Applications linéaires

Étude de linéarité

Exercice 1 [01703] [Correction]
Les applications entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivantes sont-elles linéaires :

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$?

Exercice 2 [01704] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3 [01705] [Correction]
Soit $J : C([0 ; 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $J(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que J est une forme linéaire.

Exercice 4 [01706] [Correction]
Soit $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 5 [01707] [Correction]
Soient a un élément d'un ensemble X non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(a) Montrer que $E_a : \mathcal{F}(X, E) \to E$ définie par $E_a(f) = f(a)$ est une application linéaire.

(b) Déterminer l'image et le noyau de l'application E_a.

Exercice 6 [01708] [Correction]
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soient $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par :
$\varphi(f) = f'$ et $\psi(f)$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.

(b) Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.

(c) Déterminer images et noyaux de φ et ψ.

Exercice 7 [02012] [Correction]
Montrer que l'application partie entière $\mathrm{Ent} : \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}[X]$ est linéaire et déterminer son noyau.

Linéarité et sous-espaces vectoriels

Exercice 8 [01709] [Correction]
Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
Montrer que pour toute partie A de E, on a $f(\operatorname{Vect} A) = \operatorname{Vect} f(A)$.

Exercice 9 [01711] [Correction]
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer

$$f(A) \subset f(B) \iff A + \ker f \subset B + \ker f$$

Exercice 10 [03247] [Correction]
Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

(a) Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\ker u$.

(b) Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\operatorname{Im} u$.

(c) À quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$?

Exercice 11 [03286] [Correction]
Caractériser les sous-espaces F d'un espace vectoriel E tels que

$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$$

Exercice 12 [02680] [Correction]
Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une famille $(E_i)_{1 \le i \le n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \le j \le p}$ de sous-espaces vectoriels de F.

(a) Montrer
$$f(\sum_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$$

(b) Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe alors la somme des $f(E_i)$ est directe.

(c) Montrer
$$f^{-1}(\sum_{j=1}^{p} F_j) \supset \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$$
Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Linéarité et colinéarité

Exercice 13 [01658] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires et ce pour tout $x \in E$.

(a) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x.x$.

(b) Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
(indice : on pourra distinguer les cas : (x, y) liée ou (x, y) libre.)

(c) Conclure que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 14 [00159] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires.
Montrer que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 15 [03418] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose
$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, g(x) = \lambda_x f(x)$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$g = \lambda f$$

Images et noyaux

Exercice 16 [01712] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 17 [01713] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(a) Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f + g)$.

(b) Comparer $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im}(f + g)$.

(c) Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.

(d) Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$.

Exercice 18 [01714] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer

(a) $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$.

(b) $E = \operatorname{Im} f + \ker f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

Exercice 19 [01715] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id} = 0$$

(a) Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

(b) Établir que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 20 [01716] [Correction]
Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que
$$f \circ g = h, g \circ h = f \text{ et } h \circ f = g$$

(a) Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.

(b) Montrer $f^5 = f$.

(c) En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E.

Exercice 21 [01754] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$; montrer que $\ker f = \ker(g \circ f)$, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$ puis que $\ker f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.

Exercice 22 [03360] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

(a) Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

(b) Montrer
$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$$

(c) Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

(d) Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Exercice 23 [01717] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que
$$g \circ f \circ g = g \text{ et } f \circ g \circ f = f$$

(a) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker g$ sont supplémentaires dans E.

(b) Justifier que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

L'anneau des endomorphismes

Exercice 24 [01710] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent *i.e.* tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\mathrm{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 25 [01726] [Correction]
À quelle condition une translation et un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commutent-ils ?

Exercice 26 [03242] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition et contenant l'endomorphisme Id_E.
Montrer que $F \cap \mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$

Projections et symétries vectorielles

Exercice 27 [01718] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que p est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{Id} - p$ l'est.

(b) Exprimer alors $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et $\ker(\mathrm{Id} - p)$ en fonction de $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$.

Exercice 28 [01719] [Correction]
Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :
(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;
(ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 29 [01720] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E. En déterminer noyau et image.

Exercice 30 [01723] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit s un endomorphisme de E involutif, *i.e.* tel que $s^2 = \mathrm{Id}$.
On pose $F = \ker(s - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id})$.

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

(b) Montrer que s est la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.
Plus généralement, soient $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - (\alpha + 1)f + \alpha \mathrm{Id} = 0$.
On pose $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(f - \alpha \mathrm{Id})$.

(c) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

(d) Montrer que f est l'affinité par rapport à F, parallèlement à G et de rapport α.

Exercice 31 [01724] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\,\mathrm{Id} = \tilde{0}$. Montrer
$$\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 3\,\mathrm{Id}) = E.$$

Quelle transformation vectorielle réalise f ?

Exercice 32 [01725] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On pose $q = \mathrm{Id} - p$ et on considère $L = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\}$ et $M = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \exists v \in \mathcal{L}(E), g = v \circ q\}$.
Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 33 [00165] [Correction]
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(a) Montrer que p et q ont même noyau si, et seulement si, $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

(b) Énoncer une condition nécessaire et suffisante semblable pour que p et q aient même image.

Exercice 34 [02468] [Correction]
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $p \circ q = 0$.

(a) Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.

(b) Déterminer image et noyau de celui-ci.

Exercice 35 [00164] [Correction]
Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(a) Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.

(b) Préciser alors $\mathrm{Im}(p + q)$ et $\ker(p + q)$.

Exercice 36 [00166] [Correction]
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

(a) Montrer que $u(\ker p) \subset \mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p \subset \ker u$.

(b) En déduire $u^2 = 0$.

(c) Réciproque ?

Exercice 37 [02242] [Correction]
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p avec $n > p$.
On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant

$$u \circ v = \mathrm{Id}_F$$

(a) Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.

(b) Déterminer son rang, son image et son noyau.

Exercice 38 [03251] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer

$$f \text{ est un projecteur} \iff \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}(\mathrm{Id} - f) = n$$

Exercice 39 [03759] [Correction]
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vérifiant

$$\mathrm{Im}\, p \subset \ker q$$

Montrer que $p + q - p \circ q$ est un projecteur et préciser son image et son noyau.

Exercice 40 [03359] [Correction]
Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

(a) Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.

(b) Montrer

$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im} g$$

(c) Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

(d) Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 41 [03314] [Correction]
Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E de dimension quelconque.
Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H. Montrer

$$H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$$

Exercice 42 [00174] [Correction]
Soient H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque et D une droite vectorielle non incluse dans H.
Montrer que D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 43 [03315] [Correction]
Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E de dimension quelconque.
On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E contenant H. Montrer

$$F = H \text{ ou } F = E$$

Exercice 44 [00208] [Correction]
Soient $f, g \in E^*$ telles que $\ker f = \ker g$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = \alpha g$.

Exercice 45 [00205] [Correction]
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^*, f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0 \implies f = 0$$

Montrer que e est une base de E.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 46 [01654] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer

$$V \subset f(V) \implies f(V) = V$$

Exercice 47 [01655] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. Montrer que pour tout famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E, on a

$$\operatorname{rg}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p)$$

Exercice 48 [01656] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.

(a) Soit $x \notin \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

(b) En déduire que $f^n = 0$.

Exercice 49 [01659] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f^2 + f \circ g = \mathrm{Id}$$

Montrer que f et g commutent.

Exercice 50 [01662] [Correction]
Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$

(b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 51 [00172] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, f un endomorphisme nilpotent non nul de E et p le plus petit entier tel que $f^p = \tilde{0}$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille

$$\left(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$$

soit libre.

(b) En déduire $f^n = \tilde{0}$.

Exercice 52 [00178] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $(I, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée et en déduire qu'il existe un polynôme non identiquement nul qui annule f.

Exercice 53 [02495] [Correction]
Soit E un plan vectoriel.

(a) Montrer que f endomorphisme non nul est nilpotent si, et seulement si, $\ker f = \operatorname{Im} f$.

(b) En déduire qu'un tel endomorphisme ne peut s'écrire sous la forme $f = u \circ v$ avec u et v nilpotents.

Exercice 54 [02161] [Correction]
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.
Montrer que l'application $\varphi\colon \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 55 [02162] [Correction]
Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts et $\varphi\colon \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P'(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_n))$$

Montrer que φ est bijective.

Rang d'une application linéaire

Exercice 56 [01660] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que

$$\operatorname{rg}(f+g) \le \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

puis que

$$\left|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\right| \le \operatorname{rg}(f-g)$$

Exercice 57 [01661] [Correction]
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Montrer que $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.

Exercice 58 [02682] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Montrer

$$\left|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\right| \le \operatorname{rg}(f+g) \le \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Exercice 59 [02504] [Correction]
Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.

(a) Montrer

$$\left|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)\right| \le \operatorname{rg}(u+v) \le \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$

(b) Trouver u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$\operatorname{rg}(u+v) < \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$

(c) Trouver deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$

Exercice 60 [00201] [Correction]
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer

$$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \iff \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \\ \ker f + \ker g = E \end{cases}$$

Exercice 61 [00191] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que :

(a) $\operatorname{rg}(f \circ g) \le \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.

(b) $\operatorname{rg}(f \circ g) \ge \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim E$.

Exercice 62 [02467] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

(a) Montrer

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g \iff E = \operatorname{Im} f + \ker g$$

(b) Montrer

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f \iff \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$$

Formule du rang

Exercice 63 [01665] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ supplémentaires dans E ;
(ii) $E = \operatorname{Im} f + \ker f$;
(iii) $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$;

(iv) $\ker f^2 = \ker f$.

Exercice 64 [01666] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g$ bijectif et $g \circ f = \tilde{0}$. Montrer que
$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$$

Exercice 65 [01663] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence
$$\ker f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f)$$

Exercice 66 [03127] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = \tilde{0}$.
Établir
$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u^2 \leq n$$

Exercice 67 [01668] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que
$$f + g = \mathrm{Id}_E \text{ et } \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$$
Montrer que f et g sont des projecteurs complémentaires.

Exercice 68 [00189] [Correction]
Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que
$$u + v = \mathrm{id} \text{ et } \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$$
Montrer que u et v sont des projecteurs.

Exercice 69 [01672] [Correction]
[Images et noyaux itérés d'un endomorphisme] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \operatorname{Im} f^p$ et $N_p = \ker f^p$.

(a) Montrer que $(I_p)_{p\geq 0}$ est décroissante tandis que $(N_p)_{p\geq 0}$ est croissante.

(b) Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.

(c) Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés.
Montrer que
$$\forall s \geq r, I_s = I_r \text{ et } N_s = N_r$$

(d) Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 70 [00197] [Correction]
[Images et noyaux itérés d'un endomorphisme] Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_p = \operatorname{Im} f^p \text{ et } N_p = \ker f^p$$

(a) Montrer que les suites $(I_p)_{p\geq 0}$ et $(N_p)_{p\geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante et que celles-ci sont simultanément stationnaires.

(b) On note r le rang à partir duquel les deux suites sont stationnaires. Montrer
$$I_r \oplus N_r = E$$

Exercice 71 [01674] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E.
On considère $h \colon H \to E$ la restriction de $g \circ f$ à H.

(a) Montrer que
$$\ker(g \circ f) = \ker h + \ker f$$

(b) Observer que
$$\operatorname{rg} h \geq \operatorname{rg} f - \dim \ker g$$

(c) En déduire que
$$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker g + \dim \ker f$$

Exercice 72 [03421] [Correction]
Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $h \in \mathcal{L}(G, H)$ des applications linéaires. Montrer
$$\operatorname{rg}(g \circ f) + \operatorname{rg}(h \circ g) \leq \operatorname{rg} g + \operatorname{rg}(h \circ g \circ f)$$

Exercice 73 [03639] [Correction]
Soient $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$. Établir

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim F \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$$

Exercice 74 [00195] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Établir que

$$\dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(\ker g) + \dim(\ker f)$$

Exercice 75 [00194] [Correction]
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer

$$\dim \ker f \cap F \geq \dim F - \operatorname{rg} f$$

Exercice 76 [00196] [Correction]
On dit qu'une suite d'applications linéaires

$$\{0\} \xrightarrow{u_0} E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} E_n \xrightarrow{u_n} \{0\}$$

est exacte si on a $\operatorname{Im} u_k = \ker u_{k+1}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que si tous les E_k sont de dimension finie, on a la formule dite d'Euler-Poincaré :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

Exercice 77 [03156] [Correction]
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \dim\left(\ker u^{k+\ell}\right) \leq \dim\left(\ker u^k\right) + \dim\left(\ker u^\ell\right)$$

Exercice 78 [02585] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.

(a) En appliquant le théorème du rang à la restriction h de f à l'image de g, montrer que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g)$$

(b) Pour $n = 3$, trouver tous les endomorphismes de E tels que $f^2 = 0$.

Applications linéaires et espaces supplémentaires

Exercice 79 [01664] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$.

(a) Établir $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\ker f^2 = \ker f$.

(b) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 80 [00223] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant

$$\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$$

(a) Établir

$$\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f \text{ et } \ker f^2 = \ker f$$

(b) Montrer

$$\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$$

Exercice 81 [01667] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient u et v deux endomorphismes de E tels que

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v$$

Établir que d'une part, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$, d'autre part $\ker u$ et $\ker v$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 82 [00224] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose

$$\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g = E$$

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 83 [00212] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}_E$. Montrer

$$\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = E$$

Exercice 84 [00214] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = f \text{ et } f \circ g \circ f = g$$

(a) Montrer que $\ker f = \ker g$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.
On pose

$$F = \ker f = \ker g \text{ et } G = \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$$

(b) Montrer que

$$E = F \oplus G$$

Exercice 85 [00213] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 86 [00215] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = g \text{ et } f \circ g \circ f = f$$

(a) Montrer que

$$\operatorname{Im} f \oplus \ker g = E$$

(b) Justifier que

$$f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$$

Exercice 87 [00218] [Correction]
Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$f_1 + \cdots + f_n = \mathrm{Id}_E \text{ et } \forall 1 \leq i \neq j \leq n, f_i \circ f_j = 0$$

(a) Montrer que chaque f_i est une projection vectorielle.

(b) Montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i = E$.

Exercice 88 [00219] [Correction]
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \dots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut Id_E. On note $F_1, \dots, F_m$ les images de $p_1, \dots, p_m$. Montrer

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$$

Exercice 89 [03241] [Correction]
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer que w est un isomorphisme si, et seulement si, u est injective, v est surjective et

$$\operatorname{Im} u \oplus \ker v = F$$

Applications linéaires définies sur une base

Exercice 90 [01671] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\operatorname{Im} f = ker f$ si, et seulement si, n est pair.

Exercice 91 [01653] [Correction]
Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1), f(1,1,0) = (1,0) \text{ et } f(1,1,1) = (1,1)$$

Exprimer $f(x, y, z)$ et déterminer noyau et image de f.

Exercice 92 [00173] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note

$$C = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$$

(a) Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Observer que

$$C = \left\{a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}$$

(c) Déterminer la dimension de C.

Exercice 93 [03801] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n.
On note

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$$

(a) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Soit a un vecteur de E tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$.
Montrer que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ constitue une base de E.

(c) Soit $\varphi_a : C(f) \to E$ l'application définie par $\varphi_a(g) = g(a)$.
Montrer que φ_a est un isomorphisme.

(d) En déduire que

$$C(f) = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \dots, f^{n-1})$$

Exercice 94 [00192] [Correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Former une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\ker u = G$.

Exercice 95 [02379] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que $\operatorname{rg} f^2 = 3$. Quels sont les rangs possibles pour f ?

Formes linéaires en dimension finie

Exercice 96 [01675] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et φ une forme linéaire non nulle sur E.
Montrer que pour tout $u \in E \setminus \ker \varphi$, $\ker \varphi$ et $\operatorname{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 97 [01676] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de formes linéaires sur E.
On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i(x) = 0$.
Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est liée dans E^*.

Exercice 98 [01679] [Correction]
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a $f(x) = \varphi(x).a$.

Exercice 99 [03131] [Correction]
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique vérifiant

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k)$$

Exercice 100 [02685] [Correction]
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts.
On note F_j l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F_j(P) = \int_0^{a_j} P$$

Montrer que $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Exercice 101 [03140] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Montrer

$$\forall x, y \in E, x \neq y \implies \exists \varphi \in E^*, \varphi(x) \neq \varphi(y)$$

Exercice 102 [00209] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer

$$\exists x \in E, f(x)g(x) \neq 0$$

Exercice 103 [00206] [Correction]
Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 104 [02684] [Correction]
Soit E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, de dimensions finies ou non. Montrer que $(E \times F)^*$ et $E^* \times F^*$ sont isomorphes.

Espaces d'applications linéaires

Exercice 105 [00179] [Correction]
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et G un sous-espace vectoriel de E. On pose

$$A = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid G \subset \ker u\}$$

(a) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

(b) Déterminer la dimension de A.

Exercice 106 [00180] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $f \circ g = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dim E \times \dim \ker f$.

Exercice 107 [03771] [Correction]
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit W un sous-espace vectoriel de E
Soit A l'ensemble des applications linéaires de E dans F s'annulant sur W.

(a) Montrer que A est un espace vectoriel.

(b) Trouver la dimension de A.

Exercice 108 [00200] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On note

$$A_F = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f \subset F\} \text{ et } B_F = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid F \subset \ker f\}$$

(a) Montrer que A_F et B_F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ et calculer leurs dimensions.

(b) Soient u un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et $\varphi\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(f) = u \circ f$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Déterminer $\dim \ker \varphi$.

(c) Soit $v \in \operatorname{Im} \varphi$. Établir que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$. Réciproque ? Déterminer $\operatorname{rg} \varphi$.

Exercice 109 [00203] [Correction]
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(F,E)$.
Exprimer la dimension de $\{g \in \mathcal{L}(E,F) \mid f \circ g \circ f = 0\}$ en fonction du rang de f et des dimensions de E et F.

Endomorphismes opérant sur les polynômes

Exercice 110 [02152] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta\colon \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ l'application définie par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

(a) Montrer que Δ est bien définie et que Δ est une application linéaire.

(b) Déterminer le noyau de Δ.

(c) En déduire que cette application est surjective.

Exercice 111 [00163] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Δ l'endomorphisme de E déterminé par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

(a) Justifier que l'endomorphisme Δ est nilpotent.

(b) Déterminer des réels $a_0, \dots, a_n, a_{n+1}$ non triviaux vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k) = 0$$

Exercice 112 [02153] [Correction]
Soit $\Delta\colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

(a) Montrer que Δ est un endomorphisme et que pour tout polynôme P non constant $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$.

(b) Déterminer $\ker \Delta$ et $\operatorname{Im} \Delta$.

(c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$$

(d) En déduire que, si $\deg P < n$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0$$

Exercice 113 [02154] [Correction]
Soit $\varphi\colon \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = (n+1)P - XP'$.

(a) Justifier que φ est bien définie et que c'est une application linéaire.

(b) Déterminer le noyau de φ.

(c) En déduire que φ est surjective.

Exercice 114 [02155] [Correction]

(a) Montrer que $\varphi\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X) + P(X+1)$ est bijective.
On en déduit qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ unique tel que

$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$$

(b) Justifier qu'on peut exprimer $P_n(X+1)$ en fonction de $P_0, \dots, P_n$.

(c) En calculant de deux façons $P_n(X+2) + P_n(X+1)$ déterminer une relation donnant P_n en fonction de $P_0, \dots, P_{n-1}$.

Exercice 115 [02156] [Correction]
Soient A un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ et $r\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], r(P) \text{ est le reste de la division euclidienne de } P \text{ par } A$$

Montrer que r est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $r^2 = r \circ r = r$.
Déterminer le noyau et l'image de cet endomorphisme.

Exercice 116 [03133] [Correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\varphi(1) = 1, \varphi(X) = X \text{ et } \forall P \in \mathbb{R}[X], P(a) = P(b) = 0 \implies \varphi(P) = 0$$

Exercice 117 [03046] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la suite $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Exercice 118 [00074] [Correction]
Pour $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on note S_p l'ensemble des suites (u_n) vérifiant

$$\exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$$

(a) Montrer que si $u \in S_p$, P est unique ; on le notera P_u.

(b) Montrer que S_p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(c) Montrer que ϕ, qui à u associe P_u, est linéaire et donner une base de son noyau. Que représente son image ?

(d) Donner une base de S_p (on pourra utiliser $R_k(X) = (X+1)^k - aX^k$ pour $k \in [\![0\,;p]\!]$).

(e) Application : déterminer la suite (u_n) définie par

$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$$

Isomorphisme induit

Exercice 119 [02909] [Correction]
Soient E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) Montrer que si F_1 et F_2 ont un supplémentaire commun alors ils sont isomorphes.

(b) Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 120 [00199] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie
Montrer que

$$\exists g \in \mathcal{L}(E), f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E \iff \operatorname{Im} f = \ker f$$

Exercice 121 [00503] [Correction]
[Factorisation par un endomorphisme] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = f \circ h$$

Exercice 122 [00202] [Correction]
[Factorisation par un endomorphisme] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer

$$\ker f \subset \ker g \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = h \circ f$$

Exercice 123 [00185] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
Résoudre l'équation $u \circ f = v$ d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) oui b) non c) non d) oui

Exercice 2 : [énoncé]

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (x, y), \vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

donne

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'))$$

donc

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda(x + y, x - y) + \mu(x' + y', x' - y') = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

De plus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = (x' + y')/2 \\ y = (x' - y')/2 \end{cases}$$

Par suite, chaque $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent par f :

$$((x' + y')/2, (x' - y')/2)$$

f est donc bijective.

Finalement f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et

$$f^{-1} : (x', y') \mapsto \left(\frac{(x' + y')}{2}, \frac{(x' - y')}{2}\right).$$

Exercice 3 : [énoncé]

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C([0\,;1], \mathbb{R})$,

$$J(\lambda f + \mu g) = \int_0^1 \lambda f(t) + \mu g(t)\,dt$$

et par linéarité de l'intégrale

$$J(\lambda f + \mu g) = \lambda \int_0^1 f(t)\,dt + \mu \int_0^1 g(t)\,dt = \lambda J(f) + \mu J(g)$$

De plus $J : C([0\,;1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donc J est une forme linéaire sur $C([0\,;1], \mathbb{R})$.

Exercice 4 : [énoncé]

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)'' - 3(\lambda f + \mu g)' + 2(\lambda f + \mu g)$$

puis

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda(f'' - 3f' + 2f) + \mu(g'' - 3g' + 2g)$$

donc

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

De plus $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc φ est un endomorphisme $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$f \in \ker\varphi \iff f'' - 3f' + 2f = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2. La solution générale est

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Par suite

$$\ker\varphi = \left\{C_1 e^x + C_2 e^{2x} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$,

$$E_a(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda E_a(f) + \mu E_a(g)$$

Par suite E_a est une application linéaire.

(b) $f \in \ker E_a \iff f(a) = 0$. $\ker E_a = \{f \in \mathcal{F}(X, E) \mid f(a) = 0\}$.
$\operatorname{Im} E_a \subset E$ et $\forall \vec{x} \in E$, en considérant $f : X \to E$ la fonction constante égale à $\vec{x}$, on a $E_a(f) = \vec{x}$. Par suite $\vec{x} \in \operatorname{Im} E_a$ et donc $E \subset \operatorname{Im} E_a$. Par double inclusion $\operatorname{Im} E_a = E$.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x \lambda f(t) + \mu g(t)\,dt = \lambda \int_0^x f(t)\,dt + \mu \int_0^x g(t)\,dt = (\lambda\psi(f) + \mu\psi(g))(x)$$

donc

$$\psi(\lambda f + \mu g) = \lambda\psi(f) + \mu\psi(g)$$

De plus $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ donc φ et ψ sont des endomorphismes de E.

(b) On a
$$\forall f \in E, (\varphi \circ \psi) = (\psi(f))' = f$$
car $\psi(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi
$$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$$
Aussi
$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, (\psi \circ \varphi)(f)(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)$$

(c) $\varphi \circ \psi$ est bijective donc φ est surjective et ψ injective.
φ est surjective donc $\operatorname{Im}\varphi = E$. $\ker\varphi$ est formé des fonctions constantes.
ψ est injective donc $\ker\psi = \left\{\tilde{0}\right\}$. $\operatorname{Im}\psi$ est l'espace des fonctions de E qui s'annulent en 0.

Exercice 7 : [énoncé]
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $F, G \in \mathbb{K}(X)$. On peut écrire
$$F = \mathrm{Ent}(F) + \hat{F} \text{ et } G = \mathrm{Ent}(G) + \hat{G}$$
avec $\deg \hat{F}, \deg \hat{G} < 0$.
Puisque
$$\lambda F + \mu G = \lambda \mathrm{Ent}(F) + \mu \mathrm{Ent}(G) + \lambda \hat{F} + \mu \hat{G}$$
avec $\deg(\lambda \hat{F} + \mu \hat{G}) < 0$ on a
$$\mathrm{Ent}(\lambda F + \mu G) = \lambda \mathrm{Ent}(F) + \mu \mathrm{Ent}(G)$$
Ainsi Ent est linéaire.
$$\ker \mathrm{Ent} = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg F < 0\}$$

Exercice 8 : [énoncé]
$f(\operatorname{Vect} A)$ est un sous-espace vectoriel de F et $A \subset \operatorname{Vect} A$ donc $f(A) \subset f(\operatorname{Vect} A)$.
Par suite $\operatorname{Vect} f(A) \subset f(\operatorname{Vect} A)$.
Inversement, $f^{-1}(\operatorname{Vect} f(A))$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A donc $A \subset f^{-1}(\operatorname{Vect} f(A))$ puis $f(A) \subset f(f^{-1}(\operatorname{Vect} f(A))) \subset \operatorname{Vect} f(A)$.
Par double inclusion l'égalité.

Exercice 9 : [énoncé]
$(\Longrightarrow)$ Supposons $f(A) \subset f(B)$.
Soit $\vec{x} \in A + \ker f$. On peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in A$ et $\vec{v} \in \ker f$.
$f(\vec{x}) = f(\vec{u}) \in f(A) \subset f(B)$ donc il existe $\vec{w} \in B$ tel que $f(\vec{x}) = f(\vec{w})$.
On a alors $\vec{x} = \vec{w} + (\vec{x} - \vec{w})$ avec $\vec{w} \in B$ et $\vec{x} - \vec{w} \in \ker f$. Ainsi $\vec{x} \in B + \ker f$.
$(\Longleftarrow)$ Supposons $A + \ker f \subset B + \ker f$.
Soit $\vec{y} \in f(A)$. Il existe $\vec{x} \in A$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$. Or $\vec{x} \in A \subset A + \ker f \subset B + \ker f$ donc on peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in B$ et $\vec{v} \in \ker f$. On a alors $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{u}) \in f(B)$.

Exercice 10 : [énoncé]
(a) $u^{-1}(u(F))$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et $\ker u$ donc
$$F + \ker u \subset u^{-1}(u(F))$$
Inversement, soit $x \in u^{-1}(u(F))$. On a $u(x) \in u(F)$ donc il existe $a \in F$ tel que $u(x) = u(a)$ et alors pour $b = x - a$ on a $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in \ker u$. Ainsi
$$u^{-1}(u(F)) = F + \ker u$$

(b) $u(u^{-1}(F))$ est un sous-espace vectoriel de E inclus dans F et dans $\operatorname{Im} u$ donc
$$u(u^{-1}(F)) \subset F \cap \operatorname{Im} u$$
Inversement, soit $x \in F \cap \operatorname{Im} u$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. Or, puisque $x \in F$, $a \in u^{-1}(F)$ et donc $x = u(a) \in u(u^{-1}(F))$. Ainsi
$$u(u^{-1}(F)) = F \cap \operatorname{Im} u$$

(c) On a $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$ si, et seulement si,
$$F + \ker u = F \cap \operatorname{Im} u$$
Si cette condition est vérifiée alors
$$F \subset F + \ker u = F \cap \operatorname{Im} u \subset F$$
et donc
$$F = F + \ker u = F \cap \operatorname{Im} u$$
ce qui entraîne
$$\ker u \subset F \text{ et } F \subset \operatorname{Im} u$$
Inversement, si ces conditions sont vérifiées, on a immédiatement $F + \ker u = F = F \cap \operatorname{Im} u$.
Finalement $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$ si, et seulement si, F est inclus dans l'image d'un endomorphisme injectif.

Exercice 11 : [énoncé]
Les inclusions suivantes sont toujours vraies

$$F \subset h^{-1}(h(F)) \text{ et } h(h^{-1}(F)) \subset F$$

Si $h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$ alors

$$h^{-1}(h(F)) = F \text{ et } h(h^{-1}(F)) = F$$

Les inclusions $h^{-1}(h(F)) \subset F$ et $F \subset h(h^{-1}(F))$ entraînent respectivement $\ker h \subset F$ et $F \subset \operatorname{Im} h$.
Inversement, supposons

$$\ker h \subset F \subset \operatorname{Im} h$$

Pour $x \in h^{-1}(h(F))$, il existe $a \in F$ tel que $h(x) = h(a)$. On a alors $x - a \in \ker h \subset F$ et donc $x = a + (x - a) \in F$. Ainsi $h^{-1}(h(F)) \subset F$ puis $h^{-1}(h(F)) = F$
Aussi pour $y \in F \subset \operatorname{Im} h$, il existe $a \in E$ tel que $y = h(a)$ et puisque $y \in F$, $a \in h^{-1}(F)$.
Ainsi $F \subset h(h^{-1}(F))$ puis $F = h(h^{-1}(F))$.
Finalement

$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Si $y \in f(\sum_{i=1}^n E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1 + \cdots + x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On alors $y = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ avec $f(x_i) \in f(E_i)$ et ainsi $f(\sum_{i=1}^n E_i) \subset \sum_{i=1}^n f(E_i)$.
Si $y \in \sum_{i=1}^n f(E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On a alors $y = f(x)$ avec $x = x_1 + \cdots + x_n \in \sum_{i=1}^n E_i$ donc $f(\sum_{i=1}^n E_i) \supset \sum_{i=1}^n f(E_i)$.

(b) Si $f(x_1) + \cdots + f(x_n) = 0$ avec $x_i \in E_i$ alors $f(x_1 + \cdots + x_n) = 0$ donc $x_1 + \cdots + x_n = 0$ car f injective puis $x_1 = \ldots = x_n = 0$ car les E_i sont en somme directe et enfin $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$. Ainsi les $f(E_i)$ sont en somme directe.

(c) Soit $x \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. On peut écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $f(x_j) \in F_j$ donc $f(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_p) \in \sum_{j=1}^p F_j$. Ainsi $\sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j) \subset f^{-1}(\sum_{j=1}^p F_j)$.
On obtient une inclusion stricte en prenant par exemple pour f une projection sur une droite D et en prenant F_1, F_2 deux droites distinctes de D et vérifiant $D \subset F_1 + F_2$.
$f = 0$ ou $f = \operatorname{Id}$ sont des conditions suffisantes faciles...
Plus finement, supposons chaque F_j inclus dans $\operatorname{Im} f$ (et $p \geq 1$)
Pour $x \in f^{-1}(\sum_{j=1}^p F_j)$, on peut écrire $f(x) = y_1 + \cdots + y_p$ avec $y_j \in F_j$. Or $F_j \subset \operatorname{Im} f$ donc il existe $x_j \in E$ vérifiant $f(x_j) = y_j$. Evidemment $x_j \in f^{-1}(F_j)$. Considérons alors $x_1' = x - (x_2 + \cdots + x_p)$, on a $f(x_1') = y_1$ donc $x_1' \in f^{-1}(F_j)$ et $x = x_1' + x_2 + \cdots + x_p \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. Ainsi $f^{-1}(\sum_{j=1}^p F_j) \subset \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$ puis l'égalité.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Si $x = 0_E$ alors n'importe quel λ_x convient..
Sinon, la famille $(x, f(x))$ étant liée, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda x + \mu f(x) = 0_E$.
Si $\mu = 0$ alors $\lambda x = 0_E$, or $x \neq 0_E$ donc $\lambda = 0$ ce qui est exclu car $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.
Il reste $\mu \neq 0$ et on peut alors écrire $f(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x = -\lambda/\mu$.

(b) Cas (x, y) liée : on peut écrire $y = \mu x$ avec $\mu \neq 0$ (car $x, y \neq 0_E$).
D'une part $f(y) = \lambda_y y = \mu\lambda_y x$. D'autre part $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu\lambda_x x$.
Sachant $\mu \neq 0$ et $x \neq 0_E$, on conclut : $\lambda_x = \lambda_y$.
Cas (x, y) libre :
D'une part $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$, d'autre part $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.
Ainsi $\lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.
Par liberté de la famille (x, y), on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

(c) L'application $x \mapsto \lambda_x$ est constante sur $E \setminus \{0_E\}$. Notons λ la valeur de cette constante.
On a $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, f(x) = \lambda x$, de plus cette identité vaut aussi pour $x = 0_E$ et donc $f = \lambda \operatorname{Id}$.

Exercice 14 : [énoncé]
Pour tout x non nul, la liaison de la famille $(x, f(x))$ permet d'écrire $f(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$ unique.
Soient x, y non nuls.
Cas (x, y) liée :
On peut écrire $y = \mu x$ et alors

$$\text{O}f(y) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y \text{ et } f(y) = \lambda_y y$$

donc $\lambda_y = \lambda_x$.
Cas (x, y) libre :

$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

donc $\lambda_x = \lambda_y$ par identification des scalaires facteurs dans une famille libre.
On pose λ la valeur commune des λ_x. On a donc

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, f(x) = \lambda x$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 0_E$. On peut alors conclure $f = \lambda \operatorname{Id}$.

Exercice 15 : [énoncé]
Soient $x, y \in E \setminus \ker f$.

Si la famille $(f(x), f(y))$ est libre alors les deux égalités

$$g(x+y) = \lambda_{x+y}(f(x)+f(y)) \text{ et } g(x+y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y)$$

entraînent $\lambda_x = \lambda_y$ par identification des coefficients.
Si la famille $(f(x), f(y))$ est liée avec alors on peut écrire

$$f(y) = \alpha f(x) \text{ avec } \alpha \neq 0$$

et donc $y - \alpha x \in \ker f$. Or il est immédiat d'observer que le noyau de f est inclus dans celui de g et donc

$$g(y) = \alpha g(x)$$

De plus

$$\alpha g(x) = \alpha\lambda_x f(x) \text{ et } g(y) = \alpha\lambda_y f(x)$$

donc à nouveau $\lambda_x = \lambda_y$.
Posons λ la valeur commune des scalaires λ_x pour x parcourant $E \setminus \ker f$.
Pour tout $x \in E$, qu'il soit dans $\ker f$ ou non, on peut affirmer

$$g(x) = \lambda f(x)$$

et donc $g = \lambda f$.

Exercice 16 : [énoncé]
Si $\operatorname{Im} f \subset \ker g$ alors pour tout $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \ker g$ donc $g(f(x)) = 0_E$. Ainsi $g \circ f = 0$.
Si $g \circ f = 0$ alors pour tout $x \in E$, $g(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \ker g$. Ainsi

$$\forall x \in E, f(x) \in \ker g$$

donc $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Soit $x \in \ker f \cap \ker g$ on $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0_E$. Ainsi $\ker f \cap \ker g \subset \ker f + g$.

(b) Soit $y \in \operatorname{Im}(f+g)$. Il existe $x \in E$, $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Ainsi $\operatorname{Im} f + g \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

(c) Soit $x \in \ker f$, $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker f^2$. Ainsi $\ker f \subset \ker f^2$.

(d) Soit $y \in \operatorname{Im} f^2$. Il existe $x \in E$, $y = f^2(x) = f(f(x)) = f(\vec{u})$ avec $\vec{u} = f(x)$ donc $y \in \operatorname{Im} f$. Ainsi $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) $(\Longrightarrow)$ Supposons $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\}$.
L'inclusion $\ker f \subset \ker f^2$ est toujours vraie indépendamment de l'hypothèse.
Soit $x \in \ker f^2$, on a $f^2(x) = f(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \ker f$.
De plus $f(x) \in \operatorname{Im} f$ or par hypothèse $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\}$ donc $f(x) = 0_E$ puis $x \in \ker f$. Ainsi $\ker f^2 \subset \ker f$ puis l'égalité.
$(\Longleftarrow)$ Supposons $\ker f = \ker f^2$.
Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$. On peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in E$. Or $f(y) = 0_E$ donc $f^2(x) = 0_E$. Ainsi $x \in \ker f^2 = \ker f$ et par suite $y = f(x) = 0_E$. Finalement $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\}$.

(b) $(\Longrightarrow)$ Supposons $E = \operatorname{Im} f + \ker f$.
L'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ est vraie indépendamment de l'hypothèse.
Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \ker f$.
Puisque $u \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $u = f(a)$ avec $a \in E$. On a alors $y = f(f(a) + v) = f^2(a) + f(v) = f^2(a) \in \operatorname{Im} f^2$. Ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ puis l'égalité.
$(\Longleftarrow)$ Supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. L'inclusion $\operatorname{Im} f + \ker f \subset E$ est toujours vraie.
Inversement, soit $x \in E$. $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ donc il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$.
Posons $u = f(a)$ et $v = x - u$.
Clairement $x = u + v$, $u \in \operatorname{Im} f$. De plus $f(v) = f(x) - f(u) = f(x) - f^2(a) = 0$ donc $v \in \ker f$.
Finalement $E = \operatorname{Im} f + \ker f$.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Posons $g = \frac{1}{2}(3\operatorname{Id} - f) \in \mathcal{L}(E)$. On a $f \circ g = \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}f^2 = \operatorname{Id}$ et de même $g \circ f = \operatorname{Id}$ donc f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.

(b) En tant que noyaux d'applications linéaires, $\ker(f - \operatorname{Id})$ et $\ker(f - 2\operatorname{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $x \in \ker(f - \operatorname{Id}) \cap \ker(f - 2\operatorname{Id})$. On a $f(x) = x$ et $f(x) = 2x$ donc $x = 0_E$. Ainsi

$$\ker(f - \operatorname{Id}) \cap \ker(f - 2\operatorname{Id}) = \{0_E\}$$

Soit $x \in E$. Posons $u = 2x - f(x)$ et $v = f(x) - x$.
On a $u + v = x$, $f(u) = 2f(x) - f^2(x) = 2x - f(x) = u$ donc $u \in \ker(f - \operatorname{Id})$ et $f(v) = f^2(x) - f(x) = 2f(x) - 2x = 2v$ donc $v \in \ker(f - 2\operatorname{Id})$. Ainsi

$$E = \ker(f - \operatorname{Id}) + \ker(f - 2\operatorname{Id})$$

Finalement, $\ker(f - \operatorname{Id})$ et $\ker(f - 2\operatorname{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) Soit $x \in \ker h$. On $g \circ h(x) = 0$ donc $x \in \ker f$. Ainsi, on a l'inclusion $\ker h \subset \ker f$. De même, on obtient $\ker f \subset \ker g$ et $\ker g \subset \ker h$ d'où l'égalité des noyaux. Soit $y \in \operatorname{Im} h$, il existe $x \in E$ tel que $h(x) = y$. Mais alors $f(g(x)) = y$ donc $y \in \operatorname{Im} f$. Ainsi, on a l'inclusion $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$ et de même, on obitent $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} h$ d'où l'égalité des images.

(b) On remarque
$$f^2 = (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g^2$$
et
$$f^2 = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h^2$$
On a alors
$$f = g \circ h = g \circ (f \circ g) = g \circ (g \circ h) \circ (h \circ f) = g^2 \circ h^2 \circ f = f^5$$

(c) Si $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$ alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ et on a $f(x) = 0$. On a donc
$$x = f(a) = f^5(a) = f^4(x) = 0$$
Ainsi
$$\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$$
Par une éventuelle analyse-synthèse, on remarque que pour tout $x \in E$, on peut écrire
$$x = f^4(x) + \left(x - f^4(x)\right)$$
avec
$$f^4(x) \in \operatorname{Im} f \text{ et } x - f^4(x) \in \ker f$$
Ainsi
$$\operatorname{Im} f + \ker f = E$$
Finalement, les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 21 : [énoncé]

On a toujours $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
Inversement, pour $x \in \ker(g \circ f)$, on a $g \circ f(x) = 0$ donc $f \circ g \circ f(x) = f(0) = 0$. Or $f \circ g = \mathrm{Id}$ donc $f(x) = 0$.
Ainsi $\ker(g \circ f) \subset \ker f$ puis $\ker(g \circ f) = \ker f$.
On a toujours $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
Inversement, pour $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors $y = g \circ f \circ g(x) = (g \circ f)(g(x)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.
Ainsi $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$ puis $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$
Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$. Il existe $a \in E$ tel que $x = g(a)$ et alors $f(x) = 0$ donne $f(g(a)) = 0$ d'où $a = 0$ car $f \circ g = \mathrm{Id}$. On en déduit $x = g(a) = 0$ et donc $\ker f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$.
Soit $x \in E$. On peut écrire $x = (x - g(f(x))) + g(f(x))$ avec $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$ et $x - g(f(x)) \in \ker f$ car
$$f(x - g(f(x))) = f(x) - (f \circ g)(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$$
Ainsi $E = \ker f + \operatorname{Im} g$ et finalement $\ker f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Evidemment $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
Pour $x \in \ker(g \circ f)$, on a $f(x) = f(g(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \ker f$.
Pour $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors
$y = g(f(g(x)) = g(f(a)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

(b) Si $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$ alors on peut écrire $x = g(a)$ et puisque $f(x) = 0$, $a = f(g(a)) = 0$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = (x - g(f(x)) + g(f(x))$ avec $x - g(f(x)) \in \ker f$ et $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$.

(c) Si f est inversible alors $f \circ g = \mathrm{Id}$ entraîne $g = f^{-1}$.
Cette condition suffisante est aussi évidemment nécessaire.

(d) $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ et donc $g \circ f$ est un projecteur.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$.
Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc
$$x = f(a) = (f \circ g \circ f)(a) = (f \circ g)(x) = 0$$
Soit $x \in E$.
Analyse :
Supposons $x = u + v$ avec $u = f(a) \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \ker g$.
$g(x) = g \circ f(a)$ donc $(f \circ g)(x) = f(a) = u$.
Synthèse :
Posons $u = (f \circ g)(x)$ et $v = x - u$.
On a $u \in \operatorname{Im} f$, $x = u + v$ et $g(v) = g(x) - g(u) = 0$ i.e. $v \in \ker g$.

(b) On a immédiatement $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$.
Inversement, pour $y \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in E$.
Par symétrie, on a $E = \operatorname{Im} g \oplus \ker f$ et on peut écrire
$$x = g(a) + u \text{ avec } a \in E \text{ et } u \in \ker f$$
On a alors $y = f(g(a)) \in f(\operatorname{Im} g)$ et l'on obtient l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset f(\operatorname{Im} g)$.

Exercice 24 : [énoncé]
$\mathrm{Id} = \mathrm{Id} - f^n = (\mathrm{Id} - f)(\mathrm{Id} + f + \cdots + f^{n-1})$ et aussi $\mathrm{Id} = (\mathrm{Id} + f + \cdots + f^{n-1})(\mathrm{Id} - f)$.
Par suite $\mathrm{Id} - f$ est inversible et $(\mathrm{Id} - f)^{-1} = \mathrm{Id} + f + \cdots + f^{n-1}$.

Exercice 25 : [énoncé]
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $t = t_u$ où $u \in E$. Soit $x \in E$

$$(f \circ t)(x) = (t \circ f)(x) \iff f(x) + f(u) = f(x) + u \iff f(u) = u$$

Une translation est un endomorphisme commutent si, et seulement si, le vecteur de translation est invariant par l'endomorphisme.

Exercice 26 : [énoncé]
Posons $H = F \cap \mathrm{GL}(E)$
On a immédiatement $H \subset \mathrm{GL}(E)$, $\mathrm{Id}_E \in H$ et $\forall u, v \in H, u \circ v \in H$.
Montrer que H est stable par passage à l'inverse.
Soit $u \in H$. Considérons l'application $\varphi\colon F \to F$ définie par

$$\varphi(v) = u \circ v$$

L'application φ est évidemment linéaire et puisque u est inversible, cette application est injective. Or F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (car sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, lui-même de dimension finie) donc φ est un automorphisme de F. Par suite l'application φ est surjective et puisque $\mathrm{Id}_E \in F$, il existe $v \in F$ tel que

$$u \circ v = \mathrm{Id}_E$$

On en déduit $u^{-1} = v \in F$ et donc $u^{-1} \in H$.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) $(\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - 2p + p^2$ donc $(\mathrm{Id} - p)^2 = (\mathrm{Id} - p) \iff p = p^2$.

(b) $p \circ (\mathrm{Id} - p) = \tilde{0}$ donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) \subset \ker p$.
Inversement, soit $x \in \ker p$, on a $(\mathrm{Id} - p)(x) = x - p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$. Ainsi $\ker p \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.
Finalement $\ker p = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et de même $\ker(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}\, p$.

Exercice 28 : [énoncé]
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons (i)
$p^2 = p \circ q \circ p = p \circ q = p$ et $q^2 = q \circ p \circ q = q \circ p = q$ donc p et q sont des projecteurs.
Soit $x \in \ker p$. On a $q(x) = q(p(x)) = 0_E$ donc $x \in \ker q$. Ainsi $\ker p \subset \ker q$. Par symétrie l'égalité.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons (ii)
Soit $x \in E$. On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Im}\, q$ et $v \in \ker q = \ker p$.
D'une part $(p \circ q)(x) = p(q(u)) + p(0_E) = p(u)$ et d'autre part $p(x) = p(u) + p(v) = p(u)$.
Ainsi $p \circ q = p$ et de même $q \circ p = q$.

Exercice 29 : [énoncé]
$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ donc $p \circ q$ est un projecteur.
Soit $x \in \ker p + \ker q$, il existe $(u, v) \in \ker p \times \ker q$ tels que $x = u + v$ et alors

$$(p \circ q)(x) = (p \circ q)(u) + (p \circ q)(v) = (q \circ p)(u) + (p \circ q)(v) = 0_E$$

donc $x \in \ker p \circ q$.
Ainsi

$$\ker p + \ker q \subset \ker p \circ q$$

Inversement, soit $x \in \ker p \circ q$. On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \ker p$ et $v \in \mathrm{Im}\, p$.

$$(p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = q(v) = 0_E$$

donc $v \in \ker q$. Par suite $x \in \ker p + \ker q$.
Par double inclusion

$$\ker p \circ q = \ker p + \ker q$$

Soit $y \in \mathrm{Im}\, p \circ q$, il existe $x \in E$ tel que $y = (p \circ q)(x)$. On a $y = p(q(x)) \in \mathrm{Im}\, p$ et $y = q(p(x)) \in \mathrm{Im}\, q$ donc $y \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. Ainsi $\mathrm{Im}\, p \circ q \subset \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.
Inversement, soit $y \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. Il existe $x \in E, y = q(x)$ et $y = p(y) = (p \circ q)(x) \in \mathrm{Im}\, p \circ q$.
Ainsi $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p \circ q$ puis l'égalité.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) F et G sont des sous-espaces vectoriels car noyaux d'endomorphismes.
Soit $\vec{x} \in F \cap G$. On a $s(\vec{x}) = \vec{x}$ et $s(\vec{x}) = -\vec{x}$ donc $\vec{x} = \vec{o}$. Ainsi $F \cap G = \{\vec{o}\}$.
Soit $\vec{x} \in E$. Posons $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{x} + s(\vec{x}))$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{x} - s(\vec{x}))$.
On a $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, $s(\vec{u}) = \vec{u}$ donc $\vec{u} \in F$ et $s(\vec{v}) = -\vec{v}$ donc $\vec{v} \in G$.
Ainsi $F + G = E$. F et G sont donc supplémentaires dans E.

(b) $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.
On a $s(\vec{x}) = s(\vec{u}) + s(\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$ donc x est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(c) F et G sont des sous-espaces vectoriels car noyaux d'endomorphismes.
Soit $\vec{x} \in F \cap G$. On a $f(\vec{x}) = \vec{x}$ et $f(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$ donc $\vec{x} = \vec{o}$. Ainsi $F \cap G = \{\vec{o}\}$.
Soit $\vec{x} \in E$. Posons $\vec{u} = \frac{1}{1-\alpha}(f(\vec{x}) - \alpha\vec{x})$ et $\vec{v} = \frac{1}{1-\alpha}(\vec{x} - f(\vec{x}))$.
On a $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, $f(\vec{u}) = \vec{u}$ donc $\vec{u} \in F$ et $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$ donc $\vec{v} \in G$.
Ainsi $F + G = E$. F et G sont donc supplémentaires dans E.

(d) $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.
On a $f(\vec{x}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{u} + \alpha\vec{v}$ donc f est l'affinité par rapport à F parallèlement à G et de rapport α.

Exercice 31 : [énoncé]
Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}) \cap \ker(f - 3\,\mathrm{Id})$. On a $f(\vec{x}) = \vec{x}$ et $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$ donc $\vec{x} = \vec{o}$.
Soit $\vec{x} \in E$. Posons $\vec{u} = \frac{1}{2}(3\vec{x} - f(\vec{x}))$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) - \vec{x})$.
On a $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \ker(f - \mathrm{Id})$ et $\vec{v} \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id})$ après calculs.
f est l'affinité vectorielle par rapport à $F = \ker(f - \mathrm{Id})$, parallèlement à $G = \ker(f - 3\,\mathrm{Id})$ et de rapport 3.

Exercice 32 : [énoncé]
$\varphi\colon u \mapsto u \circ p$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ donc $L = \operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
$\psi\colon v \mapsto v \circ q$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ donc $M = \operatorname{Im}\psi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Soit $f \in L \cap M$. Il existe $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f = u \circ p = v \circ q$.
On a $f \circ p = u \circ p^2 = u \circ p = f$ et $f \circ p = v \circ q \circ p = 0$ car $q \circ p = 0$ donc $f = 0$. Ainsi $L \cap M = \{0\}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a $f = f \circ \mathrm{Id} = f \circ (p + q) = f \circ p + f \circ q \in L + M$. Ainsi $\mathcal{L}(E) = L + M$.
Finalement L et M sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Supposons $\ker p = \ker q$. On a
$$p \circ q - p = p \circ (q - \mathrm{Id})$$
Or $\operatorname{Im}(q - \mathrm{Id}) = \ker q$ donc $\operatorname{Im}(q - \mathrm{Id}) \subset \ker p$ puis
$$p \circ q - p = 0$$
Ainsi $p \circ q = p$ et de même on obtient $q \circ p = q$.
Inversement, si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ alors $\ker q \subset \ker p$ et $\ker p \subset \ker q$ d'où l'égalité $\ker p = \ker q$.

(b) Supposons $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$. On a $\ker(p - \mathrm{Id}) = \operatorname{Im} q$ donc $(p - \mathrm{Id}) \circ q = 0$ d'où $p \circ q = q$. Et de façon semblable, $q \circ p = p$.
Inversement, l'égalité $p \circ q = q$ entraîne $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$ et l'égalité $q \circ p = p$ entraîne $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante cherchée est
$$p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p$$

Exercice 34 : [énoncé]

(a) Calculons
$$r^2 = (p + q - q \circ p)^2 = (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p)$$
En développant et en exploitant $p \circ q = 0$ on obtient,
$$r^2 = p^2 + q \circ p + q^2 - q^2 \circ p - q \circ p^2$$
En exploitant $p^2 = p$ et $q^2 = q$, on parvient à $r^2 = r$ donc r est un projecteur.

(b) Pour tout $x \in E$,
$$r(x) = p(x) + q(x - p(x)) \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$
donc
$$\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$
Inversement, si $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Im} p$ et $b \in \operatorname{Im} q$.
Puisque $p \circ q = 0$, on a $p(b) = 0$ et puisque $a \in \operatorname{Im} p$, on a $p(a) = a$.
Ainsi $p(x) = a$ et donc $b = x - a = x - p(x)$.
Or $b \in \operatorname{Im} q$ donc $b = q(b)$ puis $b = q(x - p(x)) = q(x) - q(p(x))$.
Finalement $x = a + b = p(x) + q(x) - q(p(x)) = r(x)$ et donc $x \in \operatorname{Im} r$.
Ainsi
$$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$
Soit $x \in \ker p \cap \ker q$, on a $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0$ donc $x \in \ker r$.
Inversement, soit $x \in \ker r$.
On a $p(x) + q(x - p(x)) = 0$ donc $p(x) = p(p(x)) = p(q(x - p(x))) = 0$ car $p \circ q = 0$.
Ainsi $x \in \ker p$. De plus $p(x) + q(x - p(x)) = 0$ sachant $p(x) = 0$ donne $q(x) = 0$ et donc $x \in \ker q$.
Finalement $\ker r \subset \ker p \cap \ker q$ puis
$$\ker r = \ker p \cap \ker q$$

Exercice 35 : [énoncé]

(a) ($\Longleftarrow$) Supposons $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$. On a alors

$$(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$

($\Longrightarrow$) Supposons $p+q$ projecteur. Par les mêmes calculs que ci-dessus

$$p \circ q + q \circ p = \tilde{0}$$

En composant cette relation avec p à droite et à gauche, on obtient

$$p \circ q \circ p + q \circ p = \tilde{0} \text{ et } p \circ q + p \circ q \circ p = \tilde{0}$$

On en déduit $q \circ p = p \circ q$ puis $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.

(b) On a évidemment

$$\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$

Inversement, pour $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, on a $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Im} p$ et $b \in \operatorname{Im} q$.
Puisque $p \circ q = 0$, $p(b) = 0$ et donc $p(x) = p(a) = a$. De même $q(x) = b$ et donc
$x = p(x) + q(x) \in \operatorname{Im}(p+q)$.
Ainsi

$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$

On a évidemment

$$\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$$

Inversement pour $x \in \ker(p+q)$, on a $p(x) + q(x) = 0$ donc $p^2(x) + p(q(x)) = 0$ puis $p(x) = 0$ car $p^2 = p$ et $p \circ q = 0$. Ainsi $x \in \ker p$ et de même $x \in \ker q$.
Finalement

$$\ker p \cap \ker q = \ker(p+q)$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Si $x \in \ker p$ alors $p(u(x)) = u(x) + u(p(x)) = u(x)$ donc $u(x) \in \operatorname{Im} p$. Ainsi $u(\ker p) \subset \operatorname{Im} p$.
Si $x \in \operatorname{Im} p$ alors $p(x) = x$ donc $u(x) = p(u(x)) - u(p(x)) = p(u(x)) - u(x)$ d'où $2u(x) = p(u(x))$. Par suite $u(x) \in \operatorname{Im} p$ donc $p(u(x)) = u(x)$ et enfin la relation précédente donne $u(x) = 0$. Ainsi $x \in \ker u$.

(b) Pour $x \in E$, $u(x) = u(p(x)) + u(x - p(x))$.
Or $u(p(x)) = 0$ car $\operatorname{Im} p \subset \ker u$ et $u(x - p(x)) \in u(\ker p) \subset \operatorname{Im} p \subset \ker u$ donc $u^2(x) = 0$.

(c) Supposons $u^2 = 0$. On a $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. Soit p une projection sur $\operatorname{Im} u$. On a $p \circ u = u$ car les vecteurs de $\operatorname{Im} u$ sont invariants par p et on a $u \circ p = 0$ car
$\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} u \subset \ker u$. Ainsi, il existe une projection p pour laquelle $u = p \circ u - u \circ p$.
La réciproque est vraie.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) $(v \circ u)^2 = v \circ \operatorname{Id}_F \circ u = v \circ u$ donc $v \circ u$ est un projecteur.

(b) Le rang d'un projecteur est égal à sa trace donc

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{tr}(v \circ u) = \operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(\operatorname{Id}_F) = p$$

On a

$$\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v \text{ et } \dim \operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v \circ u) = p \geq \operatorname{rg}(v) = \dim \operatorname{Im} v$$

On en déduit

$$\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$$

On a

$$\ker u \subset \ker(v \circ u) \text{ et } \dim \ker u = n - \operatorname{rg} u \geq n - p = n - \operatorname{rg}(v \circ u) = \dim \ker(v \circ u)$$

donc

$$\ker(v \circ u) = \ker u$$

Exercice 38 : [énoncé]

Si f est un projecteur alors f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$ tandis que $\operatorname{Id} - f$ est la projection complémentaire sur $\ker f$ parallèlement à $\operatorname{Im} f$.
On en déduit

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(\operatorname{Id} - f) = \operatorname{rg} f + \dim \ker f = n$$

en vertu de la formule du rang.
Inversement, supposons

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(\operatorname{Id} - f) = n$$

Posons $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - f)$.
Pour tout $x \in E$, on a

$$x = f(x) + (x - f(x)) \in F + G$$

donc $E \subset F + G$ puis $E = F + G$.
Or $\dim F + \dim G = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(\operatorname{Id} - f) = \dim E$ donc $E = F \oplus G$ et la décomposition d'un vecteur x en la somme de $f(x) \in F$ et de $x - f(x) \in G$ est unique. Puisque f apparaît comme associant à x le vecteur de F dans sa décomposition en somme d'un vecteur de F et de G, on peut affirmer que f est la projection du F parallèlement à G.

Exercice 39 : [énoncé]
Puisque $\operatorname{Im} p \subset \ker q$, on a $q \circ p = 0$ et en développant puis en simplifiant

$$(p + q - p \circ q)^2 = p + q - p \circ q$$

On peut donc conclure que $r = p + q - p \circ q$ est un projecteur.
Montrons

$$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$

L'inclusion $\subset$ est immédiate car

$$\forall x \in E, r(x) = p(x - q(x)) + q(x)$$

Inversement, soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. On peut écrire $x = p(a) + q(b)$ avec $a, b \in E$. On a alors par le calcul

$$r(x) = r(p(a)) + r(q(b)) = p(a) + q(b) = x$$

et ainsi $x \in \operatorname{Im} r$.
Montrons aussi

$$\ker r = \ker p \cap \ker q$$

L'inclusion $\supset$ est immédiate. Inversement, pour $x \in \ker r$ on a

$$p(x) + q(x) - p \circ q(x) = 0_E$$

En appliquant q, on obtient $q(x) = 0_E$ puis on en déduit aussi $p(x) = 0_E$ et ainsi $x \in \ker p \cap \ker q$.

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Evidemment $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
Pour $x \in \ker(g \circ f)$, on a $f(x) = f(g(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \ker f$.
Pour $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors
$y = g(f(g(x)) = g(f(a)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

(b) Si $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$ alors on peut écrire $x = g(a)$ et puisque $f(x) = 0$, $a = f(g(a)) = 0$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = (x - g(f(x))) + g(f(x))$ avec $x - g(f(x)) \in \ker f$ et $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$.

(c) Si f est inversible alors $f \circ g = \operatorname{Id}$ entraîne $g = f^{-1}$.
Cette condition suffisante est aussi évidemment nécessaire.

(d) $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ et donc $g \circ f$ est un projecteur.

Exercice 41 : [énoncé]
Puisque $a \notin H$, on vérifie aisément

$$\operatorname{Vect}(a) \cap H = \{0_E\}$$

Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \ker \varphi$.
Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = (x - \lambda a) + \lambda a \text{ avec } \lambda = \varphi(x)/\varphi(a)$$

Puisque $\varphi(x - \lambda a) = 0$, on a $x - \lambda a \in H$ et puisque $\lambda a \in \operatorname{Vect}(a)$, on obtient

$$E = H + \operatorname{Vect}(a)$$

Exercice 42 : [énoncé]
Bien entendu $H \cap D = \{0\}$ mais ici aucun argument de dimension ne permet de conclure directement.
Soit φ une forme linéaire dont H est le noyau et u un vecteur non nul de D.
Il est clair que $\varphi(u) \neq 0$ et alors pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = (x - \lambda u) + \lambda u \text{ avec } \lambda = \varphi(x)/\varphi(u)$$

On a alors $x - \lambda u \in H$ car $\varphi(x - \lambda u) = 0$ et $\lambda u \in D$ donc $E = H + D$.

Exercice 43 : [énoncé]
Si $F \neq H$ alors il existe $a \in F$ tel que $a \notin H$.
On a alors

$$H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$$

et puisque $H \subset F$ et $\operatorname{Vect}(a) \subset F$, on peut conclure $E = F$

Exercice 44 : [énoncé]
Si $f = 0$: ok. Sinon, on introduit $\vec{u} \notin \ker f$ de sorte que $\operatorname{Vect} \vec{u}$ et $\ker f$ soient supplémentaires puis on introduit α de sorte que $f(\vec{u}) = \alpha g(\vec{u})$ avant de conclure via $h = f - \alpha g$ s'annule sur $\ker f$ et $\vec{u}$.

Exercice 45 : [énoncé]
Par contraposée : si e n'est pas une base de E alors $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \neq E$.
Soit H un hyperplan tel que $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \subset H$ et f une forme linéaire non nulle de noyau H.
On a $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0$ mais $f \neq 0$.

Exercice 46 : [énoncé]
Si $V = \{0\}$: ok
Sinon, soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de V.
$f(V) = f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.
Donc $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension inférieure à p. Or $V \subset f(V)$ donc $\dim f(V) \geq p$ et par suite $\dim f(V) = p$. Par inclusion et égalité des dimensions : $f(V) = V$.

Exercice 47 : [énoncé]
Par définition

$$\mathrm{rg}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = \dim \mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = \dim f(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p))$$

or f est injective donc

$$\dim f(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$$

et ainsi

$$\mathrm{rg}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$$

Exercice 48 : [énoncé]

(a) Il existe $x \notin \ker f^{p-1}$ car $f^{p-1} \neq 0$ par définition de p.
Supposons

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = \vec{0}$$

En composant par f^{p-1} la relation ci-dessus, on obtient

$$\lambda_0 f^{p-1}(x) = \vec{0}$$

car

$$f^p(x) = \ldots = f^{2p-2}(x) = \vec{0}$$

Il s'ensuit $\lambda_0 = 0$.
En composant par $f^{p-2}, \dots, f^0$ la relation initiale, on obtient successivement $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$.
La famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est donc libre.

(b) Comme cette famille est libre et composée de p vecteurs en dimension n on a $p \leq n$.
Puisque $f^p = 0$, $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

Exercice 49 : [énoncé]
On a

$$f \circ (f + g) = \mathrm{Id}$$

donc, par le théorème d'isomorphisme, $f + g$ est inversible et

$$f + g = f^{-1}$$

On en déduit $(f + g) \circ f = \mathrm{Id}$ qui donne

$$f \circ g = g \circ f$$

Exercice 50 : [énoncé]

(a) $u = (x, y, z) \in \ker f \iff x = y = z$. $u = (1, 1, 1)$ forme une base de $\ker f$.
Par le théorème du rang $\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 2$.
Soit $v = f(1, 0, 0) = (0, -1, 1)$ et $\vec{w} = f(0, 1, 0) = (1, 0, -1)$ vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im} f$.
$(v, \vec{w})$ est une famille libre formée de $2 = \dim \mathrm{Im} f$ vecteurs de $\mathrm{Im} f$, c'est donc une base de $\mathrm{Im} f$.

(b) $\ker f = \{(x, y, -2x - y, -x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 0, -2, -1)$ et $v = (0, 1, -1, -1)$.
(u, v) est une famille libre, elle forme donc une base de $\ker f$, par suite $\dim \ker f = 2$.
Par le théorème du rang : $\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 2$.
$\vec{a} = f(1, 0, 0, 0) = (2, 1, 1) \in \mathrm{Im} f$ et $\vec{b} = f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0) \in \mathrm{Im} f$.
(a, b) forme une famille libre formée de $2 = \dim \mathrm{Im} f$ vecteurs de $\mathrm{Im} f$, c'est donc une base de $\mathrm{Im} f$.

(c) $\ker f = \{z = a + i.b \mid a, b \in \mathbb{R}, a + b = 0\}$.
Soit $z_1 = 1 - i$, on observe que $\ker f = \mathrm{Vect}(z_1)$, donc (z_1) forme une base de $\ker f$ et $\dim \ker f = 1$.
Par le théorème du rang : $\mathrm{rg} f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} - \dim \ker f = 1$.
$z_2 = f(1) = 1 + i \in \mathrm{Im} f$, donc (z_2) forme une base de $\mathrm{Im} f$ car $\mathrm{rg} f = 1$.

Exercice 51 : [énoncé]

(a) Une petite analyse assure que le vecteur x ne peut appartenir au noyau de f^{p-1} car sinon la famille introduite comporterait le vecteur nul et serait donc liée.
Introduisons donc $x \notin \ker f^{p-1}$. Ceci est possible car, par hypothèse, l'application f^{p-1} n'est pas nulle.
Supposons

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0_E$$

En composant par f^{p-1} la relation ci-dessus, on obtient

$$\lambda_0 f^{p-1}(x) = 0_E$$

et donc $\lambda_0 = 0$ car $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.
En composant de même par $f^{p-2}, \ldots, f^0$ la relation initiale, on obtient successivement

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{p-1} = 0$$

La famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est donc libre.

(b) La famille précédente est composée de p vecteurs en dimension n et elle est libre donc $p \leq n$.
Par suite

$$f^n = f^{n-p} \circ f^p = \tilde{0}$$

Exercice 52 : [énoncé]
Si $\dim E = n$ alors $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ donc la famille $(I, f, f^2, \ldots, f^{n^2})$ est liée car formée de $n^2 + 1$ élément. Une relation linéaire sur les éléments de cette famille donne immédiatement un polynôme annulateur non nul.

Exercice 53 : [énoncé]

(a) Si $\ker f = \operatorname{Im} f$ alors $f^2 = 0$ et donc f est nilpotent.
Si f est nilpotent alors $\ker f \neq \{0\}$ et donc $\dim \ker f = 1$ ou 2. Or $f \neq 0$ donc il reste $\dim \ker f = 1$.
$\ker f \subset \ker f^2$ donc $\dim \ker f^2 = 1$ ou 2.
Si $\dim \ker f^2 = 1$ alors $\ker f = \ker f^2$ et classiquement (cf. noyaux itérés) $\ker f^n = \ker f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui contredit la nilpotence de f.
Il reste donc $\dim \ker f^2 = 2$ et donc $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ puis l'égalité par argument de dimension.

(b) Si $f = u \circ v$ avec u et v nilpotents et nécessairement non nuls alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u$ et $\ker v \subset \ker f$. Or ces espaces sont de dimension 1 donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u$ et $\ker f = \ker v$.
Mais $\operatorname{Im} f = \ker f$ donc $\operatorname{Im} u = \ker v$ puis $\ker u = \operatorname{Im} v$ d'où $u \circ v = 0$. C'est absurde.

Exercice 54 : [énoncé]
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Clairement $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$.
Soit $P \in \ker\varphi$. On a $\varphi(P) = (0, \ldots, 0)$ donc $P(a_0) = P(a_1) = \ldots = P(a_n) = 0$.
$\deg P \leq n$ et P admet au moins $n + 1$ racines distinctes donc $P = 0$.
$\ker\varphi = \{0\}$ donc φ est injectif. De plus $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ donc φ est un isomorphisme.

Exercice 55 : [énoncé]
φ est clairement linéaire et si $P \in \ker\varphi$ alors P a plus de racines (comptés avec multiplicité) que son degré donc $P = 0$. Ainsi φ est injective et puisque $\dim \mathbb{R}_{2n+1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n+2}$, φ est un isomorphisme.

Exercice 56 : [énoncé]
On a $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ donc

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Aussi

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f - g + g) \leq \operatorname{rg}(f - g) + \operatorname{rg}(g)$$

donc

$$\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) \leq \operatorname{rg}(f - g)$$

On conclut par symétrie sachant $\operatorname{rg}(f - g) = \operatorname{rg}(g - f)$.

Exercice 57 : [énoncé]
Le rang d'une application linéaire composée est inférieur aux rangs des applications linéaires qui la compose.
D'une part $\operatorname{rg}(f \circ g), \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)$
D'autre part $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f \circ g \circ f) \leq \operatorname{rg}(g \circ f), \operatorname{rg}(f \circ g), \operatorname{rg}(g)$ et $\operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(g \circ f \circ g) \leq \operatorname{rg}(f)$
Ces comparaisons permettent de conclure.

Exercice 58 : [énoncé]
Facilement $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ donc

$$\operatorname{rg}(f + g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Puisque $f = f + g + (-g)$,

$$\operatorname{rg}(f) \leq \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(g)$$

Aussi $\operatorname{rg}(g) \leq \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(f)$ donc

$$\left|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\right| \leq \operatorname{rg}(f + g)$$

Exercice 59 : [énoncé]

(a) Pour tout $x \in E$, on a
$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$$
donc
$$\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$$
Puisque
$$\dim (F+G) \leq \dim F + \dim G$$
on obtient
$$\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$$
De plus, on peut écrire
$$u = (u+v) + (-v)$$
donc
$$\operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg} v$$
puis
$$\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u+v)$$
Aussi
$$\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u+v)$$
et donc
$$\left|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)\right| \leq \operatorname{rg}(u+v)$$

(b) Les endomorphismes $u = v = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ conviennent.

(c) Les endomorphismes $u = v = 0$ conviennent..

Exercice 60 : [énoncé]

$(\Longrightarrow)$ Supposons $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.
Sachant $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, on a $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$ et donc $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leq 0$.
Ainsi $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$.
Sachant $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$, on a
$\dim \ker f + \dim \ker g - \dim(\ker f + \ker g) \leq \dim \ker(f+g)$.
Par la formule du rang, on obtient alors $\dim E + \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g + \dim(\ker f + \ker g)$ et donc $\dim(\ker f + \ker g) \geq \dim E$. Ainsi $\ker f + \ker g = E$
$(\Longleftarrow)$ Supposons $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $\ker f + \ker g = E$.
Montrons $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
On sait déjà $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Inversement, soit $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Il existe $a, b \in E$ tels que $x = f(a) + g(b)$.
Puisque $E = \ker f + \ker g$, on peut écrire $a = u + v$ avec $u \in \ker f$ et $v \in \ker g$. On a alors $f(a) = f(v)$.
De même, on peut écrire $g(b) = g(w)$ avec $w \in \ker f$.
On a alors $x = f(v) + g(w) = (f+g)(v+w)$ car $f(w) = 0$ et $g(v) = 0$. Ainsi $x \in \operatorname{Im}(f+g)$.
Finalement $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Par suite $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \operatorname{rg} f$.
$\operatorname{Im}(f \circ g) = f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f_{\restriction \operatorname{Im} g}$.
Puisque la dimension d'une image est toujours inférieure à la dimension de l'espace de départ $\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \dim \operatorname{Im} g = \operatorname{rg} g$.

(b) $\operatorname{rg}(f \circ g) = \dim f(\operatorname{Im} g)$.
Par le théorème du rang appliqué à l'application linéaire $f_{\restriction \operatorname{Im} g}$,
$\dim f(\operatorname{Im} g) + \dim \ker f_{\restriction \operatorname{Im} g} = \dim \operatorname{Im} g$ donc $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg} g - \dim \ker f_{\restriction \operatorname{Im} g}$.
Or $\ker f_{\restriction \operatorname{Im} g} \subset \ker f$ donc $\dim \ker f_{\restriction \operatorname{Im} g} \leq \dim E - \operatorname{rg} f$ puis
$\operatorname{rg}(f \circ g) \geq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim E$.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) Commençons par observer $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
$(\Longleftarrow)$ Supposons $E = \operatorname{Im} f + \ker g$.
Soit $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Im} f$ et $b \in \ker g$.
On a alors $y = g(x) = g(a) + g(b) = g(a) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ car $a \in \operatorname{Im} f$.
Ainsi $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$ et donc $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$. Par suite $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.
$(\Longrightarrow)$ Supposons $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$.
Soit $x \in E$ et $y = g(x)$. Puisque $y \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$, il existe $a \in E$ tel que $y = (g \circ f)(a)$. Posons alors $b = x - f(a)$. On a $x = f(a) + b$, $f(a) \in \operatorname{Im} f$ et $b \in \ker g$ car $g(b) = g(x) - g(f(a)) = y - (g \circ f)(a) = 0$.
Ainsi $E \subset \operatorname{Im} f + \ker g$ puis $E = \operatorname{Im} f + \ker g$.

(b) $(\Longleftarrow)$ Supposons $\operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Im} f$ avec $p = \operatorname{rg} f$.
On a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ donc $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_p))$.
Supposons $\lambda_1 g(e_1) + \cdots + \lambda_p g(e_p) = 0$.
On a $g(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda e_p) = 0$ donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda e_p \in \ker g$. Or $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda e_p \in \operatorname{Im} f$ donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda e_p = 0$ puisque $\operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$.
Puisque la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.

Ainsi la famille $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est libre et c'est donc une base de $\operatorname{Im}(g \circ f)$.
On en déduit $\operatorname{rg}(g \circ f) = p = \operatorname{rg} f$.
$(\Longrightarrow)$ Par contraposée, supposons $\operatorname{Im} f \cap \ker g \neq \{0\}$.
Soit $e_1 \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$ un vecteur non nul.
La famille (e_1) est libre, on peut donc la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\operatorname{Im} f$.
On a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ donc $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_p))$.
Or $g(e_1) = 0$ donc $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Vect}(g(e_2), \dots, g(e_p))$ puis $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq p - 1 < p$.
Ainsi $\operatorname{rg}(g \circ f) \neq \operatorname{rg} f$.

Exercice 63 : [énoncé]
(i) $\Longrightarrow$ (ii) : ok
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons $E = \operatorname{Im} f + \ker f$.
L'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ est vraie indépendamment de l'hypothèse.
$\forall y \in \operatorname{Im} f, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \ker f$.
Puisque $u \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $u = f(a)$ avec $a \in E$. On a alors
$y = f(f(a) + v) = f^2(a) + f(v) = f^2(a) \in \operatorname{Im} f^2$. Ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ puis l'égalité.
(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Supposons $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
Par le théorème du rang : $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \ker f = \operatorname{rg} f^2 + \dim \ker f^2$ donc
$\dim \ker f = \dim \ker f^2$.
De plus l'inclusion $\ker f \subset \ker f^2$ est toujours vraie.
Par inclusion et égalité des dimensions : $\ker f = \ker f^2$.
(iv) $\Longrightarrow$ (i) Supposons $\ker f = \ker f^2$.
Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$. On peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in E$. Or $f(y) = 0$ donc $f^2(x) = 0$.
Ainsi $x \in \ker f^2 = \ker f$ et par suite $y = f(x) = 0$. Finalement $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.
De plus, par le théorème du rang $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ donc $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 64 : [énoncé]
$g \circ f = \tilde{0}$ donne $\operatorname{Im} f \subset \ker g$ donc $\operatorname{rg}(f) \leq \dim \ker g = \dim E - \operatorname{rg}(g)$. Par suite
$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq \dim E$.
$f + g$ bijectif donne $\operatorname{Im} f + g = E$. Or $\operatorname{Im} f + g \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ d'où $\dim E \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

Exercice 65 : [énoncé]
$(\Longrightarrow)$ Si $\ker f = \operatorname{Im} f$ alors $f^2 = 0$ car $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
De plus, par le théorème du rang : $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \ker f = 2 \operatorname{rg} f$ car
$\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$.
$(\Longleftarrow)$ Si $f^2 = 0$ et $n = 2 \operatorname{rg}(f)$ alors d'une part $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ et d'autre part, par le théorème du rang :
$2 \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f + \dim \ker f$ donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f$. Par inclusion et égalité des dimensions $\operatorname{Im} f = \ker f$.

Exercice 66 : [énoncé]
Puisque $u^3 = \tilde{0}$, on a $\operatorname{Im} u^2 \subset \ker u$ et donc

$$\operatorname{rg} u^2 \leq \dim \ker u$$

Or par la formule du rang

$$\operatorname{rg} u + \dim \ker u = \dim E$$

donc

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u^2 \leq \dim E$$

Exercice 67 : [énoncé]
On a

$$f = f \circ \mathrm{Id}_E = f^2 + f \circ g$$

Montrons $f \circ g = \tilde{0}$ en observant $\operatorname{Im} g \subset \ker f$.
Pour cela montrons $\operatorname{Im} g = \ker f$ en observant

$$\operatorname{rg} g = \dim \ker f \text{ et } \ker f \subset \operatorname{Im} g$$

Puisque $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$ et puisque par la formule du rang, $\operatorname{rg} f + \dim \ker f = \dim E$, on peut affirmer $\operatorname{rg} g = \dim \ker f$.
D'autre part, pour $x \in \ker f$, on a $x = f(x) + g(x) = g(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} g$. Ainsi $\ker f \subset \operatorname{Im} g$.
Par inclusion et égalité des dimension $\ker f = \operatorname{Im} g$ puis $f \circ g = \tilde{0}$ donc $f^2 = f$.
Ainsi, f est un projecteur et $g = \mathrm{Id}_E - f$ est son projecteur complémentaire.

Exercice 68 : [énoncé]
On a

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$$

donc $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \geq n$ puis $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$
Si $x \in \ker u$ alors $x = u(x) + v(x) = v(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} v$. Par les dimensions, on conclut $\ker u = \operatorname{Im} v$ et de même $\ker v = \operatorname{Im} u$. Par suite $u \circ v = v \circ u = 0$ et donc aisément $u^2 = u$ et $v^2 = v$.

Exercice 69 : [énoncé]

(a) $\forall \vec{y} \in \operatorname{Im} f^{p+1}, \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = f^{p+1}(\vec{x}) = f^p(f(\vec{x})) \in \operatorname{Im} f^p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.
$\forall \vec{x} \in \ker f^p$, on a $f^p(\vec{x}) = \vec{o}$ donc $f^{p+1}(\vec{x}) = f(\vec{o}) = \vec{o}$ puis $\vec{x} \in \ker f^{p+1}$. Ainsi $N_p \subset N_{p+1}$.

(b) La suite $\dim I_p$ est une suite décroissante d'entiers naturels donc il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\dim I_s = \dim I_{s+1}$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a alors $I_s = I_{s+1}$.
De plus, par le théorème du rang :
$\dim N_s = \dim E - \dim I_s = \dim E - \dim I_{s+1} = \dim N_{s+1}$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on a alors $N_s = N_{s+1}$.

(c) Montrons par récurrence sur $s \geq r$ que $I_s = I_r$.
La propriété est vraie au rang r.
Supposons la propriété vraie au rang s.
On sait déjà que $I_{s+1} \subset I_s$.
$\forall \vec{y} \in I_s, \exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = f^s(\vec{x}) = f^{s-r}(f^r(\vec{x}))$.
Or $f^r(\vec{x}) \in I_r = I_{r+1}$ donc $\exists \vec{u} \in E$ tel que $f^r(\vec{x}) = f^{r+1}(\vec{u})$ et alors $\vec{y} = f^{s+1}(\vec{u}) \in I_{s+1}$.
Ainsi $I_{s+1} = I_s$ puis, par hypothèse de récurrence : $I_{s+1} = I_r$.
Par le théorème du rang : $\dim N_r + \dim I_r = \dim E = \dim N_s + \dim I_s$ donc par inclusion et égalité des dimensions : $\forall s \geq r, N_s = N_r$.

(d) Soit $\vec{x} \in I_r \cap N_r$. Il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{x} = f^r(\vec{u})$ et on a $f^r(\vec{x}) = \vec{o}$.
Par suite $\vec{u} \in N_{2r}$, or $N_{2r} = N_r$ donc $\vec{x} = f^r(\vec{u}) = \vec{o}$. Par suite $I_r \cap N_r = \{\vec{o}\}$.
De plus, par le théorème du rang : $\dim I_r + \dim N_r = \dim E$ donc I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 70 : [énoncé]

(a) Pour tout $y \in \operatorname{Im} f^{p+1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{p+1}(x) = f^p(f(x)) \in \operatorname{Im} f^p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.
Pour tout $x \in \ker f^p$, on a $f^p(x) = 0$ donc $f^{p+1}(x) = f(0) = 0$ puis $x \in \ker f^{p+1}$. Ainsi $N_p \subset N_{p+1}$.
La suite $(\dim I_p)$ est une suite décroissante d'entiers naturels donc il existe un rang $s \in \mathbb{N}$ à partir duquel cette suite est stationnaire. De plus, par le théorème du rang les suites $(\dim I_p)$ et $(\dim N_p)$ sont simultanément stationnaires. Par inclusion et égalité des dimensions, les suites (I_p) et (N_p) sont simultanément stationnaires.

(b) Soit $x \in I_r \cap N_r$. Il existe $u \in E$ tel que $x = f^r(u)$ et on a $f^r(x) = 0$.
Par suite $u \in N_{2r}$, or $N_{2r} = N_r$ donc $x = f^r(u) = 0$. Par suite $I_r \cap N_r = \{0\}$. De plus, par le théorème du rang : $\dim I_r + \dim N_r = \dim E$ donc I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Si $\vec{x} \in \ker h$ alors $\vec{x} \in \ker g \circ f$ et si $\vec{x} \in \ker f$ alors $\vec{x} \in \ker g \circ f$ donc $\ker h + \ker f \subset \ker g \circ f$.
Inversement, soit $\vec{x} \in \ker g \circ f$. On peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in H$ et $\vec{v} \in \ker f$.
$(g \circ f)(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $h(\vec{u}) = (g \circ f)(\vec{u}) = \vec{0}$ d'où $\vec{x} \in \ker h + \ker f$.

(b) f réalise une bijection de H vers $\operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{rg}(h) = \operatorname{rg}(g|_{\operatorname{Im} f}$
$\operatorname{rg}(g|_{\operatorname{Im} f}) + \dim \ker g|_{\operatorname{Im} f} = \dim \operatorname{Im} f$ donc

$$\operatorname{rg}(h) = \operatorname{rg}(f) - \dim \ker g|_{\operatorname{Im} f} \geq \operatorname{rg}(f) - \dim \ker g.$$

(c) $\dim \ker g \circ f \leq \dim \ker h + \dim \ker f$.

$$\dim \ker h = \dim H - \operatorname{rg}(h) \leq \operatorname{rg}(f) - (\operatorname{rg} f - \dim \ker g) \leq \dim \ker g$$

puis l'inégalité voulue.

Exercice 72 : [énoncé]

Pour φ, ψ applications linéaires composables

$$\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \dim \operatorname{Im} \psi_{\restriction \operatorname{Im} \varphi} = \operatorname{rg} \varphi - \dim (\operatorname{Im} \varphi \cap \ker \psi)$$

Ainsi

$$\operatorname{rg}(h \circ g \circ f) = \operatorname{rg}(g \circ f) - \dim (\operatorname{Im}(g \circ f) \cap \ker h)$$

et

$$\operatorname{rg}(h \circ g) = \operatorname{rg} g - \dim (\operatorname{Im} g \cap \ker h)$$

Puisque

$$\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$$

on a

$$\dim (\operatorname{Im}(g \circ f) \cap \ker h) \leq \dim (\operatorname{Im} g \cap \ker h)$$

ce qui fournit l'inégalité demandée.

Exercice 73 : [énoncé]

La deuxième inégalité est bien connue et provient de $\operatorname{Im}(u \circ v) \subset \operatorname{Im} u$ qui donne $\operatorname{rg}(u \circ v) \leq \operatorname{rg} u$ et de $\operatorname{Im}(u \circ v) = u(v(E)) = \operatorname{Im} u_{\restriction v(E)}$ qui donne $\operatorname{rg}(u) \leq \operatorname{rg} v$ car le rang d'une application linéaire est inférieure à la dimension de l'espace de départ.
Montrons maintenant la première inégalité.
Comme déjà écrit $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u_{\restriction v(E)}$ donc par la formule du rang

$$\operatorname{rg}(u \circ v) = \dim v(E) - \dim \ker u_{\restriction v(E)}$$

Or $\ker u_{\restriction v(E)} \subset \ker u$ donc

$$\operatorname{rg}(u \circ v) \geq \operatorname{rg} v - \dim \ker u = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim F$$

Exercice 74 : [énoncé]
Par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(g\circ f)) = \dim E - \operatorname{rg}(g\circ f)$$

Or

$$\operatorname{rg}(g\circ f) = \dim g(f(E)) = \operatorname{rg} g_{\restriction f(E)}$$

Par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg} g_{\restriction f(E)} = \dim f(E) - \dim\left(\ker g_{\restriction f(E)}\right)$$

Or $\ker g_{\restriction f(E)} \subset \ker g$ donc

$$\operatorname{rg}\left(g_{\restriction f(E)}\right) \geq \dim f(E) - \dim(\ker g)$$

Enfin, par le théorème du rang,

$$\dim f(E) = \operatorname{rg} f = \dim E - \dim(\ker f)$$

Au final,

$$\dim(\ker(g\circ f)) \leq \dim(\ker f) + \dim(\ker g)$$

Exercice 75 : [énoncé]
Considérons $f_{\restriction F}$ restriction de f au départ de F et à l'arrivée dans E.
$\ker f_{\restriction F} = \ker f \cap F$ et $\operatorname{rg} f_{\restriction F} \leq \operatorname{rg} f$. L'application du théorème du rang $f_{\restriction F}$ permet alors de conclure.

Exercice 76 : [énoncé]
La formule du rang du rang donne

$$\dim E_k = \dim \operatorname{Im} u_k + \dim\ker u_k$$

donc, sachant $\dim\operatorname{Im} u_k = \dim\ker u_{k+1}$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \dim E_k = \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\dim\ker u_k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\dim\ker u_k = -\dim\ker u_1 = 0$$

car $\operatorname{Im} u_n = \{0\}$ et $\ker u_1 = \operatorname{Im} u_0 = \{0\}$.

Exercice 77 : [énoncé]
Soient $k,\ell\in\mathbb{N}$. Considérons le sous-espace vectoriel

$$F = \ker u^{k+\ell}$$

et introduisons l'application linéaire restreinte $v\colon F\to E$ définie par

$$\forall x\in F, v(x) = u^\ell(x)$$

On vérifie aisément

$$\ker v\subset\ker u^\ell \text{ et } \operatorname{Im} v\subset\ker u^k$$

La formule du rang appliquée à v donne

$$\dim\left(\ker u^{k+\ell}\right) = \operatorname{rg} v + \dim\ker v$$

ce qui donne

$$\dim\left(\ker u^{k+\ell}\right) \leq \dim\left(\ker u^k\right) + \dim\left(\ker u^\ell\right)$$

Exercice 78 : [énoncé]

(a) $\ker h\subset\ker f$ donc $\dim\ker h\leq\dim\ker f$.
En appliquant la formule du rang à f et à h on obtient

$$\dim\ker f = n - \operatorname{rg} f \text{ et } \dim\ker h = \operatorname{rg} g - \operatorname{rg} h$$

On en déduit

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leq \operatorname{rg} h$$

Or $\operatorname{Im}(f\circ g) = \operatorname{Im} h$ donc $\operatorname{rg}(f\circ g) = \operatorname{rg} h$ et on peut conclure.

(b) Un endomorphisme f vérifie $f^2 = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f\subset\ker f$ ce qui entraîne, en dimension 3, $\operatorname{rg} f = 1$.
Si l'endomorphisme f n'est pas nul, en choisissant $x\in E$ tel que $x\notin\ker f$ et en complétant le vecteur $f(x)\in\ker f$, en une base $(f(x),y)$ de $\ker f$, on obtient que la matrice de f dans la base $(x,f(x),y)$ est

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Inversement, un endomorphisme f représenté par une telle matrice vérifie $f^2 = 0$.

Exercice 79 : [énoncé]

(a) $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f) \implies \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$ car on sait $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.
Par le théorème du rang $\ker f^2 = \ker f$ car on sait $\ker f \subset \ker f^2$.

(b) Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$.
On peut écrire $x = f(a)$. Comme $f(x) = 0$, on a $a \in \ker f^2 = \ker f$ donc $x = 0$.
Par le théorème du rang, on conclut.

Exercice 80 : [énoncé]

(a) $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f) \implies \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$ car on sait $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.
Par le théorème du rang $\ker f^2 = \ker f$ car on sait $\ker f \subset \ker f^2$.

(b) Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$.
On peut écrire $x = f(a)$. Comme $f(x) = 0$, on a $a \in \ker f^2 = \ker f$ donc $x = 0$.
Par le théorème du rang, on conclut.

Exercice 81 : [énoncé]
On a

$$\dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v) = \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v) = \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim E$$

et

$$\dim(\ker u \cap \ker v) = \dim\ker u + \dim\ker v - \dim(\ker u + \ker v) = \dim\ker u + \dim\ker v - \dim E$$

donc en sommant

$$\dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v) + \dim(\ker u \cap \ker v) = 0$$

car en vertu du théorème du rang

$$\dim E = \mathrm{rg}\, u + \dim\ker u = \mathrm{rg}\, v + \dim\ker v$$

Par suite

$$\dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v) = \dim(\ker u \cap \ker v) = 0$$

et donc

$$\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \ker u \cap \ker v = \{0_E\}$$

Les espaces $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont supplémentaires dans E. De même pour $\ker u$ et $\ker v$.

Exercice 82 : [énoncé]
D'une part

$$\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - \dim \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \dim E$$

et d'autre part

$$\dim\ker f + \dim\ker g - \dim\ker f \cap \ker g = \dim E$$

En sommant et en exploitant la formule du rang

$$\dim \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g + \dim\ker f \cap \ker g \le 0$$

donc $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \ker f \cap \ker g = \{0\}$.

Exercice 83 : [énoncé]
Soit $x \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
On a $f(x) = x$ et on peut écrire $x = (f - \mathrm{Id}_E)(a) = f(a) - a$.
$f(x) = f^2(a) - f(a)$, $f^2(x) = f^3(a) - f^2(a) = a - f^2(a)$ puis $x + f(x) + f^2(x) = 0$.
Or $x + f(x) + f^2(x) = 3x$ donc $x = 0$.
Soit $x \in E$.
Analyse : Supposons $x = u + v$ avec $u \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $v \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
On peut écrire $v = f(a) - a$.
Ainsi $x = u + f(a) - a$, $f(x) = u + f^2(a) - f(a)$, $f^2(x) = u + a - f^2(a)$.
Donc $u = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$.
Synthèse : Posons $u = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$ et $v = x - u$.
On a $f(u) = u$ car $f^3(x) = x$ et

$$v = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}f^2(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}f^2(x) + \frac{1}{3}f^3(x)$$

donc

$$v = (f - \mathrm{Id}_E)\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}f^2(x)\right) \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$$

Finalement $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = E$.

Exercice 84 : [énoncé]

(a) Si $x \in \ker f$ alors $g(x) = (f \circ g \circ f)(x) = 0$ donc $x \in \ker g$. Par symétrie

$$\ker f = \ker g.$$

Si $y \in \mathrm{Im}\, f$ alors il existe $a \in E$ tel que $y = f(a) = (g \circ f \circ g)(a)$ donc $y \in \mathrm{Im}\, g$. Par symétrie

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$$

(b) Soit $x \in F \cap G$. Il existe $a \in E$ tel que $x = g(a)$ or

$$f(a) = (g \circ f \circ g)(a) = (g \circ f)(x) = g(0) = 0$$

Ainsi $a \in \ker f = \ker g$ d'où $x = g(a) = 0$.
Soit $x \in E$.
Analyse :
Supposons $x = u + v$ avec $u \in F = \ker f$ et $v = g(a) \in G = \operatorname{Im} g$.
On a

$$f(x) = (f \circ g)(a)$$

donc

$$(g \circ f)(x) = f(a)$$

Synthèse :
Puisque $(g \circ f)(x) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$, il existe $a \in E$ tel que

$$(g \circ f)(x) = f(a)$$

Posons alors $v = g(a)$ et $u = x - v$. On a immédiatement $v \in \operatorname{Im} g$ et $x = u + v$.
On a aussi $u \in \ker f$ car

$$f(u) = f(x) - f(v) \in \operatorname{Im} f$$

et

$$g(f(u)) = (g \circ f)(x) - (g \circ f \circ g)(a) = (g \circ f)(x) - f(a) = 0$$

Ainsi

$$f(u) \in \ker g \cap \operatorname{Im} f$$

puis

$$f(u) = 0$$

Exercice 85 : [énoncé]
Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$. On peut écrire $x = g(a)$ avec $a \in E$.
On a alors

$$f(g(a)) = 0$$

puis

$$x = g(a) = (g \circ f \circ g)(a) = g(0) = 0$$

Soit $x \in E$. On peut écrire $x = a + b$ avec

$$a = x - g(f(x)) \text{ et } b = g(f(x))$$

On vérifie immédiatement $b \in \operatorname{Im} g$ et on obtient $a \in \ker f$ par

$$f(a) = f(x) - f(g(f(x)) = 0$$

Exercice 86 : [énoncé]

(a) Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$.
Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc

$$x = f(a) = (f \circ g \circ f)(a) = (f \circ g)(x) = 0$$

Soit $x \in E$.
Analyse :
Supposons $x = u + v$ avec $u = f(a) \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \ker g$.
$g(x) = g \circ f(a)$ donc $(f \circ g)(x) = f(a) = u$.
Synthèse :
Posons $u = (f \circ g)(x)$ et $v = x - u$.
On a $u \in \operatorname{Im} f$, $x = u + v$ et $g(v) = g(x) - g(u) = 0$ i.e. $v \in \ker g$.

(b) On a $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$ et $\forall y \in \operatorname{Im} f$ on peut écrire $y = f(x)$ avec $x = g(a) + u$ et $u \in \ker f$.
On a alors $y = f(g(a)) \in f(\operatorname{Im} g)$.

Exercice 87 : [énoncé]

(a) $f_i = f_i \circ \mathrm{Id}_E = f_i \circ \sum_{j=1}^n f_j = f_i \circ f_i$ donc f_i est une projection vectorielle.

(b) Supposons $\sum_{i=1}^n x_i = 0_E$ avec $x_i \in \operatorname{Im} f_i$.
En appliquant f_i, on obtient $f_i(x_i) = x_i = 0_E$ car $f_i(x_j) = 0_E$.
Les espaces $\operatorname{Im} f_i$ sont donc en somme directe.
Soit $x \in E$, on peut écrire

$$x = \mathrm{Id}_E(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \in \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} f_i$$

On peut alors conclure

$$\bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Im} f_i = E$$

Exercice 88 : [énoncé]
Puisque $p_1 + \cdots + p_m = \mathrm{Id}_E$, on a pour tout $x \in E$,

$$x = p_1(x) + \cdots + p_m(x) \in \sum_{k=1}^m F_k$$

Ainsi

$$E \subset \sum_{k=1}^m F_k$$

De plus

$$\dim E = \operatorname{tr} \mathrm{Id}_E = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{tr} p_k$$

Or les p_k sont des projecteurs, donc $\operatorname{tr} p_k = \operatorname{rg} p_k = \dim F_k$.
Ainsi

$$\dim E = \sum_{k=1}^{m} \dim F_k$$

On peut alors conclure $E = \sum_{k=1}^{m} F_k$ puis $E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$.

Exercice 89 : [énoncé]
Supposons que w est un isomorphisme.
Puisque l'application $w = v \circ u$ est injective, l'application u est injective.
Puisque l'application $w = v \circ u$ est surjective, l'application v est surjective.
Soit $y \in \operatorname{Im} u \cap \ker v$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et on a $v(y) = 0$ donc $w(x) = 0$. Or $\ker w = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$ puis $y = 0_F$. Ainsi

$$\operatorname{Im} u \cap \ker v = \{0_F\}$$

Soit $y \in F$, $v(y) \in G$ et donc il existe $x \in E$ tel que $w(x) = v(y)$.
Posons alors $a = u(x)$ et $b = y - a$.
On a immédiatement $y = a + b$ et $a \in \operatorname{Im} u$.
De plus $v(b) = v(y) - v(a) = v(y) - w(x) = 0$ donc $b \in \ker v$.
Ainsi

$$\operatorname{Im} u \oplus \ker v = F$$

Inversement, supposons u injective, v surjective et $\operatorname{Im} u$ et $\ker v$ supplémentaires dans F.
Soit $x \in \ker w$. On a $v(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \ker v$. Or $u(x) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(x) = 0_F$ car $\operatorname{Im} u \cap \ker v = \{0_F\}$. Puisque u est injective, $x = 0_E$ et ainsi $\ker w = \{0_E\}$.
Soit $z \in G$. Il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$ car v est surjective. On peut écrire $y = u(a) + b$ avec $a \in E$ et $b \in \ker v$ car $\operatorname{Im} u + \ker v = F$. On a alors $z = v(u(a)) = w(a)$ et donc $\operatorname{Im} w = G$.
Finalement G est un isomorphisme.

Exercice 90 : [énoncé]
Si un tel endomorphisme f existe alors

$$\dim E = \operatorname{rg}(f) + \dim \ker f = 2 \operatorname{rg}(f)$$

donc n est pair.
Inversement si n est pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$
Si $p = 0$, l'endomorphisme nul convient.
Si $p > 0$, soit $e = (e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f(e_1) = 0_E, \dots, f(e_p) = 0_E, f(e_{p+1}) = e_1, \dots, f(e_{2p}) = e_p$$

Pour cet endomorphisme, il est clair que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker f$.
Par suite $\dim \operatorname{Im} f, \dim \ker f \geq p$ et par le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} f, \dim \ker f = p$.
Par inclusion et égalité des dimensions

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \ker f$$

Exercice 91 : [énoncé]
Posons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.
Il est immédiat d'observer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.
Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image des vecteurs d'une base, par suite f existe et est unique.
$(x, y, z) = (x - y)e_1 + (y - z)e_2 + ze_3$ donc
$f(x, y, z) = (x - y)f(e_1) + (y - z)f(e_2) + zf(e_3) = (y, x - y + z)$.
$\ker f = \operatorname{Vect} u$ avec $u = (1, 0, -1)$.
Par le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercice 92 : [énoncé]

(a) $C \subset \mathcal{L}(E)$, $0 \in C$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $g, h \in C$. On a

$$f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) = \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = (\lambda g + \mu h) \circ f$$

donc $\lambda g + \mu h \in C$.

(b) Soit $g = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
On a $g \circ f = a_0 f + a_1 f^2 + \dots + a_{n-1} f^n = f \circ g$ donc $g \in C$.
Ainsi

$$\left\{a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\} \subset C$$

Inversement, soit $g \in C$.
Puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que : $g(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$. Introduisons $h = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
$g, h \in C$ et $g(x_0) = h(x_0)$ donc

$$g(f(x_0)) = f(g(x_0)) = f(h(x_0)) = h(f(x_0))$$

et de manière plus générale

$$g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0)) = f^k(h(x_0)) = h(f^k(x_0))$$

Ainsi g et h prennent mêmes valeurs sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ donc $g = h$. Ainsi

$$C \subset \left\{a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \operatorname{Id}_E \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}$$

puis l'égalité.

(c) On a $C = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.
De plus si $a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1}f^{n-1} = 0$ alors en évaluant en x_0

$$a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0) = 0$$

or la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.
La famille $(\operatorname{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre et génératrice de C, c'est donc une base de C.
Par suite $\dim C = n$.

Exercice 93 : [énoncé]

(a) $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$, $\tilde{0} \in C(f)$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $g, h \in C(f)$. On a

$$f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) = \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = (\lambda g + \mu h) \circ f$$

donc $\lambda g + \mu h \in C(f)$.

(b) Supposons

$$\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \cdots + \lambda_{n-1}f^{n-1}(a) = 0_E$$

En appliquant f^{n-1} à cette relation, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(a) = 0_E$ et donc $\lambda_0 = 0$ car $f^{n-1}(a) \neq 0_E$.
En répétant l'opération, on obtient successivement la nullité de chaque λ_k.
La famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est alors libre puis base de E car constituée de $n = \dim E$ vecteurs de E.

(c) L'application φ_a est linéaire car

$$\varphi_a(\lambda f + \mu g) = \lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda\varphi_a(f) + \mu\varphi_a(g)$$

Si $\varphi_a(g) = 0_E$ alors $g(a) = 0_E$ puis $g(f(a)) = f(g(a)) = 0_E$, etc. L'application g est alors nulle sur une base et c'est donc l'application nulle. Ainsi φ_a est injective.
Soit $b \in E$. Considérons l'application linéaire g définie par

$$g(a) = b, g(f(a)) = f(b), \dots, g(f^{(n-1)}(a)) = f^{(n-1)}(b)$$

L'application linéaire g est entièrement définie par l'image d'une base et l'on vérifie $g \circ f = f \circ g$ sur chaque vecteur de cette base. Ainsi $g \in C(f)$ et l'on vérifie $\varphi_a(g) = b$. Ainsi φ_a est surjective.

(d) Par l'isomorphisme $\dim C(f) = n$.
Il est immédiat de vérifier $\operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \dots, f^{n-1}) \subset C(f)$ ainsi que la liberté de la famille $(\operatorname{Id}, f, \dots, f^{n-1})$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut $C(f) = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \dots, f^{n-1})$.

Exercice 94 : [énoncé]

Par le théorème du rang, la condition $\dim F + \dim G = \dim E$ est nécessaire.
Montrons qu'elle est aussi suffisante.
Soit H un supplémentaire de G dans E. On a $\dim H = \dim F = p$
Soient $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E telle que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ soit base de H et $(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ base de G.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F.
Une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base.
Soit $u : E \to E$ l'application linéaire définie par

$$\forall 1 \le i \le p, u(\varepsilon_i) = e_i \text{ et } \forall p+1 \le i \le n, u(\varepsilon_i) = 0$$

Par construction, il est clair que $F \subset \operatorname{Im} u$ et $G \subset \ker u$.
Par le théorème du rang et la relation $\dim F + \dim G = \dim E$, on obtient $\dim F = \operatorname{rg} u$ et $\dim G = \dim \ker u$. Par inclusions et égalités des dimensions :

$$F = \operatorname{Im} u \text{ et } G = \ker u$$

Exercice 95 : [énoncé]

Puisque $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^6$, on a $3 \le \operatorname{rg} f \le 6$.
Si $\operatorname{rg} f = 6$ alors f est un isomorphisme, donc f^2 aussi et $\operatorname{rg} f^2 = 6$. Contradiction.
Si $\operatorname{rg} f = 5$ alors $\dim \ker f = 1$. Considérons $g = f_{|\operatorname{Im} f}$. Par le théorème du rang $\dim \ker g = 5 - \operatorname{rg} g$. Or $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f^2$ donc $\operatorname{rg} g \le 3$ et par suite $\dim \ker g \ge 2$. Or $\ker g \subset \ker f$ donc $\dim \ker f \ge 2$. Contradiction.
$\operatorname{rg} f = 3$ et $\operatorname{rg} f = 4$ sont possibles en considérant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 96 : [énoncé]
$\ker\varphi$ est un hyperplan de E et $\operatorname{Vect} u$ une droite car $u \neq 0_E$ puisque $u \notin \ker\varphi$.
$\ker\varphi + \operatorname{Vect}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\ker\varphi$, donc de dimension $n-1$ ou n.
Si $\dim\ker\varphi + \operatorname{Vect}(u) = n-1$ alors par inclusion et égalité des dimensions

$$\ker\varphi + \operatorname{Vect}(u) = \ker\varphi$$

Or $u \in \ker\varphi + \operatorname{Vect}(u)$ et $u \notin \ker\varphi$. Ce cas est donc exclu.
Il reste $\dim\ker\varphi + \operatorname{Vect}(u) = n$ *i.e.*

$$\ker\varphi + \operatorname{Vect}(u) = E$$

Comme de plus

$$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Vect}(u) = n-1+1 = n = \dim E$$

on peut affirmer que la somme est directe et donc $\ker\varphi$ et $\operatorname{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 97 : [énoncé]
Soit φ une forme linéaire ne s'annulant pas sur x. Celle-ci n'est pas combinaison linéaire de la famille $(f_1, \dots, f_n)$. Cette famille n'est donc pas génératrice et par suite elle est liée car formée de $n = \dim E^*$ éléments de E^*.

Exercice 98 : [énoncé]
Si $f = 0$ la propriété est immédiate.
Sinon $f^2 = 0$ donne $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ et en vertu du théorème du rang, $\dim\operatorname{Im} f = 1$.
Soit a un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Im} f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha.a$. Posons $\varphi(x) = \alpha$ ce qui définit $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Les identités

$$f(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y)a$$

et

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = (\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y))a$$

avec $a \neq 0_E$ donnent la linéarité

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$$

L'application φ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 99 : [énoncé]
Posons $\varphi_k\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\varphi_k(P) = P(a_k)$$

Supposons

$$\lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\lambda_0 P(a_0) + \cdots + \lambda_n P(a_n) = 0$$

Considérons le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$L_k = \prod_{j\neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$$

défini de sorte que

$$L_k \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } L_k(a_j) = \delta_{j,k}$$

En prenant $P = L_k$, on obtient $\lambda_k = 0$.
La famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est libre et puisque formée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])^*$ éléments de $(\mathbb{R}_n[X])^*$, c'est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
Puisque

$$\varphi\colon P \mapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, on peut affirmer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique vérifiant

$$\varphi = \lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_n\varphi_n$$

Exercice 100 : [énoncé]
Il est clair que les application F_j sont éléments de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ espace de dimension $n+1$.
Pour conclure, il suffit d'observer la liberté de la famille $(F_0, \dots, F_n)$.
Supposons $\lambda_0 F_0 + \cdots + \lambda_n F_n = 0$.
En appliquant cette égalité aux polynômes $1, 2X, \dots, (n+1)X^n$ on obtient les équations formant le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n = 0 \\ \lambda_0 a_0^2 + \cdots + \lambda_n a_n^2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_0 a_0^{n+1} + \cdots + \lambda_n a_n^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Par un déterminant de Vandermonde, ce système est de Cramer ce qui entraîne

$$\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$$

La famille est alors libre et constituée du bon nombre de vecteurs pour former une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Exercice 101 : [énoncé]
Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$.
Le vecteur $x - y$ est non nul, il peut donc être complété pour former une base de E. La forme linéaire correspondant à la première application composante dans cette base est alors solution du problème posé.

Exercice 102 : [énoncé]
Si $\ker f = \ker g$ alors le résultat est immédiat.
Sinon, pour des raisons de dimension, $\ker f \not\subset \ker g$ et $\ker g \not\subset \ker f$.
La somme d'un vecteur de $\ker f$ qui ne soit pas dans $\ker g$ et d'un vecteur de $\ker g$ qui ne soit pas dans $\ker f$ est solution.

Exercice 103 : [énoncé]
Soit φ une forme linéaire ne s'annulant pas sur x. Celle-ci n'est pas combinaison linéaire des $(f_1, \ldots, f_n)$.
Cette famille n'est donc pas génératrice et par suite elle est liée car formée de $n = \dim E^*$ éléments de E^*.

Exercice 104 : [énoncé]
Pour $f \in E^*$ et $g \in F^*$, posons $f \otimes g$ l'application définie sur $E \times F$ par $(f \otimes g)(x, y) = f(x) + g(y)$. Il est facile d'observer $f \otimes g \in (E \times F)^*$. Considérons $\varphi : E^* \times F^* \to (E \times F)^*$ définie par $\varphi(f, g) = f \otimes g$.
L'application φ est linéaire.
Si $\varphi(f, g) = 0$ alors pour tout $(x, y) \in E \times F$, $f(x) + g(y) = 0$.
Pour $y = 0$, on peut affirmer $f = 0$ et pour $x = 0$, on affirme $g = 0$. Ainsi $(f, g) = (0, 0)$ et donc φ est injective.
Soit $h \in (E \times F)^*$. Posons $f : x \mapsto h(x, 0)$, $g : y \mapsto h(y, 0)$. On vérifie aisément $f \in E^*$, $g \in F^*$ et $\varphi(f, g) = h$ car $h(x, y) = h(x, 0) + h(0, y)$.

Exercice 105 : [énoncé]

(a) Si u et v s'annulent sur G, il en est de même pour $\lambda u + \mu v$.

(b) Soit H un supplémentaire de G dans E. L'application $\varphi : u \mapsto u_{\restriction H}$ définie un isomorphisme entre A et $\mathcal{L}(H, F)$. En effet la connaissance d'une application linéaire sur deux espaces supplémentaires la caractérise entièrement, ici $u_{\restriction G} = 0$ et donc $u_{\restriction H}$ détermine u. Par suite $\dim A = (\dim E - \dim G) \times \dim F$.

Exercice 106 : [énoncé]
Posons $F = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = 0\}$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On a clairement $g \in F \iff \operatorname{Im} g \subset \ker f$. Par conséquent $F = \mathcal{L}(E, \ker f)$ d'où la dimension.

Exercice 107 : [énoncé]

(a) Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ s'annulent sur W, il en est de même de $\lambda f + \mu g \ldots$

(b) Soit V un supplémentaire de W dans E. L'application

$$\Phi : A \to \mathcal{L}(V, F)$$

qui à $f \in A$ associe sa restriction au départ de V est un isomorphisme car une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions linéaires sur deux espaces supplémentaires.
On en déduit

$$\dim A = \dim \mathcal{L}(V, F) = (\dim E - \dim W) \times \dim F$$

Exercice 108 : [énoncé]

(a) A_F et B_F sont des parties de $\mathcal{L}(E)$ contenant l'endomorphisme nul.
$\operatorname{Im}(\lambda f) \subset \operatorname{Im} f$ avec égalité si $\lambda \neq 0$ et $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ donc A_F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Aussi $\ker f \subset \ker(\lambda f)$ et $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f + g)$ donc B_F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
A_F s'identifie avec $\mathcal{L}(E, F)$ donc

$$\dim A_F = np$$

En introduisant G un supplémentaire de F dans E, B_F est isomorphe à $\mathcal{L}(G, E)$ et donc

$$\dim B_F = n(n - p)$$

(b) φ est linéaire en vertu de la linéarité du produit de composition.

$$f \in \ker \varphi \iff \operatorname{Im} f \subset \ker u$$

donc $\ker \varphi = B_{\operatorname{Im} f}$ puis

$$\dim \ker \varphi = n(n - \operatorname{rg} u)$$

(c) Si $v \in \operatorname{Im} \varphi$ alors il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v = u \circ f$ et donc $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$. Inversement si $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$ alors en introduisant $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, pour tout i, il existe $f_i \in E$ tel que $v(e_i) = u(f_i)$. Considérons alors l'endomorphisme f déterminé par $f(e_i) = f_i$. On vérifie $v = u \circ f$ car ces deux applications prennent mêmes valeurs sur une base. $\operatorname{Im} \varphi = A_{\operatorname{Im} u}$ donc

$$\operatorname{rg} \varphi = n \operatorname{rg} u$$

Exercice 109 : [énoncé]
Notons $A = \{g \in \mathcal{L}(E, F) \mid f \circ g \circ f = 0\} = \left\{g \in \mathcal{L}(E, F) \mid \operatorname{Im}(g_{\restriction \operatorname{Im} f}) \subset \ker f\right\}$
Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans E.
Un élément de A est entièrement déterminée par :
- sa restriction de $\operatorname{Im} f$ à valeurs dans $\ker f$ et
- sa restriction de G à valeurs dans F.
Par suite A est isomorphe à $\mathcal{L}(\operatorname{Im} f, \ker f) \times \mathcal{L}(G, F)$.
Il en découle $\dim A = \dim E \dim F - (\operatorname{rg} f)^2$.

Exercice 110 : [énoncé]

(a) $P(X + 1)$ et $P(X)$ sont de polynômes de mêmes degré et de coefficients dominants égaux donc

$$\deg P(X + 1) - P(X) < \deg P$$

à moins que $P = 0$. Par suite

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X], \Delta(P) \in \mathbb{K}_n[X]$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$.

$$\Delta(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X) = \lambda(P(X+1)-P(X))+\mu(Q(X+1)-Q(X))$$

donc

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q)$$

(b) On a

$$P \in \ker \Delta \iff P(X + 1) - P(X) = 0$$

En écrivant

$$P \in \ker \Delta \iff P(X+1) = P(X) \iff a_0+a_1(X+1)+\dots+a_n(X+1)^n = a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient successivement, $a_n = 0, \dots, a_1 = 0$ et donc $\ker \Delta = \mathbb{K}_0[X]$.

(c) Par la formule du rang

$$\operatorname{rg} \Delta = \dim \mathbb{K}_{n+1}[X] - \dim \ker \Delta = n + 2 - 1 = n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$$

donc Δ est surjectif.

Exercice 111 : [énoncé]

(a) On remarque que si $\deg P \leq m$ alors $\deg \Delta(P) \leq m - 1$.
On en déduit $\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\operatorname{Im} \Delta^2 \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$,... puis $\Delta^{n+1} = 0$.

(b) Introduisons l'endomorphisme $T\colon P(X) \mapsto P(X + 1)$.
On a $\Delta = T - \operatorname{Id}$ et par la formule du binôme de Newton(T et Id commutent),

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} T^k = 0$$

Ainsi pour

$$a_k = (-1)^k \binom{n+1}{k}$$

on a

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X + k) = 0$$

Exercice 112 : [énoncé]

(a) Δ est clairement linéaire.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et $n = \deg P$. On peut écrire $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$.
$\Delta(P) = a_1 \Delta(X) + \dots + a_n \Delta(X^n)$ or $\deg \Delta(X), \dots, \deg \Delta(X^{n-1}) \leq n - 1$ et $\deg \Delta(X^n) = n - 1$ donc $\deg \Delta(P) = n - 1$.

(b) Si P est constant alors $\Delta(P) = 0$ et sinon $\Delta(P) \neq 0$ donc $\ker\Delta = \mathbb{C}_0[X]$.
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. La restriction $\tilde{\Delta}$ de Δ au départ $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ et à l'arrivée dans $\mathbb{C}_n[X]$ est bien définie, de noyau de dimension 1 et en vertu du théorème du rang surjective. Il s'ensuit que Δ est surjective.

(c) Notons $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[X])$ défini par $T(P) = P(X+1)$.
$\Delta = T - I$ donc

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}T^k$$

avec $T^k(P) = P(X+k)$ donc

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k}P(X+k)$$

(d) Si $\deg P < n$ alors $\Delta^n(P) = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k P(k) = 0$$

Exercice 113 : [énoncé]

(a) Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{K}_n[X]$.
Si $\deg P = n+1$ alors $(n+1)P$ et XP' ont même degré$(n+1)$ et même coefficient dominant donc $\deg(n+1)P - XP' < n+1$ puis $(n+1)P - XP' \in \mathbb{K}_n[X]$.
Finalement $\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{K}_n[X]$ et donc l'application φ est bien définie.
Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tout $P, Q \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$:
$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (n+1)(\lambda P + \mu Q) - X(\lambda P + \mu Q)' = \lambda((n+1)P - XP') + \mu((n+1)Q - XQ')$
et donc $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$.

(b) Soit $P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. $\varphi(P) = 0 \iff \forall k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$,
$(n+1)a_k = ka_k$.
Ainsi $P \in \ker\varphi \iff \forall k \in \{0, 1 \dots, n\}, a_k = 0$. Par suite $\ker\varphi = \mathrm{Vect}(X^{n+1})$.

(c) Par le théorème du rang $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim\mathbb{K}_{n+1}[X] - \dim\ker\varphi = n+2-1 = \dim\mathbb{K}_n[X]$ donc φ est surjective.

Exercice 114 : [énoncé]

(a) φ est linaire. Si $\deg P = k \in \mathbb{N}$ alors $\deg\varphi(P) = k$ donc $\ker\varphi = \{0\}$. Par suite φ est bijective.

(b) $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes de degrés étagés, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Puisque $P_n(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.

(c) $P_n(X+2) + P_n(X+1) = 2(X+1)^n$ et $P_n(X+2) + P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} 2\lambda_k X^k$ donc $\lambda_k = C_n^k$.
$P_n = 2X^n - P_n(X+1) = 2X^n - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k P_k - P_n$ puis $P_n = X^n - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k P_k$.

Exercice 115 : [énoncé]
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$.
On a $P_1 = AQ_1 + r(P_1), P_2 = AQ_2 + r(P_2)$ avec $\deg r(P_1), \deg r(P_2) < \deg A$.
Donc $\lambda P_1 + \mu P_2 = A(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda r(P_1) + \mu r(P_2)$ avec $\deg(\lambda r(P_1) + \mu r(P_2)) < \deg A$.
Par suite $r(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda r(P_1) + \mu r(P_2)$. Finalement r est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
De plus pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $r(P) = A \times 0 + r(P)$ avec $\deg r(P) < \deg A$ donc $r(r(P)) = r(P)$. Ainsi $r^2 = r$. r est un projecteur.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], r(P) = 0 \iff A \mid P$$

donc $\ker r = A.\mathbb{R}[X]$.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], r(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

en posant $n = \deg A$. Donc $\mathrm{Im}\, r \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Inversement,

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], r(P) = P \in \mathrm{Im}\, r$$

Donc $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathrm{Im}\, r$.
Finalement $\mathrm{Im}\, r = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 116 : [énoncé]
Supposons φ solution.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ on peut écrire

$$P = (X-a)(X-b)Q(X) + \alpha X + \beta$$

En évaluant cette identité en a et b, on détermine α et β

$$\alpha = \frac{P(b) - P(a)}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}$$

Par linéarité de φ on obtient

$$\varphi(P) = \varphi(\alpha X + \beta) = \alpha X + \beta$$

car $\varphi((X-a)(X-b)Q(X)) = 0$.
Ainsi

$$\varphi(P) = \frac{P(b) - P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}$$

ce qui détermine φ de façon unique.
Inversement, on vérifie aisément que l'application φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par la relation précédente est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ résolvant le problème posé.

Exercice 117 : [énoncé]
Posons $T\colon P(X) \mapsto P(X+1)$ et $\Delta = T - \mathrm{Id}$ endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
On vérifie que si $\deg P \le p$ alors $\deg \Delta(P) \le p-1$.
Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$.
Par ce qui précède, on a $\Delta^{p+1}(P) = 0$.
Or
$$\Delta^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^{p+1-k} T^k$$
car T et Id commutent.
On en déduit
$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k P(X+k) = 0$$
et en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k P(n+k) = 0$$

Exercice 118 : [énoncé]

(a) Si $u \in S_p$ et si deux polynômes P, Q conviennent pour exprimer u_{n+1} en fonction de u_n alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = Q(n)$$
Puisque le polynôme $P - Q$ possède une infinité de racines, c'est le polynôme nul et donc $P = Q$.

(b) $S_p \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $0 \in S_p$ (avec $P = 0$).
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in S_p$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient aisément
$$(\lambda u + \mu v)_{n+1} = a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda P_u + \mu P_v)(n)$$
et donc $\lambda u + \mu v \in S_p$ avec $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v \in \mathbb{R}_p[X]$.
S_p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(c) Ci-dessus, on a obtenu $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ ce qui correspond à la linéarité de l'application ϕ.
$u \in \ker \phi$ si, et seulement si, $P_u = 0$ ce qui signifie que u est une suite géométrique de raison a.
On en déduit que la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle qu'est le noyau de ϕ.
L'image de ϕ est $\mathbb{R}_p[X]$ car l'application ϕ est surjective puisque pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut définir une suite élément de S_p par la relation
$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$$

(d) La famille $(R_0, R_1, \dots, R_p)$ est une famille de polynômes de degrés étagés de $\mathbb{R}_p[X]$, elle forme donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Pour $k \in [\![0\,;p]\!]$, il est facile de déterminer une suite $u = (u_n) \in S_p$ vérifiant $S_u = R_k$ car
$$u_{n+1} = au_n + R_k(n) \iff u_{n+1} - (n+1)^k = a(u_n - n^k)$$
Ainsi la suite
$$u\colon n \mapsto n^k$$
convient.
Considérons alors la famille formée des suites
$$v\colon n \mapsto a^n \text{ et } v_k\colon n \mapsto n^k \text{ avec } k \in [\![0\,;p]\!]$$
Supposons
$$\lambda v + \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$
En appliquant ϕ, on obtient
$$\lambda_0 R_0 + \cdots + \lambda_p R_p = 0$$
donc $\lambda_0 = \ldots = \lambda_p = 0$ puis la relation initiale donne $\lambda = 0$ car $v \neq 0$.
La famille $(v, v_0, \dots, v_p)$ est donc libre.
De plus, en vertu de la formule du rang
$$\dim S_p = \dim \ker \phi + \operatorname{rg} \phi = 1 + (p+1) = p+2$$
donc la famille $(v, v_0, \dots, v_p)$ est une base de S_p.

(e) En reprenant les notations qui précèdent, on peut écrire
$$u = \lambda v + \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1$$
On a
$$P_u = \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 = -2X + 7$$
Puisque $R_0 = -1$ et $R_1 = 1 - X$, on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_0 = -5$.
Par suite
$$u_n = \lambda 2^n + 2n - 5$$
Puisque $u_0 = -2$, on obtient $\lambda = 7$.
Finalement
$$u_n = 3.2^n + 2n - 5$$

Exercice 119 : [énoncé]

(a) Supposons que H est un supplémentaire commun à F_1 et F_2.
Considérons la projection p sur F_1 parallèlement à H. Par le théorème du rang, p induit par restriction un isomorphisme de tout supplémentaire de noyau vers l'image de p. On en déduit que F_1 et F_2 sont isomorphes.

(b) En dimension finie, la réciproque est vraie car l'isomorphisme entraîne l'égalité des dimensions des espaces et on peut alors montrer l'existence d'un supplémentaire commun (voir l'exercice d'identifiant 181)
C'est en dimension infinie que nous allons construire un contre-exemple.
Posons $E = \mathbb{K}[X]$ et prenons $F_1 = E$, $F_2 = X.E$. Les espaces F_1 et F_2 sont isomorphes via l'application $P(X) \mapsto XP(X)$. Ils ne possèdent pas de supplémentaires communs car seul $\{0\}$ est supplémentaire de F_1 et cet espace n'est pas supplémentaire de F_2.

Exercice 120 : [énoncé]

Notons que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ car on suppose $f^2 = 0$.
$(\Longrightarrow)$ Si $x \in \ker f$ alors $x = (f \circ g)(x) + 0 \in \operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{Im} f = \ker f$.
$(\Longleftarrow)$ Soient F un supplémentaire de $\operatorname{Im} f = \ker f$ dans E. Par le théorème du rang

$$\dim F = n - \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$$

L'application $h = f_{|F} : F \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme car elle est linéaire entre deux espaces de dimensions finies égales et injective car $\ker h = F \cap \ker f = \{0_E\}$.
Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$g_{|\operatorname{Im} f} = h^{-1} \text{ et } g_{|F} = 0$$

On a

$$\forall x \in \operatorname{Im} f, (f \circ g + g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = (f \circ h^{-1})(x) = x$$

car $f^2 = 0$.
et

$$\forall x \in F, (f \circ g + g \circ f)(x) = (g \circ f)(x) = h^{-1}(f(x)) = x$$

car $g_{|F} = 0$.
On en déduit $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 121 : [énoncé]

$(\Longleftarrow)$ ok
$(\Longrightarrow)$ Supposons $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$. Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E. f réalise un isomorphisme φ de H vers $\operatorname{Im} f$.
Posons $h = \varphi^{-1} \circ g$. L'application h est bien définie car g est à valeurs dans $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$ et φ^{-1} est définie sur $\operatorname{Im} f$. De plus, h est linéaire par composition et

$$f \circ h = f \circ \varphi^{-1} \circ g$$

Puisque φ^{-1} prend ses valeurs dans H, $f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_{\operatorname{Im} f}$ puis

$$f \circ h = \mathrm{Id}_{\operatorname{Im} f} \circ g = g$$

Exercice 122 : [énoncé]

$(\Longleftarrow)$ ok
$(\Longrightarrow)$ Supposons $\ker f \subset \ker g$. Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E. f réalise un isomorphisme de H vers $\operatorname{Im} f$ noté $f_{\restriction H}$. Soient K un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans E et $h \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$h_{\restriction \operatorname{Im} f} = g \circ f_{\restriction H}^{-1} \text{ et } h_{\restriction K} = 0$$

(ou n'importe quelle autre application linéaire).
Pour tout $x \in \ker f$,

$$g(x) = 0 = (h \circ f)(x)$$

et pour tout $x \in H$,

$$(h \circ f)(x) = h(f_{\restriction H}(x)) = g(f_{\restriction H}^{-1}(f_{\restriction H}(x))) = g(x)$$

Les applications g et $h \circ f$ coïncidant sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, elles sont égales.

Exercice 123 : [énoncé]

Si $\operatorname{Im} v \not\subset \operatorname{Im} u$, il n'y a pas de solution.
Supposons $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$. Soit H un supplémentaire de $\ker u$ dans E. $u_{|H}$ réalise un isomorphisme de H vers $\operatorname{Im} u$. Tout $f \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit de manière unique $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 = p_H \circ f$ et $f_2 = p_{\ker u} \circ f$.
$u \circ f = v \iff u \circ f_1 = v \iff u_{|H} \circ f_1 = v \iff f_1 = (u_{|H})^{-1} \circ v$.
Les solutions de l'équation sont les $f = (u_{|H})^{-1} \circ v + f_2$ avec $f_2 \in \mathcal{L}(E, \ker u)$ quelconque.