation (E_1), d'où le couple $(-1000, 2000)$ est une solution de l'équation (E_2).
$(E_2) \Leftrightarrow 15(x + 1000) + 8(y-2000) = 0 \Leftrightarrow 15(x + 1000) = -8(y-2000)$ et $8 | 15(x + 1000)$
$8 | 15(x + 1000)$ et PGCD(8, 15) = 1 alors d'après le théorème de Gauss $8 | x + 1000$
D'où $x = 8k-1000$, $k \in \mathbb{Z}$ et $y = -15k + 2000$, $k \in \mathbb{Z}$.
$S = \{(8k-1000, -15k+2000), k \in \mathbb{Z}\}$
3) Soit x et y le nombre de flèches qui atteignent respectivement le disque et la couronne.
On déduit de 2) que : $15x + 8y = 1000 \Leftrightarrow x = 8k-1000$ et $y = -15k + 2000$, $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $k \in Z$.
$(8k-1000 \geq 0$ et $-15k + 2000 \geq 0, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \dfrac{1000}{8} \leq k \leq \dfrac{2000}{15}$ d'où $k \in [125, 133] \cap \mathbb{N}$;
Le nombre de façons d'obtenir exactement 1000, correspond au nombre de façons de choisir le couple (x, y) solution de l'équation.
A chaque valeur de k correspond un couple (x, y) ; k prend 9 valeurs possibles de125 à 133.
Par conséquent il y a 9 façons d'obtenir exactement 1000 points en lançant des fléchettes sur cette cible.
Exercice 3 :
On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par $u_o = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$; $n \in \mathbb{N}$
1) Calculer u_1, u_2, u_3, et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2)a)Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n$ [4].
b) En déduire pour tout $k \in IN$ $u_{2k} \equiv 2$ [4] et $u_{2k+1} \equiv 0$ [4].
3)a)Montrer par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b) En déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28$ [100].
4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Une solution :

1) $u_o = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$; $n \in \mathbb{N}$

$u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1564$, $u_4 = 7814$.

Conjecture :

Si n est pair alors les deux derniers chiffres de u_n forment 14.

Si n est impair alors les deux derniers chiffres de u_n forment 64.

2)a) $u_{n+1} = 5u_n - 6$ d'où $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$

$25 = 6 \times 4 + 1$ d'où $25 \equiv 1\ [4]$ puis $25u_n \equiv u_n\ [4]$ et $-36 \equiv 0 [4]$

Par addition $25u_n - 36 \equiv u_n\ [4]$, on a $u_{n+2} = 25u_n - 36$; donc $u_{n+2} \equiv u_n\ [4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a : $u_o = 14$ et $14 \equiv 2\ [4]$, $u_1 = 64$ et $64 \equiv 0\ [4]$; donc $u_o \equiv 2\ [4]$ et $u_1 \equiv 0\ [4]$.

Supposons que $u_{2k} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$ pour un entier naturel k.

Montrons que $u_{2k+2} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+3} \equiv 0\ [4]$

D'après a) on a $u_{2k+2} \equiv u_{2k}\ [4]$, $u_{2k+3} \equiv u_{2k+1}\ [4]$ et par hypothèse $u_{2k} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$;

d'où $u_{2k+2} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+3} \equiv 0\ [4]$; donc pour tout $k \in$ IN $u_{2k} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$.

3) a) $2u_o = 28$ et $5^{0+2}+3 = 28+3 = 28$; d'où $2u_o = 5^{0+2}+3$;

Supposons que $2u_n = 5^{n+2} + 3$ pour un entier naturel n. Montrons que $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$

$2u_{n+1} = 10u_n - 12 = 5(2u_n) - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3$;

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) $5^{n+2} + 3 = 5^n \times 25 + 3$; $5 \equiv 1\ [4]$ d'où $5^n \equiv 1\ [4]$

$5^n \equiv 1\ [4]$ d'où $5^n = 4q + 1$, $q \in \mathbb{N}$.

On déduit de ce qui précède que $5^{n+2} + 3 = 25(4q + 1) + 3 = 100q + 28$ et $28 < 100$;

d'où $5^{n+2} + 3 \equiv 28\ [100]$; donc $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28\ [100]$.

4) on a $2u_n = 100q + 28$, $q \in \mathbb{N}$

Si q est pair alors $2u_n = 200q' + 28$ d'où $u_n = 100q' + 14$; d'où 14 est le nombre formé par les deux derniers chiffres de u_n

$u_n = 100q' + 14$ par conséquent $u_n \equiv 2\ [4]$; de la question 2b) on déduit que n est pair.

donc si n est pair le nombre formé par les derniers chiffres de u_n est 14 ;

Si q est impair alors $2u_n = 200q' + 128$ d'où $u_n = 100q' + 64$.

Par conséquent $u_n \equiv 0\ [4]$; de la question 2b) on déduit que n est impair ;

donc si n est impair le nombre formé par les derniers chiffres de u_n est 64.

5) Soit $d = PGCD(u_n , u_{n+1})$. De 4) on déduit que 2 est un diviseur commun de u_n et u_{n+1} ; d'où $d \geq 2$.

d divise toute combinaison linéaire de u_n et u_{n+1} ;

On a : $5u_n - u_{n+1} = 6$; donc d divise 6. Les diviseurs positifs de 6 distincts de 1 sont 2, 3 et 6 ;

donc les valeurs possibles de d sont : 2, 3 et 6.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2u_n = 5^{n+2} + 3 = 5^n \times 25 + 3$

$5 \equiv 2\ [3]$, $25 \equiv 1\ [3]$ et $3 \equiv 0\ [3]$ d'où $2u_n \equiv 2^n\ [3]$

$2^n > 0$, d'où 3 ne divise pas $2u_n$. Puisque 3 et 2 sont premiers entre eux alors 3 ne divise pas u_n. (En effet si 3 divise u_n alors 3 divise $2u_n$, ce qui est faux.)

$3|6$ et 3 ne divise pas u_n, d'où 6 ne divise pas u_n.

3 et 6 ne divisent pas u_n. Donc d est différent de 3 et de 6.

Par conséquent $PGCD(u_n , u_{n+1}).=2$.

Exercice 4 :

Pour tout entier relatif x, on pose : $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ et $A = \{ x \in \mathbb{Z} / f(x) \in \mathbb{Z} \}$.

1) Montrer que A n'est pas l'ensemble vide, puis le déterminer.

2) Déterminer : $B = \{x \in A / 4x^2 - 9(f(x))^2$ est divisible par 7 $\}$.

Une solution :

1) $f(-1) = 1$, $1 \in \mathbb{Z}$ d'où $-1 \in A$. Donc $A \neq \varnothing$.

$x \in A \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = k$, $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x + 3k = 1$ (E), $(x, k) \in \mathbb{Z}^2$

Le couple $(-1, 1)$ est solution de (E).

(E) $\Leftrightarrow 2(x+1) + 3(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x+1) = -3(y-1)$ et $3 \mid 2(x+1)$

$3 \mid 2(x+1)$ et PGCD(2, 3) = 1, d'après le théorème de Gauss $3 \mid x+1$

Par suite $x = 3q-1$, $q \in \mathbb{Z}$, donc $A = \{3q-1 , q \in \mathbb{Z}\}$.

2) $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ et $(2x-3f(x))(2x + 3f(x)))$ est divisible par 7.

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $7 \mid 4x-1$.

$\Leftrightarrow$ ($x = 3q-1$, $q \in \mathbb{Z}$ et $4x = 7p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3q-1 \ q \in \mathbb{Z} \\ 12q-4 = 7p+1, \ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$12q-4 = 7p+1 \Leftrightarrow 12q-7p = 5$ (E)

Le couple (1, 1) est solution de (E) ;

d'où (E) $\Leftrightarrow 12(q-1) - 7(p-1) \Leftrightarrow 12(q-1) = 7(p-1)$ et $7 \mid 12(q-1)$

$7 \mid 12(q-1)$ et PGCD(12, 7) = 1 ; d'après le théorème de Gauss $7 \mid q-1$

Par suite $q = 7\alpha + 1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $x = 21\alpha + 2$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, donc $B = \{ 21\alpha + 2, \alpha \in \mathbb{Z} \}$.

Exercice 5 :

Un astronome a observé, au jour J_o, le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours.
6 jours plus tard ($J_o + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.
On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronomie. Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_o et J_1.
Montrer que le couple (u ;v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2)a)Donner un couple d'entiers relatifs (x_o ;y_o) solution particulière de (E_2) : $35x - 27y = 1$.

b) En déduire une solution particulière (u_o ;v_o) de (E_1)

c) Déterminer toutes les solutions de (E_1).

d) Déterminer la solution (u ;v) permettant de donner J_1.

3)a)Combien de jours s'écouleront entre J_o et J_1 ?

b) Le jour J_o était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

c) Si l'astronome a manqué ce rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Une solution :

1) les jours d'apparition de A sont définis par : $J_o + 105u$
les jours d'apparition de B sont définis par : $J_o + 6 + 81v$.
A la première apparition simultanée de A et B on a : $J_o + 105u = J_o + 6 + 81v$;
d'où $105u - 81v = 6$.

$3(35u - 27v) = 6$

$35u - 27v = 2$

Par conséquent le couple (u ;v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

3)a) (E_2) : $35x - 27y = 1$

Utilisons l'algorithme d'Euclide pour trouver une solution particulière de (E_2) .

	1	3	2	1	2
35	27	8	3	2	1

8	3	2	1	0	

$1= 3-2\times1 = 3-(8-3\times2) =3\times3-8$
$= 3(27-3\times8)-8 = 3\times27-10\times8$
$= 3\times27-10(35-27)=13\times27 - 10\times 35$
d'où $-10\times 35+13\times27 = 1$. $35\times (-10)- 27\times(-13) = 1$; donc le couple $(-10, -13)$ est solution de (E_2).
b) Le couple $(-10, -13)$ est solution de (E_2) d'où le couple $(-20, -26)$ est solution de (E_1).
c) (x,y) est solution de $(E_1) \Leftrightarrow 35(x+20) - 27(y+26) = 0$
$\Leftrightarrow 35(x+20) = 27(y+26)$ et $27 | 35(x+20)$
$27| 35(x+20)$ et $PGCD(35, 27) =1$ d'après le théorème de Gauss $27| x+20$
Par suite $x = 27k -20$, $k\in \mathbb{Z}$ et $y = 35k -26$;
donc les solutions de (E_1) sont les couples $(27k -20, 35k -26)$, $k\in \mathbb{Z}$.

d) (u, v) est solution de (E_1) d'où $u = 27k -20$ et $v = 35k -26$, $k\in \mathbb{N}^*$.
La solution (u, v) donnant J_1 s'obtient pour $k =1$
Si $k =1$ $u = 7$ et $v = 9$.
La solution permettant de donner J_1 est le couple $(7, 9)$.
3a) Nombre de jours qui s'écouleront entre J_o et J_1 est : $N = 105\times7= 735$
Remarque : $N = 6+ 9\times81= 6 + 729=735$.
b) $735 \equiv 0\ [7]$ d'où le jour J_1 est un mardi.
Le jour J_o étant le mardi 7 décembre 1999 alors il reste 24 jours de la fin de l'année 1999.
$735- 24 = 711$
En fin 1999 il reste 711 jours de J_1. $711 = 366+345$ (366j de 2000 et 345j de 2001)
$345 = 365 - 20$; $31 - 20 = 11$; d'où le jour J_1 est le 11 décembre 2001.
La date correspondant à J_1 est le mardi 11 décembre 2001.
c) Si l'Astronome rate ce rendez-vous, il attendra un nombre de jours égal à PPCM(81;105).
PPCM $(81;105) = 81\times35= 2835$. Il attendra donc 2835 jours.

<u>**Exercice 6 :**</u> **Nombres de Mersenne:**
a: Montrez que pour tout n entier naturel ≥ 2 , si $2^n - 1$ est premier alors n est premier
b: Montrez que $2^{11} - 1$ n'est pas premier

<u>**Exercice 7 :**</u> **Le petit Théorème de FERMAT:**
Soit p un entier naturel premier et n un entier strictement compris entre 0 et p.
a : Montrez que C_p^n est divisible par p.
b : Montrez que, pour tout entier naturel a, $(a + 1)^p - a^p - 1$ est divisible par p.
c : Montrez que, pour tout b entier naturel, si $(b^p - b)$ est divisible par p alors $(b +1)^p -(b +1)$ l'est aussi.
d : Déduisez-en le petit théorème de Fermat:
"Pour tout entier p premier et tout a entier , $a^p \equiv a\ [p]$ "
e: Montrez que p est premier si et seulement si pour tout $r \in \{1 ; 2 ; ... ; p - 1\}$
on a $r^{p-1} \equiv 1\ [p]$

<u>**Exercice 8**</u> **: Théorème de Wilson**

Soit p un entier naturel premier. On note Ep l'ensemble $\{1 ; 2 ; .... ; p-1\}$.
a : Montrez que tout élément de Ep est premier avec p.
b : Montrez que pour tout a de Ep , il existe b unique dans Ep tel que $ab \equiv 1\ [p]$.
c : Déterminez les a éléments de Ep tels que $a^2 \equiv 1\ [p]$.
d : Montrez que $1*2*3...*(p-1) \equiv (p -1)\ [p]$
e : Déduisez-en que pour tout p entier naturel premier, $(p -1)! + 1$ est divisible par p. (Ce résultat ainsi que sa réciproque est <u>le théorème de Wilson</u>)

<u>**Exercice 9 :**</u>

Montrez que si un entier naturel a exactement trois diviseurs dans **N** alors cet entier est le carré d'un nombre premier.

Exercice 10 :

a: Montrez que pour tout couple d'entier relatifs (x , y) , si $x^2 + y^2$ est divisible par 7 alors x et y sont aussi divisibles par 7.

b: Montrer que le seul triplet d'entiers naturels (x, y, z) vérifiant $x^2 + y^2 = 7z^2$ est (0 , 0 , 0).

Exercice 11 :

p est un nombre premier > 2. On suppose qu'il existe a et b dans **N** tels que
$p = a^2 + b^2$.
a: Déterminez les valeurs $p < 100$ possibles.
b: Montrez que pour tout x dans **N**, x^2 est congru à 0 ou 1 modulo 4.
c: Montrez alors que p est congru à 1 modulo 4.
d: Peut-écrire 2003 comme somme de deux carrés dans **N**?

Exercice 12 :

Deux nombres premiers n et m sont dits "jumeaux" si $n + 2 = m$.
Par exemple , les couples (11 , 13) , (17 , 19) , (41 , 43) sont des couples de nombres premiers jumeaux.
On considère un entier $n > 3$.

a. Montrez que si (n , n + 2) est un couple de nombres premiers jumeaux alors n doit être congru à 2 modulo 3, autrement dit, on doit avoir , $n \equiv 2$ [3].
b. Montrez que si (n , n +2) est un couple de nombres premiers jumeaux alors n+ 4 ne peut pas être premier.
c. Montrez que (n , n +2) est un couple de nombres premiers jumeaux si et seulement si $n^2 + 2n$ a exactement 4 diviseurs dans **N**

Exercice 13 :

Montrez que, pour tout b entier ≥ 3 , le nombre $x = 1 + b + 2b^2 + b^3 + b^4$ n'est pas un nombre premier.

Solutions

Exo 6 : **Nombres de Mersenne**

a: Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que n ne soit pas premier.
On a donc n = ab avec a et b entiers > 1.
Rappelons l'identité : $X^k - 1 = (X-1)(X^{k-1} + X^{k-2} + ... + X + 1)$.
On peut alors écrire:
$2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)[(2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + ... + 1]$, produit de deux entiers > 1.
D'où $2^{ab}-1$ n'est pas premier d'où la conclusion

b: $2^{11} - 1 = 2047 = 23*89$ donc $2^{11}-1$ n'est pas premier

<u>Exo 7</u> : **Le petit Théorème de FERMAT**

a: Si p est premier et si n est entier avec $0 < n < p$, alors:

$$C_p^n = \frac{p!}{n!(p-n)!} = \frac{p}{n}\frac{(p-1)!}{(n-1)![(p-1)-(n-1)]!} = \frac{p}{n}C_{p-1}^{n-1}$$

On a donc la relation :

$$nC_p^n = pC_{p-1}^{n-1}.$$

D'après le théorème de Gauss, comme n et p (car $1 < n < p$ et p premier), on peut dire que C_p^n est divisible par p.

b: Il suffit alors , pour voir que $(a+1)^p - a^p - 1$ d'utiliser la formule du binôme de Newton, et de constater qu'en développant $(a+1)^p - a^p - 1$, il ne reste que des termes divisibles par p, d'après la question précédente.

c: Même principe que la question précédente mais en faisant une récurrence sur b.

d: Conséquence directe des questions c: et b: **récurrence sur a**

e: p est premier si et seulement si p est premier avec tout entier r appartenant à {1;2;...;p-1}.
Si p est premier alors pour tout r dans {1;2;...;p-1}, on a $(r^p - r)$ divisible par p.
Or, $(r^p - r) = r(r^{p-1} - 1)$.
Comme p et r sont premiers entre eux , on a alors $(r^{p-1} - 1)$ divisible par p, ou encore,
$r^{p-1} \equiv 1\ [p]$

<u>Exo 8 :</u> **Le théorème de Wilson**

a: Evident car tout si a et p , avec a dans Ep ont un diviseur $d \geq 1$commun alors d est inférieur à a donc strictement inférieur à p et comme p est premier, la seule valeur possible pour d est 1.

b: Si a est dans Ep, comme a et p sont premiers entre eux, on sait d'après le théorème de Bachet-Bezout, qu'il existe deux entiers naturels u et v tels que au+pv=1.
Soit u = Qp + b la division euclidienne de u par p. On a b dans {1;2;...;p-1}.
Effectivement, si b = 0 alors au + pv est divisible par p , ce qui contredit l'égalité au+pv=1.
Alors au + pv = a(Qp+b) + pv
= ab + (aQ+v)p
= 1
On a donc $ab \equiv 1$ [p]. L'existence de b est donc assurée.
Pour l'unicité, supposons qu'il existe un autre entier c dans Ep tel que $ac \equiv 1$ [p]
Alors a(b-c) est divisible par p. Comme a est premier avec p, on a donc (b-c) divisible par p.
Or, (b-c) est compris entre -(p-1) et (p-1) donc il ne peut pas être divisible par p.
D'où l'unicité de b.

c: $a^2 \equiv 1$ [p] si et seulement si (a-1)(a+1) est divisible par p.
a = 1 et a = (p-1) sont deux solutions évidentes.
Si a est dans {2;3;...;p-2} alors (a-1) et (a+1) sont dans {1;2;...;p-1}, donc premiers avec p.
Dans ce cas (a-1)(a+1) ne pas être divisible par p (car p premier).
Les seules solutions sont donc 1 et (p-1).

d: Pour p = 2,le résultat est évident car dans ce cas (p-1)! = 1! = 1 = (p-1) [p].
Pour p > 2 et premier:
Pour k compris strictement entre 1 et (p-1), il existe un k' unique distinct de k compris strictement entre 1 et (p-1) tel que $kk' \equiv 1$ [p].
Dans le produit 1*2*3*...*(p-2)*(p-1), on regroupe alors les facteurs compris entre 2 et (p-2) deux par

deux tels que le produit de ces facteurs soit identique à 1.
On a donc 1*(aa')*(bb')*(cc')*.....(dd')*(p-1) = 1*2*3*...*(p-1).
ce qui s'écrit $1*(p-1) \equiv 1*2*3*...*(p-1)$ [p] d'où $1*2*3*...*(p-1) \equiv (p-1)$ [p].

e: Comme $(p-1) \equiv -1$ [p], on en déduit que $1*2*3*...*(p-1) +1 \equiv 0$ [p]
ou encore $(p-1)! + 1 \equiv 0$ [p], c'est à dire $(p-1)! + 1$ est divisible par p.

<u>Exo 9 :</u>

Si n est le carré d'un nombre premier p, $n = p^2$, alors les diviseurs de n dans **N** sont 1 , p et p^2.
n a donc exactement 3 diviseurs dans **N**.

Réciproquement, si n a exactement 3 diviseurs dans **N**, comme 1 et n sont des diviseurs de n, n a un autre diviseur p compris strictement entre 1 et n.
p est premier, car si d divise p alors d divise n. Donc, d = 1 ou p car les seuls diviseurs de n < n sont 1 et p.
Donc, en particulier, p est le seul diviseur premier de n.
Donc, la décomposition de n en facteurs premiers est : $n = p^a$, avec $a > 1$.
Le nombre de diviseurs de n est alors (a+1), d'où a = 2. D'où $n = p^2$.

D'où la conclusion....

<u>Exo 10</u> :

Montrez que pour tout couple d'entier relatifs (x , y) ,
si $x^2 + y^2$ est divisible par 7 alors x et y sont aussi divisibles par 7

Passons aux congruences modulo 7....

Pour un entier relatif a quelconque, on a

- **$a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = 2$ ou $a = 3$ ou $a = 4$ ou $a = 5$ ou $a = 6$ modulo 7.**
  Ce sont simplement les restes possibles dans la division euclidienne de a par 7.
  Donc, sachant que si $a = b$ modulo 7 alors $a^2 = b^2$ modulo 7, les carrés modulo 7 sont:

- **$0 = 0^2$ ou $1 = 1^2 = 6^2$ ou $2 = 3^2 = 4^2$ ou $4 = 2^2 = 5^2$ modulo 7.**
  On remarque alors que la seule possibilité d'avoir $x^2 + y^2 = 0$ modulo 7 est de choisir $x = 0$ et $y = 0$ modulo 7 , c.a.d, x et y divisibles par 7.

<u>Exo 11</u>

- a) Faites la liste ....
- b)
  Pour tout x dans **Z**, on a x congru à 0 ou 1 ou 2 ou 3 modulo 4.
  Donc, x^2 est congru à 0^2 ou 1^2 ou 2^2 ou 3^2 modulo 4.
  D'où x^2 est congru à 0 ou 1 modulo 4.
- c)
  Comme p est un nombre premier > 2, p est impair donc congru à 1 ou 3 modulo 4.
  $p = a^2 + b^2$. Or, a^2 et $b^2 = 0$ ou 1 modulo 4.
  Donc, modulo 4, les valeurs possibles de $a^2 + b^2$ sont 0 ou 1 ou 2.
  Comme p est congru à 1 ou 3 modulo 4, on a alors p congru à 1 modulo4.
- d) 2003 est premier (faites-vous la vérification!)
  De plus, 2003 = 3 modulo 4.

Donc, d'après la question précédente, 2003 ne peut s'écrire sous la forme a^2+b^2
avec a et b entiers.

Exo 12: Nombres premiers jumeaux

- a: n étant un entier premier > 3, n n'est pas divisible par 3 , donc : $n \equiv 1$ ou 2 [3]
  Si de plus $n+2$ est aussi premier, on a alors $n+2 \equiv 1$ ou 2 [3]
  Mais si $n \equiv 1$ [3] alors $n+2 \equiv 3$ [3] c.a.d , $n+2 \equiv 0$ [3]. Ce qui est impossible.
  Donc, on doit avoir : $n \equiv 2$ [3]
- b: Toujours suivant le même principe, et d'après la question a:, si (n , $n+2$) est un couple de nombres premiers jumeaux,
  alors $n \equiv 2$ [3] donc $n + 4 \equiv 6$ [3] , d'où $n + 4 \equiv 0$ [3].
  Donc, $n + 4$ est divisible par 3 et > 3 , donc $n + 4$ n'est pas premier.
- c: Par définition des nombres premiers, n est premiers si et seulement si n admet exactement 2 diviseurs dans **N**.
  1 et n lui-même.
  Or, $n^2 + 2n = n(n + 2)$.
  Si n et $n + 2$ sont premiers alors $n(n + 2)$ est la décomposition de $n^2 + 2n$ en facteurs premiers.
  donc $n^2 + 2n$ a bien 4 diviseurs : 1 , n , $(n + 2)$ et $n(n + 2)$.
- Réciproquement.
  Si $n^2 + 2n$ a exactement 4 diviseurs, comme 1 , n , $n+2$ et $n^2 + 2n$ sont des diviseurs de n^2 + 2n, on a là tous les
  divisieurs de $n^2 + 2n$.
  $n+2$ et $n^2 + 2n$ ne divise pas n. Donc, n n'admet aucun autre diviseur à part n et 1.
  (Sinon, un tel diviseur p diviserait aussi $n^2 + 2n$, et $n^2 + 2n$ aurait plus de 4 diviseurs!)
  Donc, n est premier.
  Comme $n > 3$ et premier, n ne divise pas $n+2$.
  Donc, pour les mêmes raisons, $(n + 2)$ n'admet pas d'autre diviseur à part 1 et $(n + 2)$.
  Donc, $(n + 2)$ est aussi premier.

- Conclusion:
  n et $(n + 2)$ sont premiers si et seulement si $n^2 + 2n$ admet exactement 4 diviseurs.

Exo 13

- **Montrez que, pour tout b entier ≥ 3 , le nombre $x = 1 + b + 2b^2 + b^3 + b^4$ n'est pas un nombre premier.**
- Remarquez simplement que $\mathbf{1 + b + 2b^2 + b^3 + b^4 = (1 + b^2)(1 + b + b^2)}$

Exo 14

Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.
Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8?

Correction

L'idée, dans ce style de question, est que les restes dans la division euclidienne par A sont des entiers positifs strictement inférieurs à A. Donc, dans la suite des puissances d'un entier N quelconque, il y a toujours deux puissances ayant même reste et il y a nécessairement une puissance de N qui soit congru à N modulo A.
Le plus simple dans cet exercice, est alors de faire défiler les puissances de 3 modulo 8.
On obtient alors:

$3 = 3$ modulo 8
$3^2 = 9$ et $3^2 = 1$ modulo 8
$3^3 = 27$ et $3^3 = 3$ modulo 8
$3^4 = 81$ et $3^4 = 1$ modulo 8 etc , etc ...

Les restes possibles par la division euclidienne de 3^n par 8 sont donc 1 ou 3 suivant que n soit pair ou impair.

On veut maintenant l'ensemble des n entiers naturels tels que $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8.
On cherche l'ensemble des n entiers naturels tels que " $3^n.n - 9n + 2 = 0$ modulo 8 "
D'après le résultat précédent, on a 2 cas à étudier: n pair et n impair.

- Cas n pair:
  Comme dans ce cas, $3^n = 1$ modulo 8, on peut écrire que :
  $n - 9n + 2 = 0$ modulo 8 ou encore $-8n + 2 = 0$ modulo 8 ou encore $2 = 0$ modulo 8.
  C'est impossible, donc pas de solution avec n pair.
- Cas n impair:
  Comme dans ce cas, $3^n = 3$ modulo 8, on peut écrire :
  $3n - 9n + 2 = 0$ modulo 8 , ou encore , $-6n + 2 = 0$ modulo 8 , ou encore ,
  $2n + 2 = 0$ modulo 8 , ou encore , $2(n+1) = 0$ modulo 8
  Ceci conduit alors à $(n+1) = 4$ modulo 8 et donc $n = 3$ modulo 8.
  n est donc de la forme $n = 8K + 3$, où K est un entier naturel. n est bien impair.

Conclusion
L'ensemble des entiers naturels n tels que $3^n.n - 9n + 2$ est formé des entiers $8K + 3$ où K est un entier naturel.

Exo 15

Montrez que pour tout entier *n*, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Correction
Voilà le style de question que l'on veut souvent de traiter par une récurrence!
Pourquoi pas, mais c'est passer à côté de quelque chose de simple et de très général.
Utilisons directement ce que l'on sait sur les congruences.
On veut ici vérifier que $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est congru à 0 modulo 11.
Or!

- $3^{n+3} - 4^{4n+2} = 3^3.3^n - 4^2.(4^4)^n$
- $= 5.3^n + 6.3^n$ modulo 11 car $3^3 = 5$ [11] , $4^2 = 6$[11] et $4^4 = 3$[11]
- $= 11.3^n$ modulo 11.

Il ne reste plus qu'à conclure.

Exo 16

Montrez que pour tout couple d'entiers relatifs (a , b), si a et b ne sont pas divisibles par 7 alors $a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.
Montrez que pour tout n entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
Correction

Dans le cadre d'une Terminale S spécialité Maths, on ne peut invoquer autre chose que des arguments de congruence par répondre à ce genre de questions. Remarquons que le principe même de la congruence modulo 7, fait que les questions de divisibilités peuvent être traitées en étudiant uniquement les cas où les paramètres qui interviennent sont compris entre 0 et 6.

Dans le cadre de cet exercice, dire que a et b ne sont pas divisibles par 7 revient seulement à dire qu'ils sont congrus à des entiers A et B compris entre 1 et 6.
Si on fait la liste des carrés de ces entiers modulo 7, on obtient alors:

- $1^2 = 1$ modulo 7
- $2^2 = 4$ modulo 7
- $3^2 = 2$ modulo 7
- $4^2 = 2$ modulo 7
- $5^2 = 4$ modulo 7
- $6^2 = 1$ modulo 7

On constate alors que les carrés modulo 7 sont

- $1 = 1^2 = 6^2$ modulo 7
- $2 = 4^2 = 3^2$ modulo 7
- $4 = 2^2 = 5^2$ modulo 7

Aucune somme de deux de ces carrés ne peut donc être congrue à 0 modulo 7.
Donc, si a et b sont non divisibles par 7, la somme $a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.

Maintenant, en utlisant les diverses propriétés des congruences (compatibilité avec la somme et le produit), on peut écrire que, à modulo 7 près, on a:

- $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3(3^2)^n + 2^2.2^n$
- $= 3.2^n + 4.2^n$ modulo 7
- $= 7.2^n$ modulo 7
- $= 0$ modulo 7

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est bien divisible par 7 pour tout entier naturel n.

Exo 17

Déterminez l'ensemble des x entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.
Correction

$x^2 + 3x$ est divisible par 7 si et seulement si $x^2 + 3x = 0$ modulo 7.
Ou encore si et seulement si $x(x+3) = 0$ modulo 7.

Or, 7 est premier donc d'après le théorème de Gauss, il ne peut diviser un produit d'entiers que si il divise au moins un de ces entiers. On a donc:

$x(x+3) = 0$ modulo 7 si et seulement si $x = 0$ modulo 7 ou $(x + 3) = 0$ modulo 7.

Ce qui peut s'écrire: $x = 0$ modulo 7 ou $x = 4$ modulo 7.

Les entiers relatifs x tels que $x^2 + 3x$ soit divisible par 7 sont donc les entiers de la forme $7K$ ou de la forme $7K + 4$, où K est un entier relatif quelconque.

Devoir n°1

Exercice 1

Rappel : Tout entier naturel a s'écrit sous la forme $a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0$
avec pour tout i : $a_i \in \mathbb{N}$ et $a_i < 10$
Cette écriture est l'écriture décimale (ou écriture en base 10) de l'entier naturel a.
On la note souvent $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$

Exemple : le nombre 27854 s'écrit $2 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4$

Remarque : On peut aussi écrire les nombres dans une base autre que la base 10.
On utilise en informatique la base 2 (système binaire) et la base 16 (système hexadécimal)
On utilise aussi la base 12 pour compter les œufs, les huitres et la base 60 pour les secondes et les minutes.

Soit un entier naturel a dont l'écriture décimale est $a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0$
Démontrer les propriétés suivantes :

1°) a º a_0 (2)

2°) a º $\sum_{i=0}^{i=n} a_i$ (3)

3°) a º $10 \times a_1 + a_0$ (4)

4°) a º a_0 (5)

5°) a º $\sum_{i=0}^{i=n} a_i$ (9)

6°) a º $\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{i=n} a_i - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{i=n} a_i$ (11)

Déduire de chacune de ces propriétés un critère de divisibilité énoncé sous forme d'une phrase et donner dans chaque cas un ou deux exemples significatifs.

Exercice 2

Quel est le reste dans la division par 7 des nombres
999888777666555444333222111
999888777666555444333222111000

999999888888777777666666555555444444333333222222111111

Corrigé devoir n°1

Exercice 1

a est un entier naturel dont l'écriture décimale est $a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0$

1°) On sait que $10 \equiv 0 \ (2)$ donc pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $10^i \equiv 0 \ (2)$ donc $a_i \times 10^i \equiv 0 \ (2)$

donc $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 \equiv 0 \ (2)$

On en déduit que $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_0 \ (2)$

c'est-à-dire $\mathbf{a \equiv a_0 \ (2)}$

Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.

Exemples : 102568 est pair car 8 est pair 589647 n'est pas pair car 7 n'est pas pair.

2°) On sait que $10 \equiv 1 \ (3)$ donc pour tout $i \in \mathbb{N}$ $10^i \equiv 1^i \equiv 1 \ (3)$ donc $a_i \times 10^i \equiv a_i \ (3)$

On a $a = \sum_{i=0}^{i=n} a_i \times 10^i$ donc $a \equiv \sum_{i=0}^{i=n} a_i \times 10^i \ (3)$ donc $a \equiv \sum_{i=0}^{i=n} a_i \ (3)$

Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples : 10302 est divisible par 3 car $1 + 3 + 2 = 6$ est divisible par 3.

72311 n'est pas divisible par 3 car $7 + 2 + 3 + 1 + 1 = 14$ n'est pas divisible par 3.

3°) On sait que $100 \equiv 0 \ (4)$ c'est-à-dire $10^2 \equiv 0 \ (4)$

Pour $i \geq 2$, on peut écrire $10^i = 10^2 \times 10^{i-2}$ avec $10^{i-2} \in \mathbb{N}$.

Donc pour $i \geq 2$ $10^i \equiv 0 \times 10^{i-2} \equiv 0 \ (4)$

On a alors $10^i \equiv 0 \ (4)$ pour tout $i \geq 2$, donc $\sum_{i=2}^{i=n} a_i \times 10^i \equiv 0 \ (4)$

On peut écrire $a = \sum_{i=0}^{i=n} a_i \times 10^i = a_0 + 10 \times a_1 + \sum_{i=2}^{i=n} a_i \times 10^i$.

On en déduit $a \equiv a_0 + 10 \times a_1 \ (4)$

Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Exemples : 1983124 est divisible par 4 car 24 est divisible par 4.

72310 n'est pas divisible par 4 car 10 n'est pas divisible par 4.

4°) On sait que $10 \equiv 0 \ (5)$ donc pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $10^i \equiv 0 \ (5)$ donc $a_i \times 10^i \equiv 0 \ (5)$

donc $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 \equiv 0 \ (5)$

On en déduit que $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_0 \ (5)$ c'est-à-dire $a \equiv a_0 \ (5)$

Un nombre est divisible par 5 si et seult si son dernier chiffre est divisible par 5 (c-à-d 0 ou 5)

Exemples : 125875 est divisible par 5 car le dernier chiffre est 5.

524856 n'est pas divisible par 5 car le dernier chiffre n'est ni 0 ni 5.

5°) On sait que $10 \equiv 1 \ (9)$ donc pour tout $i \in \mathbb{N}$ $10^i \equiv 1^i \equiv 1 \ (9)$ donc $a_i \times 10^i \equiv a_i \ (9)$

On a $a = \sum_{i=0}^{i=n} a_i \times 10^i$ donc $a \equiv \sum_{i=0}^{i=n} a_i \times 10^i \ (9)$ donc $a \equiv \sum_{i=0}^{i=n} a_i \ (9)$

Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples : 10908 est divisible par 9 car $1 + 9 + 8 = 18$ est divisible par 9.
10524 n'est pas divisible par 9 car $1 + 5 + 2 + 4 = 12$ n'est pas divisible par 9.

6°) On peut remarquer que $10^0 \equiv 1 \ (11)$; $10^1 \equiv 10 \equiv -1 \ (11)$; $10^2 \equiv 100 \equiv 1 \ (11)$

Si i est pair, on peut écrire $i = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ donc $10^i = 10^{2p} = (10^2)^p$ donc $10^i \equiv 1^p \equiv 1 \ (11)$

Si i est impair, $i = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$ donc $10^i = 10^{2p+1} = (10^2)^p \times 10$
donc $10^i \equiv 1^p \times 10 \equiv 10 \equiv -1 \ (11)$

On en déduit que si i est pair $a_i \times 10^i \equiv a_i \ (11)$ et si i est impair $a_i \times 10^i \equiv -a_i \ (11)$

Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} a_i \times 10^i \equiv \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ pair}}}^{i=n} a_i + \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ impair}}}^{i=n} (-a_i) \ (11)$ c'est-à-dire $\displaystyle a \equiv \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ pair}}}^{i=n} a_i - \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ impair}}}^{i=n} a_i \ (11)$

Un nombre est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang pair (à partir de la droite) et la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

Exemples : 11308 est divisible par 11 car $(8 + 3 + 1) - (0 + 1) = 11$ est divisible par 11.
107524 n'est pas divisible par 11 car $(4 + 5 + 0) - (2 + 7 + 1) = -1$ n'est pas divisible par 11.

Exercice 2

Soit $N = 999888777666555444333222111$
N peut s'écrire sous la forme :
$N = 111 + 2 \times 111 \times 10^3 + 3 \times 111 \times 10^6 + 4 \times 111 \times 10^9 + \dots$
c'est-à-dire $N = 111 + 2 \times 111 \times 10^{1\times3} + 3 \times 111 \times 10^{2\times3} + 4 \times 111 \times 10^{3\times3} + \dots + 9 \times 111 \times 10^{8\times3}$

On peut remarquer que $111 \equiv 6 \equiv -1 \ (7)$
et $10^3 \equiv 1000 \equiv 6 \equiv -1 \ (7)$ donc $10^{3n} \equiv (-1)^n \ (7)$.
Alors si n est pair $10^{3n} \equiv 1 \ (7)$ et si n est impair $10^{3n} \equiv -1 \ (7)$

On en déduit que $N \equiv -1 + 2 \times (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) \times 1 + 4 \times (-1) \times (-1) + \dots + 9 \times (-1) \times 1$
Donc $N \equiv -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 \equiv -5 \equiv 2 \ (7)$

$\boxed{\text{Le reste dans la division par 7 du nombre } 999888777666555444333222111 \text{ est donc } 2}$.

Soit $M = 999888777666555444333222111000$
On a $M = 1000 \times N$
On sait que $1000 \equiv -1 \ (7)$ et $N \equiv 2 \ (7)$ donc $1000\,N \equiv -1 \times 2 \equiv -2 \equiv 5 \ (7)$
$\boxed{\text{Le reste dans la division par 7 du nombre } 999888777666555444333222111000 \text{ est donc } 5}$.

Soit $P = 999999888888777777666666555555444444333333222222111111$
On peut écrire P sous la forme :
$P = 111111 + 222222 \times 10^6 + 333333 \times 10^{2\times6} + \dots + 999999 \times 10^{8\times6}$
Donc $P = 111111 + 2 \times 111111 \times 10^6 + 3 \times 111111 \times 10^{2\times6} + \dots + 9 \times 111111 \times 10^{8\times6}$

On peut remarquer que $111111 = 111 \times 1000 + 111$
Donc $111111 \equiv (-1) \times (-1) + (-1) \equiv 0 \ (7)$
On en déduit alors $P \equiv 0 \ (7)$

$\boxed{\text{Le reste dans la division par 7 du nombre } P \text{ est } 0}$.

Devoir n°2

Exercice 1 : Un jeu d'allumettes

On dispose sur la table 38 allumettes.
Deux joueurs A et B prennent chacun leur tour un nombre d'allumettes compris entre 1 et 4.
Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu.
Le joueur qui commence et qui joue avec une stratégie bien définie, peut gagner la partie à coup sûr.
Trouver et justifier cette stratégie.
La stratégie est-elle valable quelque soit le nombre d'allumettes posées sur la table en début de partie ?

Exercice 2

Soient a, b et k des entiers naturels non nuls.
Démontrer que $PGCD(a + b ; b) = PGCD(a ; b)$ et $PGCD(ka ; kb) = k\, PGCD(a ; b)$

Exercice 3

Déterminer tous les couples (a ; b) d'entiers naturels non nuls tels que
$a \leq b$ $PGCD(a ; b) = 18$ et $a + b = 216$

corrigé devoir n°2

Exercice 1

Supposons que A joue le premier.

Pour que B perde, il faut que B prenne la dernière allumette, et il fera de façon certaine s'il lui **reste** une et une seule allumette.

Or chaque joueur peut prendre entre 1 et 4 allumettes, donc lorsque B joue, A peut "compenser" de façon à ce que la somme des allumettes prises soit égale à 5.
En effet si $1 \leq b \leq 4$, $-4 \leq -b \leq -1$ donc $5 - 4 \leq 5 - b \leq 5 - 1$ c'est-à-dire $1 \leq 5 - b \leq 4$
Donc lorsque B prend b allumettes, A pourra prendre $a = 5 - b$ allumettes.

Ainsi, si A par son premier coup, laisse à B un nombre d'allumettes congru à 1 modulo 5, à chaque fois que B jouera et prendra b allumettes, A pourra prendre $a = 5 - b$ allumettes et ainsi le nombre d'allumettes qui restent sera toujours congru à 1 modulo 5.
Comme le nombre d'allumettes restantes diminue strictement à chaque fois qu'un joueur joue, après un certain nombre de retraits, B se trouvera devant la dernière allumette.

La stratégie gagnante est donc la suivante :

A prend 2 allumettes de façon à ce qu'il en reste 36 puisque $36 \equiv 1 \quad (5)$ Puis chaque fois que B joue et prend b allumettes, A en prend $a = 5 - b$.

La stratégie est valable à condition que A puisse laisser par son premier coup un nombre d'allumettes congru à 1 modulo 5.
Ce n'est pas le cas si le nombre d'allumettes est au départ congru à 1 modulo 5.
Ainsi par exemple si le nombre d'allumettes est au départ égal à 46, le joueur qui commence la partie peut la perdre à coup sûr si l'autre joueur applique la stratégie ci-dessus.

$\boxed{\text{La statégie est valable lorsque le nombre d'allumettes au départ n'est pas congru à 1 modulo 5}}$.

Exercice 2

a, b et k sont des entiers naturels non nuls.

- Soit d un diviseur commum à a et b.
  Alors d divise a et b donc d divise a + b, donc d divise a + b et b
  donc d est un diviseur commun à a + b et b

- Soit d un diviseur commun à a + b et b
  Alors d divise a + b et b donc d divise a + b - b = a, donc d divise a et b
  donc d est un diviseur commun à a et b

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est donc égal à l'ensemble des diviseurs communs à a + b et b
Donc le plus grand des diviseurs communs à a et b est égal au plus grand des diviseurs communs à a+b et b, c'est-à-dire que: PGCD(a + b ; b) = PGCD(a ; b)

Soit d = PGCD(a ; b) et D = PGCD(ka ; kb)
d divise a et b, donc kd divise ka et kb, donc kd divise PGCD(ka ; kb) c'est-à-dire kd divise D .

On peut donc écrire $D = kd \times q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$
Par définition de D, D divise ka et kb , donc kdq divise ka et kb .

On peut donc écrire $ka = kdq \times p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $kb = kdq \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}^*$
donc $a = dqp$ et $b = dqp'$ (puisque $k \neq 0$)
On en déduit que dq divise a et b donc dq divise le PGCD de a et b, c'est-à-dire dq divise d .
Ceci entraine nécessairement q = 1.
On a par conséquent D = kd c'est-à-dire PGCD(ka ; kb) = k PGCD(a ; b)

Exercice 3

On a PGCD(a ; b) = 18 donc a = 18k et b = 18k' avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $k' \in \mathbb{N}^*$
On sait que a + b = 216 donc 18k + 18k' = 216 donc k + k' = 12
Comme $a \leq b$, on doit aussi avoir $k \leq k'$
Les couples (k ; k') d'entiers naturels tels que $k \leq k'$ et k + k' = 12 sont
(1 ; 11) ; (2 ; 10) ; (3 ; 9) ; (4 ; 8) ; (5 ; 7) ; (6 ; 6)

Seuls les couples (1 ; 11) et (5 ; 7) sont à retenir.

En effet pour tous les autres couples, k et k' ont un diviseur commun strictement supérieur à 1, donc le PGCD de a et de b sera strictement supérieur à 18.
Avec k = 2 et k' = 10, on aura a = 18 x 2 et b = 18 x 10 Le PGCD de (a ; b) n'est alors pas 18, mais 36.
Avec k = 3 et k' = 9, on aura a = 18 x 3 et b = 18 x 9 Le PGCD de (a ; b) n'est alors pas 18, mais 54.
Avec k = 4 et k' = 8, on aura a = 18 x 4 et b = 18 x 8 Le PGCD de (a ; b) n'est alors pas 18, mais 72.
Avec k = 6 et k' = 6, on aura a = 18 x 6 et b = 18 x 6 Le PGCD de (a ; b) n'est alors pas 18, mais 108.

Pour les couples (1 ; 11) et (5 ; 7) on peut vérifier qu'ils répondent bien à la question :

Avec k = 1 et k' = 11 on obtient a = 18 et b = 198 . On a bien $a \leq b$ PGCD(a ; b) = 18 et a + b = 216
Avec k = 5 et k' = 7 on obtient a = 90 et b = 126 . On a bien $a \leq b$ PGCD(a ; b) = 18 et a + b = 216

Les couples (a ; b) d'entiers naturels non nuls tels que $a \leq b$; PGCD(a ; b) = 18 et a + b = 216 sont donc (18 ; 198) et (90 ; 126) .S ={(18 ;198) ;(90 ;126)}

Devoir n°3

Exercice 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1°) Montrer que n et 2n + 1 sont premiers entre eux.

2°) On pose a = n + 3 et b = 2n + 1 et on note d le PGCD de a et b .
a) Calculer 2 a - b et en déduire les valeurs possibles de d.
b) Démontrer que a et b sont multiples de 5 si et seulement si (n - 2) est multiple de 5.

3°) On considère les nombres a et b définis par :
$a = n^3 + 2n^2 - 3n$ $b = 2n^2 - n - 1$
Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par (n - 1).

4°) a)On note d le PGCD de n(n + 3) et de 2n + 1.
Montrer que □ divise d puis que □ = d.
b) En déduire le PGCD, □, de a et b en fonction de n.
c) Application : Déterminer □ pour n = 2001
Déterminer □ pour n = 2002

Exercice 2

Donner la liste des nombres p premiers inférieurs ou égaux à 50.
Parmi ces nombres premiers quels sont ceux pour lesquels $p^2 \equiv 1 \ (24)$
Conjecturer et démontrer une propriété.

Corrigé devoir n°3

Exercice 1

1°) On peut écrire : $1 \times (2n + 1) - 2 \times n = 2n + 1 - 2n = 1$.
Il existe donc deux entiers relatifs u et v tels que : $u \times (2n + 1) + v \times n = 1$.
Le théorème de Bezout permet alors d'en déduire que : $\boxed{\text{n et } 2n + 1 \text{ sont premiers entre eux}}$.

2°) Soient $a = n + 3$; $b = 2n + 1$ et $d = \text{PGCD}(a ; b)$.
a) On a $2a - b = 2(n + 3) - (2n + 1) = 2n + 6 - 2n - 1 = 5$.
d est le PGCD de a et b, donc d divise a et divise b, donc d divise $2a - b = 5$.
Comme 5 est un nombre premier, les seules valeurs possibles de d sont 1 et 5
b) • Supposons que a et b sont multiples de 5.
$a \equiv 0 \ (5)$ donc $n + 3 \equiv 0 \ (5)$ donc $n + 3 - 5 \equiv 0 \ (5)$ donc $n - 2 \equiv 0 \ (5)$
donc $(n - 2)$ est multiple de 5.
• Supposons que $(n - 2)$ est multiple de 5, c'est-à-dire $n - 2 \equiv 0 \ (5)$
Alors $n - 2 + 5 \equiv 0 \ (5)$ donc $n + 3 \equiv 0 \ (5)$ donc $a \equiv 0 \ (5)$.
D'autre part $2(n - 2) \equiv 0 \ (5)$ c'est-à-dire $2n - 4 \equiv 0 \ (5)$ donc $2n - 4 + 5 \equiv 0 \ (5)$
donc $2n + 1 \equiv 0 \ (5)$ donc b ° 0 (5).
On a donc démontré que : a et b sont muliples de 5 ssi (n-2) est multiple de 5 .

3°) Soient $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $b = 2n^2 - n - 1$.
$a = n(n^2 + 2n - 3)$ et on peut remarquer que 1 est racine évidente du trinôme $n^2 + 2n - 3$.
On obtient alors la factorisation $a = n(n^2 + 2n - 3) = n(n - 1)(n + 3) = (n - 1)[n(n + 3)]$.
D'autre part on peut remarquer que 1 est aussi racine évidente du trinôme $2n^2 - n - 1$
On obtient alors la factorisation $b = 2n^2 - n - 1 = (n - 1)(2n + 1)$.
n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, donc $n(n + 3)$ et $(2n + 1)$ sont des entiers naturels.
On peut en déduire que : $\boxed{\text{a et b sont des entiers naturels divisibles par } (n - 1)}$.

4°) a) étant le PGCD de □ et □, □ divise □ = n + 3 , donc □ divise n(n + 3) et □ divise □ = 2n + 1.
donc □ est un diviseur commun à n(n + 3) et à (2n + 1).
On sait que les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.
Donc □ divise le PGCD de n(n + 3) et de 2n + 1 , donc $\boxed{\text{□ divise d}}$.
On sait que $1 = (2n + 1) - 2n$ donc $(n + 3) = (2n + 1)(n + 3) - 2n(n + 3)$.
Comme d est le PGCD de $n(n + 3)$ et de $2n + 1$, d divise $n(n + 3)$ et $2n + 1$,
donc d divise $(2n + 1)(n + 3) - 2n(n + 3)$, donc d divise $n + 3$.
d est un diviseur commun à n + 3 = □ et à 2n + 1 = □, donc d divise PGCD(□ ; □, donc d divise □ .
On a donc démontré que □ divise d et que d divise □.
d et □ étant des entiers naturels, on en déduit que $\boxed{\text{d = □}}$.
b) On sait que $a = (n - 1)n(n + 3)$ et $b = (n - 1)(2n + 1)$.
Donc □ = PGCD(a ; b) = PGCD[(n - 1)n(n + 3) ; (n - 1)(2n + 1)] = (n - 1) PGCD[n(n + 3) ; 2n + 1].
Donc □ = (n - 1) d = (n - 1) □ .
• Si n - 2 est multiple de 5, alors d'après 2°)b) □ et □ sont multiples de 5 ,

on en déduit en utilisant 2°)a) que □ = 5. Donc $\boxed{□ = 5(n - 1) \text{ si } n - 2 \text{ est multiple de } 5}$

- Si n - 2 n'est pas multiple de 5, alors d'après 2°)b) □ et □ ne sont pas multiples de 5 ,
  on en déduit en utilisant 2°)a) que □ = 1. Donc $\boxed{□ = n - 1 \text{ si } n - 2 \text{ n'est pas multiple de } 5}$

c) Si n = 2001, n - 2 n'est pas multiple de 5, donc □ = n - 1, donc $\boxed{\text{pour } n = 2001 , D = 2000}$

Si n = 2002, n - 2 est multiple de 5, donc □ = 5(n - 1) = 5(2001), donc $\boxed{\text{pour } n = 2002 , D = 10005}$

Remarque : avec n = 2001, on a a = 8020008000 et b = 8006000
on a donc justifié que PGCD(8020008000 ; 8006000) = 2000
avec n = 2002, on a a = 8032034010 et b = 8014005
on a donc justifié que PGCD(8032034010 ; 8014005) = 10005

Exercice 2

L'ensemble des nombres premiers inférieurs à 50 est :
{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 }
On a

p = 2	$p^2 = 4$	$p^2 \equiv 4 \quad (24)$
p = 5	$p^2 = 25$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 11	$p^2 = 121$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 17	$p^2 = 289$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 23	$p^2 = 529$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 31	$p^2 = 961$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 41	$p^2 = 1681$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 47	$p^2 = 2209$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$

p = 3	$p^2 = 9$	$p^2 \equiv 9 \quad (24)$
p = 7	$p^2 = 49$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 13	$p^2 = 169$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 19	$p^2 = 361$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 29	$p^2 = 841$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 37	$p^2 = 1369$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$
p = 43	$p^2 = 1849$	$p^2 \equiv 1 \quad (24)$

On peut conjecturer la propriété suivante :

Pour tout nombre p premier strictement supérieur à 3, on a $p^2 \equiv 1$ (24)

Démontrons cette propriété.

Soit p un nombre entier premier tel que p > 3 .

- p n'est pas un multiple de 3.
  Donc $p \equiv 1 \quad (3)$ ou $p \equiv 2 \quad (3)$, on en déduit que $p \equiv 1 \quad (3)$ ou $p \equiv -1 \quad (3)$
  c'est-à-dire $p - 1 \equiv 0 \quad (3)$ ou $p + 1 \equiv 0 \quad (3)$
  Alors $(p - 1)(p + 1) \equiv 0 \quad (3)$ c'est-à-dire $p^2 - 1 \equiv 0 \quad (3)$ c'est-à-dire $p^2 - 1$ est divisible par 3.

- D'autre part p est nécessairement un nombre impair.
  On peut donc écrire $p = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.
  Donc $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) = (2k + 1 - 1)(2k + 1 + 1) = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$
  Parmi les deux entiers consécutifs k et k + 1, il y en a un qui est pair, donc k(k + 1) est pair.
  On peut donc écrire $k(k + 1) = 2K$ avec $K \in \mathbb{N}$.
  On a alors $p^2 - 1 = 4k(k + 1) = 4 \times 2K = 8K$ avec $K \in \mathbb{N}$.
  On peut en déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 8.

$p^2 - 1$ est donc divisible par 3 et par 8.
Les nombres 3 et 8 étant premiers entre eux, on en déduit que $p^2 - 1$ est divisible par 24.
Donc $p^2 - 1 \equiv 0 \ (24)$ c'est-à-dire $p^2 \equiv 1 \ (24)$

On a donc démontré que :

Pour tout nombre p premier strictement supérieur à 3, on a $p^2 \equiv 1$ (24)

Devoir n°4

Exercice 1

Énoncer le théorème de Bezout et le théorème de Gauss.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes. Tous les calculs doivent figurer sur la feuille.
En utilisant l'agorithme d'Euclide :

1°) Déterminer le PGCD de 1064 et 700.

2°) Déterminer un couple d'entiers relatifs p et q tels que
$185p - 401q = 1$

Exercice 3

1°) Montrer que pour tout entier relatif n les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2°) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
Vérifier, en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux.
En déduire un couple (u ; v) d'entiers relatifs tels que $87u + 31v = 1$, puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).

3°) Soit (E') l'équation $87x + 31y = 0$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Démontrer l'équivalence : $(x ; y)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(x - x_0 ; y - y_0)$ est solution de (E')

b) Résoudre l'équation (E').

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

corrigé devoir n°4

Exercice 1

Théorème de Bezout
Soit a et b des entiers relatifs non nuls
a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow$ Il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$
Théorème de Gauss
Soient a et b des entiers relatifs non nuls et c un entier relatif
Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c

Exercice 2

1°) On peut écrire les divisions euclidiennes suivantes :

1064 = 1 x 700 + 364 , donc PGCD(1064 ; 700) = PGCD(700 ; 364)
700 = 1 x 364 + 336 , donc PGCD(700 ; 364) = PGCD(364 ; 336)
364 = 1 x 336 + 28 , donc PGCD(364 ; 336) = PGCD(336 ; 28)
336 = 12 x 28 + 0 , donc PGCD(336 ; 28) = 28

On obtient donc PGCD(1064 ; 700) = 28

2°) On peut écrire les divisions euclidiennes suivantes :

401 = 2 x 185 + 31 donc 31 = 401 - 2 x 185 (1)
185 = 5 x 31 + 30 donc 30 = 185 - 5 x 31 (2)
31 = 1 x 30 + 1 donc 1 = 31 - 30 (3)

En utilisant l'égalité (2), l'égalité (3) devient
1 = 31 - 30 = 31 - (185 - 5 x 31) = 31 - 185 + 5 x 31 = 31 x 6 - 185

En utilisant l'égalité (1), on obtient alors
1 = 31 x 6 - 185 = (401 - 2 x 185) x 6 - 185 = 401 x 6 - 12 x 185 - 185 = 401 x 6 - 13 x 185

On a donc 1 = (-13) x 185 - (-6) x 401

Exercice 3

1°) On peut écrire 5 x (14n + 3) - 14 x (5n + 1) = 70n + 15 - 70n - 14 = 15 - 14 = 1
Il existe donc deux entiers relatifs u = 5 et v = -14 tels que (14n + 3) u + (5n + 1) v = 1
Le théorème de Bezout permet alors d'en déduire que :

14n + 3 et 5n + 1 sont premiers entre eux pour tout entier relatif n .

2°) (E) est l'équation : 87 x + 31 y = 2 où x et y sont des entiers relatifs.
En prenant dans la première question n = 6, on a 14n + 3 = 84 + 3 = 87 et 5n + 1 = 30 + 1 = 31
On en déduit donc que : 87 et 31 sont premiers entre eux .

D'après la première question, on a (14n + 3) u + (5n + 1) v = 1 avec u = 5 et v = -14
Donc 87 x 5 + 31 x (-14) = 1

Le couple (u ; v) = (5 ; -14) est donc tel que 87 u + 31 v = 1

En multipliant par 2, on peut alors écrire 87 x 10 + 31 x (-28) = 2
Le couple $(x_0 ; y_0)$ = (10 ; -28) est tel que 87 x_0 + 31 y_0 = 2

Le couple $(x_0 ; y_0)$ = (10 ; -28) est une solution de (E)

3°) (E') est l'équation 87 x + 31 y = 0 où x et y sont des entiers relatifs.

a) Sachant que x_0 et y_0 sont des entiers relatifs, on peut remarquer que :
(x ; y) est un couple d'entiers relatifs ⇔ $(x - x_0 ; y - y_0)$ est un couple d'entiers relatifs
On peut alors écrire :
(x ; y) est solution de (E) ⇔ 87 x + 31 y = 2 ⇔ $87(x - x_0) + 31(y - y_0) = 2 - (87x_0 + 31y_0)$
⇔ $87(x - x_0) + 31(y - y_0) = 2 - 2$ ⇔ $87(x - x_0) + 31(y - y_0) = 0$
⇔ $(x - x_0 ; y - y_0)$ est solution de (E')

b) Si un couple (x ; y) d'entiers relatifs est une solution de (E'), on a $87x = -31y$
Alors 87 divise 87x, donc 87 divise -31y
Mais 87 et 31 étant premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 87 divise y
On a donc $y = 87k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
L'égalité $87x = -31y$ permet alors d'obtenir $87x = -31 \times 87k$ donc $x = -31k$
On en déduit que les solutions de (E') sont nécessairement de la forme $(-31k ; 87k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Il est immédiat de vérifier que tous les couples de la forme $(-31k ; 87k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont des solutions de l'équation (E') puisque $87 \times (-31k) + 31 \times (87k) = 0$

c) D'après la question a)
$(x ; y)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(x - x_0 ; y - y_0)$ est solution de (E')

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_0 ; y - y_0) = (-31k ; 87k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x ; y) = (-31k + x_0 ; 87k + y_0) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x ; y) = (-31k + 10 ; 87k - 28) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Devoir n°5

Exercice 1

a, b, c désignent des entiers relatifs.
En utilisant les définitions du cours, démontrer les deux propriétés suivantes :
- Si a divise b et si b divise c alors a divise c
- Si a divise b alors a^2 divise b^2

Exercice 2

p et q désignent deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$ (par exemple $p = 3$ et $q = 2$)
1°) Démontrer que p est impair.
2°) Démontrer que q est pair.

Exercice 3

a est un entier relatif, b est un entier naturel.
Écrire l'égalité et les conditions définissant la division euclidienne de a par b.
Application : Écrire la division euclidienne de -753 par 7

Corrigé devoir n°5

Exercice 1

- Si a divise b alors on peut écrire $b = a \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
  Si b divise c alors on peut écrire $c = b \times k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$
  on en déduit que $c = b \times k' = a \times k \times k' = a \times (kk')$
  Comme k et k' sont des entiers relatifs, kk' est un entier relatif et alors a divise c

- Si a divise b alors on peut écrire $b = a \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
  donc $b^2 = (a \times k)^2 = a^2 \times k^2$
  Comme k est un entier relatif, k^2 est un entier relatif (c'est même un entier naturel)
  et alors a^2 divise b^2

Exercice 2

p et q sont deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$

1°) On peut écrire $p^2 = 2q^2 + 1$

q étant un entier, $2q^2$ est un entier multiple de 2, c'est-à-dire un entier pair,

donc $p^2 = 2q^2 + 1$ est un entier impair.

Si p était un entier pair, on aurait $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $p^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ avec $2k^2 \in \mathbb{Z}$

donc p^2 serait aussi un entier pair, ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé.

p n'est donc pas un entier pair, c'est à dire que $\boxed{\text{p est un entier impair}}$.

2°) On peut écrire $2q^2 = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$

On a vu à la question précédente que p est impair, donc $p - 1$ et $p + 1$ sont des entiers pairs.

On peut donc écrire $p - 1 = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et par conséquent $p + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$

Alors $2q^2 = (p - 1)(p + 1) = 2k \times 2(k + 1) = 4k(k + 1)$

Donc $q^2 = 2k(k + 1)$ avec $k(k + 1) \in \mathbb{Z}$

Donc q^2 est un entier pair.

Si q était impair, on aurait $q = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{Z}$, donc $q^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$

avec $2n^2 + 2n \in \mathbb{Z}$, donc q^2 serait impair, ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé.

Donc q n'est pas un entier impair, c'est-à-dire que $\boxed{\text{q est un entier pair}}$.

Exercice 3

a est un entier relatif, b est un entier naturel.
La division euclidienne de a par b se traduit par l'égalité : $a = b \times q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ et $r < b$

La division de -753 par 7, se traduit par l'égalité $-753 = 7 \times (-108) + 3$
et on a bien $-108 \in \mathbb{Z}$, $3 \in \mathbb{N}$ et $3 < 7$

Devoir n°6

Exercice 1

On donne l'égalité $1000 = 13 \times 76 + 12$
Soit n un entier naturel.

Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13.

Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de $10^{3n+1} + 10^{3n}$ par 13.

En déduire le reste de la division euclidienne par 13 de 11 000 000 000 000 .

Quel est le reste de la division euclidienne par 13 de $25 \times 10^{15} + 1$.

Exercice 2

Déterminer le reste dans la division par 17 de $8 \times 35^{121} - 12 \times 50^{251}$.

Corrigé devoir n°6

Exercice 1

D'après l'égalité 1000 = 13 x 76 + 12, on peut dire que 1000 º 12 ≡ -1 (13) donc $10^3 \equiv -1$ (13)
Si n est un entier naturel, on a alors $(10^3)^n \equiv (-1)^n$ (13) c'est-à-dire $10^{3n} \equiv (-1)^n$ (13)
Si n est pair, on a donc $10^{3n} \equiv 1$ (13) et si n est impair $10^{3n} \equiv -1 \equiv 12$ (13)
Comme 1 et 12 sont des entiers naturels strictement inférieurs à 13, on en déduit :

Le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13 est donc 1 si n est pair et 12 si n est impair .

On peut écrire $10^{3n+1} + 10^{3n} = 10^{3n} \times 10 + 10^{3n} = 11 \times 10^{3n}$
Si n est pair, on a $10^{3n} \equiv 1$ (13) , donc $11 \times 10^{3n} \equiv 11$ (13) , donc $10^{3n+1} + 10^{3n} \equiv 11$ (13)
Si n est impair, on a $10^{3n} \equiv -1$ (13), donc $11 \times 10^{3n} \equiv -11 \equiv 2$ (13) , donc $10^{3n+1} + 10^{3n} \equiv 2$ (13)
Comme 11 et 2 sont des entiers naturels strictement inférieurs à 13, on en déduit :

Le reste de la division euclidienne de $10^{3n+1} + 10^{3n}$ par 13 est donc 11 si n est pair et 2 si n est impair
.

On peut écrire 11 000 000 000 000 = $11 \times 10^{12} = 10^{13} + 10^{12}$
En utilisant le résultat précédent avec n = 4, on obtient :

Le reste de la division euclidienne de 11 000 000 000 000 par 13 est 11 .

On a $10^{15} = 10^{3\times5}$. D'après les résultats précédents avec n = 5, on a $10^{15} \equiv -1$ (13)
Donc $25 \times 10^{15} \equiv -25 \equiv 1$ (13) donc $25 \times 10^{15} + 1 \equiv 2$ (13)
Comme 2 est un entier naturel strictement inférieur à 13, on en déduit :

Le reste de la division euclidienne par 13 de $25 \times 10^{15} + 1$ est donc 2 .

Exercice 2

On a $35 \equiv 1$ (17) donc $35^{121} \equiv 1^{121} \equiv 1$ (17) donc $8 \times 35^{121} \equiv 8$ (17)
D'autre part $50 \equiv -1$ (17) donc $50^{251} \equiv (-1)^{251} \equiv -1$ (17) donc $12 \times 50^{251} \equiv -12$ (17)
On en déduit $8 \times 35^{121} - 12 \times 50^{251} \equiv 8 + 12 \equiv 20 \equiv 3$ (17)
Comme 3 est un entier naturel strictement inférieur à 17, on en déduit :

Le reste dans la division par 17 de $8 \times 35^{121} - 12 \times 50^{251}$ est 3 .