Module AP-12 : ANALYSE REELLE
Recueil d'exercices

Mohammed Heyouni [1]

1. ENSA d'Al-Hoceima, Université Mohammed Premier, Oujda.
Email: mohammed.heyouni@gmail.com.

Contenu du polycopié

Le présent recueil d'exercices complète le polycopié du cours du Module ***AP-12 : ANALYSE REELLE***. Il s'adresse aux élèves de la première année du cycle préparatoire de l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima (ENASH).

Ce recueil contient des exercices corrigés ainsi que des exercices non corrigés. J'espère que ces exercices aideront à la compréhension du cours traité en amphi et permettront de complètes la formation et les acquis des élèves du CP de l'ENSA d'Al-Hoceima.

Avertissement : *Les énoncés des exercices proposés ainsi que les solutions proposées peuvent contenir des erreurs de calculs, des erreurs de frappe, ... etc.*
Il est donc demandé au lecteur de faire attention aux calculs et toute erreur signalée est la bienvenue sur l'adresse : mohammed.heyouni@gmail.com

Pour rappel, le polycopié du cours ainsi que le recueil d'exercices traitent les chapitres suivants :

- **Chapitre 1. Nombres réels.**
  Partie minorée, majorée, bornée. Borne supérieure et inférieure. Axiome de la borne supérieure. Propriétés de la borne supérieure (inférieure). Propriétés de la valeur absolue. Propriétés de la partie entière d'un réel.

- **Chapitre 2. Suites numériques.**
  Généralités sur les suites de type $u_n = f(n)$ et sur les suites récurrentes. Suite stationnaire bornée, monotone. Convergence d'une suite. Suites extraites. Suites de Cauchy. Opérations sur les suites. Suites arithmétiques et géométriques. Suites adjacentes. Suites récurrentes du type $u_n = f(u_{n-1})$ et du type $u_n = a\,u_{n-1} + b\,u_{n-2}$.

- **Chapitre 3. Fonctions réelles. Limite et Continuité.**
  Parité d'une fonction. Fonction périodique. Fonction bornée. Fonction monotone. Opérations sur les fonctions. Limite d'une fonction. Limites usuelles. Continuité d'une fonction. Restriction et prolongement d'une fonction. Propriétés des fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de Bolzano. Injectivité, surjectivité et bijectivité. Fonction réciproque et monotonie. Fonctions uniformément continues. Théorème de Heine. Fonction lipschitzienne. Fonctions continues et suites de réels.

- **Chapitre 4. Fonctions réelles. Dérivabilité.**
  Dérivée d'une fonction. Dérivée à gauche et dérivée à droite. Interprétation géométrique de la dérivée. Extrémums et dérivabilité. Opérations sur les dérivées. Dérivées successives. Fonction de classe C^n. Formule de Leibniz. Théorème de Rolle et accroissement finis. Règle de l'Hospital. Formule de Taylor-Young. Dérivation et intégration des développements de Taylor-Young. Développements limités : définition, développement des fonctions usuelles, opérations sur les développements limités, application des développements limités.

- **Chapitre 5. Fonctions trigonométriques, hyperboliques et réciproques.**
  Théorème de la bijection et de la bijection réciproque. Fonctions trigonométriques réciproques : arcsin*,* arccos *et* arctan*. Fonctions hyperboliques :* sinh*,* cosh *et* tanh*. Fonctions hyperboliques réciproques :* argsinh*,* argcosh*, et* argtanh*. Formulaire de trigonométrie "hyperbolique".*

- **Chapitre 6. Intégration de fonctions réelles.**
  Notion d'intégrale au sens de Riemann. Théorèmes de calcul intégral. Intégration par parties. Changement de variables. Primitives des fonctions usuelles et des fractions rationnelles. Notions sur les intégrales généralisées : convergence, convergence absolue, critères de convergence.

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Exercices corrigés

1.1.1 Enoncé des exercices

Exercice I-01.

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice I-02. Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$. On suppose que tous les coefficients a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ (avec α et β premiers entre eux) alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

Exercice I-03.

1. Soit $N_n = 0,1997\,1997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $M = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec : $P = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots + 0,66666\ldots + 0,77777\ldots + 0,88888\ldots + 0,99999\ldots$

Exercice I-04. Montrer que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice I-05. Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y.

1. Démontrer que :
$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$
2. Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice I-06. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$(a)\ [0,1]\cap\mathbb{Q}\ , \qquad (b)\ ]0,1[\cap\mathbb{Q}\ , \qquad (c)\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice I-07. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice I-08. Soit $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer sup A et inf A.

Exercice I-09. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A \cap B)$, $\sup(A \cup B)$, $\sup(AB)$? ($A + B$ (resp. AB) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de A et d'un élément de B).

Exercice I-10. Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Exercice I-11. (Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique)
Soient x et y deux réels tels que $0 < x \le y$. On pose $m = \frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ (moyenne harmonique). Montrer que
$$x \le h \le g \le m \le y.$$

Exercice I-12.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x) + E(y) \le E(x + y)$.
3. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x) + E(y) + E(x + y) \le E(2x) + E(2y)$.

Exercice I-13. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice I-14. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x-y|,\ (x,y)\in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Exercice I-15. (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski)
Soient $a_1,\dots, a_n$, $b_1,\dots, b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f\ :\ x \mapsto \sum_{k=1}^{n}(a_k + xb_k)^2$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

2. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

1.1.2 Correction des exercices

Correction exercice I-01.

1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r_x := r + x \in \mathbb{Q}$ alors $x = r_x - r \in \mathbb{Q}$ (car la différence entre 2 rationnels est un rationnel), ce qui contredit le fait que $x \notin \mathbb{Q}$.
   D'une façon analogue, on vérifie que $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.
2. *Méthode "classique"*. Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible, c'est à dire que p et q sont premiers entre eux.
   En élevant l'égalité au carré, on voit que p^2 est une nombre pair car $q^2 \times 2 = p^2$. Ainsi p est un nombre pair (car sinon p serait impair, i.e., $p = 2k+1$. Or $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k^{'} + 1$, et donc p^2 est impair !)
   Donc $\exists p^{'} \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2 \times p'$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$ et ainsi, on a également $q^2 = 2 \times p'^2$.
   Nous en concluons que q^2 est également pair et comme ci-dessus que q est pair.
   Ainsi, nous arrivons à une contradiction car puisque p et q sont tous les deux pairs alors la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et doit être simplifiée. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   Autre méthode. Egalement, par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$ et ainsi, nous avons $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Soit alors l'ensemble suivant :
   $$N_{\sqrt{2}} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$
   L'ensemble $N_{\sqrt{2}}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ qui est non vide car $q \in N_{\sqrt{2}}$. On peut alors prendre le plus petit élément de $N_{\sqrt{2}}$: $n_0 = \min N_{\sqrt{2}}$.
   En particulier $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Définissons maintenant n_1 de la façon suivante : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$.
   Il se trouve que n_1 appartient aussi à $N_{\sqrt{2}}$ car d'une part $n_1 \in \mathbb{N}$ (car n_0 et $n_0 \cdot \sqrt{2}$ sont des entiers) et d'autre part $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$.
   Montrons maintenant que n_1 est plus petit que n_0.
   Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ alors $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$ et est non nul.
   Ainsi, nous avons trouvé $n_1 \in N_{\sqrt{2}}$ strictement plus petit que $n_0 = \min N_{\sqrt{2}}$, ce qui aboutit à une contradiction. Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$. Alors, d'une part $x \in]r, r'[$ (car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) et d'après les deux premières questions, on a
   $$\sqrt{2}\left(\frac{r' - r}{2}\right) \notin \mathbb{Q},$$
   donc $x \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Correction exercice I-02.

1. Soit $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ avec $\mathrm{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$. Alors, si $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est une racine de p alors $p(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$, et donc $\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$.
   En multipliant par β^n nous obtenons :
   $$a_0 \beta^n + a_1 \alpha \beta^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \alpha^{n-1} \beta + a_n \alpha^n = 0.$$
   En factorisant tous les termes de cette somme par β sauf le dernier, on obtient $\beta q + a_n \alpha^n + = 0$ (où $q \in \mathbb{Z}$). Ainsi, β divise $a_n \alpha^n$, mais comme β et α^n sont premiers entre eux alors par le lemme de Gauss

β divise a_n.
De même en factorisant par α tous les termes de la somme précédente, sauf le premier, on a $a_0\beta^n + \alpha q' = 0$ (où $q' \in \mathbb{Z}$) et par un raisonnement similaire au précédent, on a aussi α divise a_0.

2. Soit $\lambda = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, alors $\lambda^2 = 5+2\sqrt{2}\sqrt{3}$. Et donc $\left(\lambda^2-5\right)^2 = 4\times 2\times 3 = 24$. Posons $p(x) = (x^2-5)^2-24$, qui s'écrit aussi $p(x) = x^4-10x^2+1$ et qui vérifie $p(\lambda) = 0$.
Si nous supposons que λ est rationnel, alors $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ et d'après la première question α divise le terme constant de p, c'est-à-dire 1. Donc $\alpha = \pm 1$.
De même β divise le coefficient du terme de plus haut degré de p, donc β divise 1, soit $\beta = 1$. Ainsi $\lambda = \pm 1$, ce qui est évidemment absurde !

Correction exercice I-03.

1. Soit $p = \underbrace{1997\,1997\ldots 1997}_{n\ fois}$ et $q = 1\,0000\,0000\ldots 0000 = 10^{4n}$. Alors $N_n = \frac{p}{q}$.

2. Remarquons que $10\,000\times M = 1997{,}1997\,1997\ldots$. Ainsi, $10\,000\times M - M = 1997$ et donc $9999\times M = 1997$. D'où $M = \frac{1997}{9999}$.

3. $0{,}111\ldots = \frac{1}{9}$, $0{,}222\ldots = \frac{2}{9}$, etc ...
D'où $P = \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{9}{9} = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Correction exercice I-04. Par l'absurde supposons que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ soit un rationnel.
Il existe alors $p \geq 0$ et $q > 0$ des entiers tels que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} = \dfrac{p}{q}$. Ainsi, on a $q\ln 3 = p\ln 2$. Et, grâce aux propriétés du logarithme, on a $\ln(3^q) = \ln(2^p)$ et aussi $3^q = 2^p$.
Si $p \geq 1$ alors 2 divise 3^q donc 2 divise 3, ce qui est absurde.
Donc $p = 0$. Ceci nous conduit à l'égalité $3^q = 1$, donc $q = 0$. La seule solution possible est $p = 0$, $q = 0$. Ce qui contredit $q \neq 0$. Donc $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est un irrationnel.

Correction exercice I-05.

1. Explicitons la formule pour $\max(x,y)$.
Si $x \geqslant y$, alors $|x-y| = x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x$.
De même si $x \leqslant y$, alors $|x-y| = -x+y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y$.

2. Pour trois éléments, nous avons $\max(x,y,z) = \max\big(\max(x,y),z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned}\max(x,y,z) &= \frac{\max(x,y)+z+|\max(x,y)-z|}{2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)+z+\left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)-z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Correction exercice I-06.

(a) Pour l'ensemble $[0,1]\cap\mathbb{Q}$.
L'ensemble des majorants est : $[1,+\infty[$ et l'ensemble des minorants est : $]-\infty,0]$.
Ainsi, la borne supérieure est : 1, la borne inférieure est : 0, le plus grand élément est : 1 et le plus petit élément est 0.

(b) Pour l'ensemble $]0,1[\cap\mathbb{Q}$.
L'ensemble des majorants est : $[1,+\infty[$ et l'ensemble des minorants est : $]-\infty,0]$.
Ainsi, la borne supérieure est : 1, la borne inférieure est : 0. Par contre, Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.

(c) Concernant l'ensemble $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$.
L'ensemble des majorants est : $[\frac{5}{4},+\infty[$ et celui des minorants est : $]-\infty,-1]$.
Ainsi, la borne supérieure est : $\frac{5}{4}$, tandis que la borne inférieure est : -1. On voit aussi que le plus grand élément est : $\frac{5}{4}$, mais il n'y a pas de plus petit élément.

Correction exercice I-07.

1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On sait que $\sup A$ est un majorant de A, c'est-à-dire, pour tout $a\in A$, $a\leqslant \sup A$. De même, pour tout $b\in B$, $b\leq \sup B$. On veut montrer que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.
   Soit donc $x\in A+B$. Cela signifie que x est de la forme $a+b$ pour un $a\in A$ et un $b\in B$. Or $a\leqslant\sup A$, et $b\leq\sup B$, donc $x=a+b\leqslant \sup A+\sup B$. Comme ce raisonnement est valide pour tout $x\in A+B$ cela signifie que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.

2. On veut montrer que, quel que soit $\epsilon>0$, $\sup A+\sup B-\epsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. On prend donc un $\epsilon>0$ quelconque, et on veut montrer que $\sup A+\sup B-\epsilon$ ne majore pas $A+B$. On s'interdit donc dans la suite de modifier ϵ.
   Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, $\sup A-\epsilon/2$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie qu'il existe un élément a de A tel que $a>\sup A-\epsilon/2$. *Attention : $\sup A-\epsilon/2$ n'est pas forcément dans A ; $\sup A$ non plus.* De la même manière, il existe $b\in B$ tel que $b>\sup B-\epsilon/2$. Or l'élément x défini par $x=a+b$ est un élément de $A+B$, et il vérifie $x>(\sup A-\epsilon/2)+(\sup B-\epsilon/2)=\sup A+\sup B-\epsilon$. Ceci implique que $\sup A+\sup B-\epsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$.

3. $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$ d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un $\epsilon>0$, $\sup A+\sup B-\epsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. Donc $\sup A+\sup B$ est bien le plus petit des majorants de $A+B$, c'est donc la borne supérieure de $A+B$. Autrement dit $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Correction exercice I-08. Posons pour n entier naturel non nul $u_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$ de sorte que

$$A=\{u_n,\ n\in\mathbb{N}^*\}=\left\{0,\frac{1}{2}+1,\frac{1}{3}-1,\frac{1}{4}+1,\frac{1}{5}-1,\dots\right\}.$$

On a alors,
– Pour $n\geq1$, $u_{2n}=1+\frac{1}{2n}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1<u_{2n}\leq\frac{3}{2}$.

– Pour $n\geq1$, $u_{2n-1}=-1+\frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<u_{2n-1}\leq 0$.
Par suite, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<u_n\leq\frac{3}{2}$. Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans $\mathbb{R}$ et de plus $-1\leq\inf A\leq\sup A\leq\frac{3}{2}$. Ensuite, $\frac{3}{2}=u_2\in A$. Donc, $\sup A=\max A=\frac{3}{2}$.

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n, on a $-1\leq\inf A\leq u_{2n-1}=-1+\frac{1}{2n-1}$. On fait tendre n vers l'infini dans cet encadrement, on obtient $\inf A=-1$. (Notez que cette borne inférieure n'est pas un minimum).

Correction exercice I-09.

1. $A \cap B$ peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc $A \cap B$ non vide.
   Pour $x \in A \cap B$, on a $x \leq \sup A$ et $x \leq \sup B$ et donc $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Dans ce cas, $\sup(A \cap B)$ existe et $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ et $B = ([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{0\}$. On a $\sup A = 1$, $\sup B = 1$, $A \cap B = \{0\}$ et donc $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$.

2. Pour $x \in A \cup B$, on a $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Donc $\sup(A \cup B)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.
   Inversement, supposons par exemple $\sup A \geq \sup B$ de sorte que $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$. a est dans A et donc dans $A \cup B$.
   En résumé, $\forall x \in (A \cup B)$, $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in (A \cup B)/ \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon < x$ et donc $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

3. Pour $\sup(AB)$, tout est possible. Par exemple, si $A = B =]-\infty, 0]$ alors $\sup A = \sup B = 0$, mais $AB = [0, +\infty[$ et $\sup(AB)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Correction exercice I-10. On a pour $a,\ b \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leqslant 2(a+b),$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Evaluons la différence $2(a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$:

$$2(a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Donc par l'équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Correction exercice I-11. Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$.

1. On peut écrire $x = \dfrac{x+x}{2} \leq \dfrac{x+y}{2} = m \leq \dfrac{y+y}{2} = y$ et donc $x \leq m \leq y$.
   (Notez qu'on peut également écrire : $m - x = \dfrac{x+y}{2} - x = \dfrac{y-x}{2} \geq 0$).

2. De même, on peut écrire $x = \sqrt{x.x} \leq \sqrt{xy} = g \leq \sqrt{y.y} = y$ et donc $x \leq g \leq y$.

3. On a $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ et donc, $x \leq g \leq m \leq y$.

4. D'après la question 1., la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est comprise entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, ce qui fournit $\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{h} \leq \dfrac{1}{x}$, ou encore $x \leq h \leq y$.

5. D'après la question 3., la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}} \leq \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ ou encore $\dfrac{1}{g} \leq \dfrac{1}{h}$ et finalement

$$x \leq h \leq g \leq m \leq y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ \ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.$$

Correction exercice I-12.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors, $E(x) \leq x < E(x)+1$ puis $E(x)+1 \leq x+1 < (E(x)+1)+1$. Comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$, on a bien $E(x+1) = E(x)+1$.

2. Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$. On a $E(x)+E(y) \leq x+y$ et $E(x)+E(y)$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x+y$. Ainsi, puisque $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x+y$, alors $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$.

3. Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$. Posons $k = E(x)$ et $l = E(y)$ et distinguons les cas suivants :
   Cas 1. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ et $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, alors $x+y \in [k+l, k+l+1[$ et donc $E(x+y) = k+l$, puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = k+l+k+l = 2k+2l$.
   D'autre part, $2x \in [2k, 2k+1[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$, et donc $E(2x)+E(2y) = 2k+2l$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) = E(2x)+E(2y)$.

   Cas 2. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ et $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, alors $x+y \in [k+l+\frac{1}{2}, k+l+\frac{3}{2}[$ et donc $E(x+y) = k+l$ ou $k+l+1$, puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l$ ou $2k+2l+1$.
   D'autre part, $2x \in [2k+1, 2k+2[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$ et donc $E(2x)+E(2y) = 2k+2l+1$. Ainsi, également on a, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

   Cas 3. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ et $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, de la même façon on a de même $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

   Cas 4. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ et $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, on vérifie également que $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l+2 = E(2x)+E(2y)$.
   Finalement, dans tous les cas, on a $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

Correction exercice I-13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
E(x) \leq x < E(x)+1 \quad &\Rightarrow \quad nE(x) \leq nx < nE(x)+n \\
&\Rightarrow \quad nE(x) \leq E(nx) < nE(x)+n \\
&\Rightarrow \quad E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1 \\
&\Rightarrow \quad E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x).
\end{aligned}$$

Correction exercice I-14. Posons $B = \{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\}$.
A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m = \inf A$ et $M = \sup A$ existent dans $\mathbb{R}$.
Pour $(x,y) \in A^2$, on a $m \leq x \leq M$ et $m \leq yM$, et donc $y-x \leq M-m$ et $x-y \leq M-m$ ou encore $|y-x| \leq M-m$.
Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Et donc, B admet une borne supérieure.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$.
Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geq y_0 - x_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En résumé, on a donc

1. $\forall (x,y) \in A^2,\ |y-x| \leq \sup A - \inf A$ et

2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2 / |y-x| > \sup A - \inf A - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup A - \inf A$. $\sup\ \{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Correction exercice I-15. (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski)

1. Dans le cas où tous les b_k sont nuls, alors l'inégalité est claire.
   Sinon, pour $x \in \mathbb{R}$, soit f le trinôme de second degré

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + x b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

   Notons que $f \geq 0$, il est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$ et donc son discriminant réduit doit être négatif ou nul ce qui fournit :

$$0 \geq \Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

   ou encore

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2
\end{aligned}$$

   et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.

1.2 Exercices non corrigés

Enoncé I-01. Soit
$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Enoncé I-02. On considère l'ensemble des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$, où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses.

Enoncé I-03. Etant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A,
2. m est un minorant de A,
3. P n'est pas un majorant de A,
4. A est majoré,
5. A n'est pas minoré,
6. A est borné,
7. A n'est pas borné.

Enoncé I-04. Soit E l'ensemble des réels de la forme $\frac{n-1/n}{n+1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

Enoncé I-05. Soit $E = \{\frac{1}{n}\cos n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$.

Enoncé I-06. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait $x \leq y$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Enoncé I-07. Soient I et J deux parties de $\mathbb{N}$ $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer :
$$\inf_i(\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

Enoncé I-08. Soit $D = \left\{ \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} | n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de D.
2. Cet ensemble admet-il un maximum, un minimum ?

Enoncé I-09. Soit A l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire $x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ pour p et q entiers vérifiant $0 < p < q$.

1. Montrer que A est minorée par -3 et majorée par 2.
2. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$ (*Indication :* Pour la borne supérieure on pourra prendre $q = p+1$).

Enoncé I-10. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On note $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$. Montrer que dans les deux cas $i = 1$ et $i = 2$on a :

$$\|x+y\|_i \le \|x\|_i + \|y\|_i.$$

Enoncé I-11. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ montrer que :

$$2xy \le \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$

Enoncé I-12. Soit deux nombres réels a et b vérifiant : $-1 < a < 4 \quad \text{et} \quad -3 < b < -1$. Donner un encadrement de $a-b$ et de a/b.

Enoncé I-13. On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $E(x)+E(y) \le E(x+y) \le E(x)+E(y)+1$.
2. Calculer $E(x)+E(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $E(x) = E(\dfrac{E(nx)}{n})$.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Exercices corrigés

2.1.1 Enoncé des exercices

Exercice II-01. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Que pensez-vous des propositions suivantes ?

1. Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
2. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
3. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice II-02. Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice II-03. Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \dfrac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice II-04. Déterminer la limite éventuelle quand n tend vers $+\infty$ des suites (u_n) dans les ces cas suivants :

$$(a-)\ \frac{\sin n}{n}, \qquad (b-)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad (c-)\ \frac{E\left((n+\frac{1}{2})^2\right)}{E\left((n-\frac{1}{2})^2)\right)}$$

$$(d-)\ \sqrt[n]{n^2}, \qquad (e-)\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \qquad (f-)\ \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3}.$$

Exercice II-05. Soit x un réel.

1. Donner l'encadrement qui définit la partie entière $E(x)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$. Donner un encadrement simple de $n^2 \times u_n$, qui utilise $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Complément : On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car on peut toujours trouver une rationnel r situé strictement entre deux réels x et y, autrement dit

$$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R},\ (x<y),\ \exists r \in \mathbb{Q},\ \text{tel que } x<r<y.$$

En termes de suites , cela veut dire que chaque réel x peut être approché d'aussi près que l'on veut par des rationnels.

Exercice II-06. Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice II-07. Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Exercice II-08. Soit$u_2 = 1-\frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$, soit

$$u_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

En remarquant que $1-\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. Trouver une expression simple de u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice II-09. On considère les deux suites :

$$u_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}\ ;\ \text{pour }\ n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite et que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercice II-10.

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes $(b \geqslant a > 0)$:

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \quad \text{et} \quad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice II-11. Soit (u_n) définie par u_0 et u_1 strictement positifs et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?
2. Soit $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Montrer que a_{2n} et a_{2n+1} sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel r tel que $\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}$.

Exercice II-12. Déterminer les suites bornées qui vérifient $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice I-13. Déterminer u_n en fonction de n et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $4u_{n+2} = u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

2.1.2 Correction des exercices

Correction exercice II-01.

1. Cette proposition est **Vraie**. En effet, toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.

2. Cette proposition est **Fausse**. En effet, un contre-exemple est donné par la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$ qui vérifie que la suite extraite $(u_{2n})_n$ est la suite constante de valeur 1 (et qui est donc convergente) et de même la suite extraite $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

3. La proposition 3 est **Vraie.** En effet, la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ, s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel que

$$2p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon.$$

Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que

$$2p + 1 \geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Correction exercice II-02. Soit (u_n) une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n \geq N$, nous avons $|u_n - \ell| < 1$, soit $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$.
Notons $M = \max\limits_{n=1,\dots,N} \{u_n\}$ et puis $M' = \max(M, \ell + 1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M'$.
De même en posant $m = \min\limits_{n=1,\dots,N} \{u_n\}$ et $m' = \min(m, \ell - 1)$ nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m'$.

Correction exercice II-03.

1. On a $u_{n+q} = \cos\left(\frac{2(n+q)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = u_n$.

2. $u_{nq} = \cos\left(\frac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = u_0$ et $u_{nq+1} = \cos\left(\frac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = u_1$.
Supposons, par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ. Alors la sous-suite $(u_{nq})_n$ converge vers ℓ comme $u_{nq} = u_0 = 1$ pour tout n alors $\ell = 1$.
D'autre part la sous-suite $(u_{nq+1})_n$ converge aussi vers ℓ, mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos\frac{2\pi}{q}$, donc $\ell = \cos\frac{2\pi}{q}$.
Nous obtenons une contradiction car pour $q \geq 2$, nous avons $\cos\frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

Correction exercice II-04.

(a-) La fonction sin étant bornée, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

(b-) Pour n tendant vers $+\infty$, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$. Ainsi, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ tend vers 1.

Et puisque $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+1/n)}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

(c-) Grâce à la définition de la partie entière, on a pour $n \geq 1$, $\dfrac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2} \leq u_n \leq \dfrac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$.

Ainsi, comme les fractions $\frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2}$ et $\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$ tendent toutes les deux vers 1 quand n tend vers $+\infty$, alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = 1$.

(d-) Quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{1}{n}\ln(n^2)} = e^{2\ln n/n}$. On $\dfrac{\ln n}{n}$ tend vers 0 quant n tend vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.

(e-) On a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, ce qui fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0$.

(f-) On sait que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et donc $\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2n^3}{6n^3} = \dfrac{1}{6}$.

Correction exercice II-05.

1. Par définition la partie entière de x est l'unique nombre $E(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$.

2. L'encadrement précédent appliqué au réel kx, $(k = 1,\ldots,n)$ donne $E(kx) \leq kx < E(kx)+1$.
   On a ainsi, $E(kx) \leq kx$ et $E(kx) > kx-1$, d'où l'encadrement $kx-1 < E(kx) \leq kx$.
   En sommant cet encadrement pour k variant de 1 à n, on obtient :
   $$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx.$$
   Ce qui donne
   $$x\cdot\sum_{k=1}^{n} k \quad -n < n^2\cdot u_n \leq x\cdot\sum_{k=1}^{n} k.$$

3. Sachant que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, alors :
   $$x\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} < u_n \leq x\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$
   Or $\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$, donc par le théorème des gendarmes (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$.

4. Chaque u_n est un rationnel (le numérateur et le dénominateur sont des entiers). Comme la suite (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$, alors la suite de rationnels $(2u_n)$ tend vers x. Chaque réel $x \in \mathbb{R}$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des rationnels, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction exercice II-06. Il est facile de remarquer que$(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc l'ensemble A n'a pas de majorant et par suite A n'a pas de borne supérieure.
De même, on voit que toutes les valeurs de (u_n) sont positives et que la suite extraite $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Correction exercice II-07. Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
La convergence de (u_n) s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon).$$

Fixons ϵ et posons, $I =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$. Pour $\epsilon = \frac{1}{2}$ nous obtenons un N correspondant tel que pour $n \geqslant N$, $u_n \in I$.

Or l'intervalle I est de longueur 1, il existe donc au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$. Ainsi, u_n est un entier, qui vérifie $n \geqslant N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}$.
Par suite, $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$, et l'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite (u_n) est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Correction exercice II-08. Puisque $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$, alors en remplaçant chaque fraction $1 - \frac{1}{k^2}$ par l'expression équivalente $\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$, on a

$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2} \frac{(3-1)(3+1)}{3.3} \cdots \frac{(k-1)(k+1)}{k.k} \frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où, $u_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$ et $\lim\limits_n u_n = \dfrac{1}{2}$.

Correction exercice II-09.

1. La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(\frac{2}{n} - 1).$$
Donc à partir de $n \geq 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. Comme $u_n \leq v_n \leq v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De même $v_n \geq u_n \geq u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Et donc $(v_n - u_n)$ tend vers 0 ce qui prouve que $\ell = \ell'$.

3. Supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous obtenons $u_n \leq \frac{p}{q} \leq v_n$ pour $n \geq 2$.
Ecrivons cette égalité pour $n = q$: $u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$ et multiplions par $q!$: $q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!v_q$.
Dans cette double inégalité toutes les termes sont des entiers ! De plus $v_q = u_q + \frac{1}{q!}$ donc :
$$q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!u_q + 1.$$
Donc l'entier $q!\frac{p}{q}$ est égal à l'entier $q!u_q$, ou à $q!u_q + 1 = q!v_q$. Nous obtenons que $\ell = \frac{p}{q}$ est égal à u_q ou à v_q. Supposons par exemple que $\ell = u_q$, comme la suite (u_n) est strictement croissante alors

$u_q < u_{q+1} < \cdots < \ell$, ce qui aboutit à une contradiction.
Le même raisonnement s'applique en supposant $\ell = v_q$ car la suite (v_n) est strictement décroissante.
Pour conclure nous avons montré que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

Correction exercice II-10.

1. Soient $a, b > 0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$. De plus,
$$\begin{aligned} ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$
ce qui est toujours vrai car $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.
2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a \leqslant b$. Alors en ajoutant les deux inégalités
$$a/2 \leqslant a/2 \leqslant b/2$$
$$a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2,$$
on obtient
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$
De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b}$$
on obtient
$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Il faut avant tout remarquer que pour tout n, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0, et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (qui est u_{n+1}) et arithmétique (qui est v_{n+1}) sont strictement positives.
   (a) On veut montrer que pour chaque n, $u_n \leqslant v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0. Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1}, donc, par 1., $u_n \leqslant v_n$.

   (b) On sait d'après 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.

   (c) Pour tout n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite ℓ. Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite ℓ'. Nous savons maintenant que $u_n \to \ell$, donc aussi $u_{n+1} \to \ell$, et $v_n \to \ell'$; la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ s'écrit à la limite :
$$\ell = \sqrt{\ell \ell'}.$$
   De même la relation $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ donnerait à la limite :
$$\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}.$$
   Un petit calcul avec l'une ou l'autre de ces égalités implique $\ell = \ell'$.

Correction exercice II-11. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$ dont les solution sont $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc u_n est de la forme

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

Pour α, β des réels que nous allons calculer grâce à u_0 et u_1. En effet $u_0 = 1 = \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0$ donc $\alpha + \beta = 1$. Et comme $u_1 = 1 = \alpha\lambda^1 + \beta\mu^1$ nous obtenons $\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$.
En résolvant ces deux équations nous obtenons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda)$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu)$. Nous écrivons donc pour finir :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}\right).$$

Correction exercice II-12. L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

dont les solutions sont $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. Donc u_n est de la forme

$$u_n = \alpha 2^n + \beta 1^n = \alpha 2^n + \beta$$

Or la suite $(2^n)_n$ tend vers $+\infty$. Donc si $(u_n)_n$ est bornée alors $\alpha = 0$. Donc $(u_n)_n$ est la suite constante égale à β. Réciproquement toute suite constante qui vérifie $u_n = \beta$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie bien la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Donc les suites cherchées sont les suites constantes.

Correction exercice II-13.

1. Puisque l'équation caractéristique associée à la suite est $4r^2 - 4r - 3 = 0$ et que les solutions de cette équation sont $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$ alors, les suites qu'on recherche -vérifiant la récurrence donnée- csont les suites dont le terme général u_n est de la forme

$$u_n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

où λ et μ sont deux réels (ou deux complexes si on cherche des suites complexes).
Si u_0 et u_1 sont les deux premiers termes de la suite (u_n), alors λ et μ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = u_1 \end{cases},$$

et donc $\lambda = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1)$ et $\mu = \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1)$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

2. En s'intéressant aux termes de la suite d'indice paire, on voit que $u_{2n} = \dfrac{1}{4^n}u_0$. Et, pour les termes d'indice impair, on a également $u_{2n+1} = \dfrac{1}{4^n}u_1$. Et puisque, on a

$$\frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ paire} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ impaire} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ paire} \\ 1 & \text{si} \quad n \text{ impaire} \end{cases}$$

alors, on peut vérifier que

$$u_n = \frac{1}{4^n}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}u_0 + \frac{1-(-1)^n}{2}u_1\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Les solutions de l'équation homogène associée à la suite (u_n) sont les suites de la forme $\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{3}{2}\right)^n$.
Une solution particulière de l'équation proposée est une constante a telle que $4a = 4a+3a+12$ et donc $a = -4$.
Les solutions de l'équation proposée sont donc les suites de la forme $\left(-4+\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont les solutions du système
$$\begin{cases} \lambda+\mu = 4+u_0 \\ -\frac{\lambda}{2}+\frac{3\mu}{2} = 4+u_1 \end{cases},$$
et donc $\lambda = \frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)$ et $\mu = \frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)$. Ce qui fait que :
$$u_n = -4+\frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. En posant $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, on voit que la nouvelle suite (v_n) est solution de la récurrence $2v_{n+2} = v_{n+1} - v_n$ et donc, (v_n) est de la forme :
$$\left(\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n + \mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right),$$
c'est à dire $u_n = \frac{1}{\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n}$.

2.2 Exercices non corrigés

Enoncé II-01. Calculer les limites éventuelles des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des exemples suivants :

1.) $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$. *2.)* $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}$. *3.)* $u_n = \dfrac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$.

4.) $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$. *5.)* $u_n = n^2 \sin(\dfrac{1}{n^\alpha})$, $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$. *6.)* $u_n = \sqrt[n]{n^2}$.

Enoncé II-02. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les constantes a, b et c tels que $u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
2. En déduire une expression simplifiée de S_n puis $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Enoncé II-03. Soit la suite (u_n), définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Montrez que $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$ pour $n \in N^*$. (*Indication :* On pourra vérifier que $\forall x \geq 0$, $x \geq \ln(x+1)$)
2. En déduire que la suite (u_n) est divergente.

Enoncé II-04. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $v_n = \dfrac{u_n+1}{u_n}$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+2}.$$

1. Montrer que l la limite éventuelle de (u_n) est $l = -1$ ou $l = 0$.
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3. En déduire u_n en fonction de n et la limite de u_n.

Enoncé II-05. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $v_n = 2 - u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_n = \frac{2}{3}(u_{n-1}+1).$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. Ecrire (v_n) en fonction de n.
3. En déduire u_n en fonction de n et la limite de u_n.

Enoncé II-06. Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 > 0,\ v_0 > 0,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}.$$

On suppose que (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers l et $l^{'}$.

1. Montrer que $l = l^{'}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0,\ v_n > 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^* v_n \geq u_n$.
3. Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
4. Conclure.

Enoncé II-07. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à éléments dans $[0,\ 1]$, telles que $\lim_n u_n v_n = 1$. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

Enoncé II-08. *(Intégrale de Wallis)*. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in [0,\ \dfrac{\pi}{2}[,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{2}\sin^n(\lambda) + (\dfrac{\pi}{2} - \lambda)$ et en déduire que $\lim_n I_n = 0$.
3. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. Déduire des questions précédentes que : $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim_n \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et $\lim_n \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} I_n = 1$.

Enoncé II-09. (Moyenne de Césaro et lemme de l'escalier)

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 \ldots + u_n).$$
Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réelle l, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l. La réciproque est elle vraie ?
2. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $\lim_\infty (w_{n+1} - w_n) = a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_\infty \dfrac{w_n}{n} = a$.

Enoncé II-10. Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$
On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que ${u_{n+1}}^2 - a = \frac{({u_n}^2 - a)^2}{4{u_n}^2}$.
2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation ${u_{n+1}}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$. (*Indication :* Etablir que : $u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2$.)

5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$ montrer que $u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$.

6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Enoncé II-11.

1. Déterminer la suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \\ u_0 = a,\ u_1 = b. \end{cases}$

2. Si $a = 0$, trouver $\lim u_n$.

3. Déterminer la suite (v_n) vérifiant : $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}v_n}$.

Enoncé II-12. Soit (u_n) définie par u_0 et u_1 strictement positifs et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $\lim(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$ existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?

2. Soit $a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

3. Montrer que a_{2n} et a_{2n+1} sont adjacentes.

4. Déterminer un rationnel r tel que $\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}$.

Enoncé II-13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists k \in [0,\ 1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{n+1}| \leq k|u_n|).$$

1. Etablir que $\forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq k^{n-n_0}|u_{n_0}|$.

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3. Application : Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n!} = 0$.

Enoncé II-14.

1. Etudier la monotonie des suites $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ et $v_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

2. Etudier le comportement des suites données ci-dessous quand n tend vers l'infini.

$$w_n = \frac{3n+1}{2n-3},\ x_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n+2},\ y_n = \frac{n}{2^n},\ z_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$$

Enoncé II-15. Soit la suite $v_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} \ldots + \dfrac{1}{n^2}$. Vérifier que cette suite est croissante et majorée par 2.

Enoncé II-16. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{R} - \{-5\}$ et $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+5}$

1. Résoudre l'équation $f(l) = l$, où $l \in \mathbb{R}$. On notera l_1 et l_2 les deux racines et on prendra $l_1 > l_2$.

2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$. Montrer que v_n est une suite géométrique.

3. Exprimer alors v_n en fonction de v_0 et en déduire la limite de u_n.

Enoncé II-17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence : $u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$.

1. Montrez que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

2. Calculez sa limite $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Donnez une interprétation graphique.

3. Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrez que cette suite est géométrique.

4. Calculez v_n en fonction de v_1 puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

5. Donnez l'expression de u_n en fonction de n.

Enoncé II-18. Soient les suites de terme général $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = u_{n+1} - u_n$ où (u_n) est la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l la limite éventuelle de (u_n) vaut 0.

2. Montrer que (u_n) est strictement croissante. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. Montrer que les suite (v_n) et (w_n) sont convergentes et calculer leurs limites.

Chapitre 3

Fonctions réelles. Limite et continuité

3.1 Exercices corrigés

3.1.1 Enoncé des exercices

Exercice III-01. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}\ ;\quad g(x)=\sqrt{x^2-2x-5}\ ;\quad h(x)=\ln(4x+3).$$

Exercice III-02. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)=f(b)$. Montrer que la fonction $g(t)=f(t+\frac{b-a}{2})-f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a,\frac{a+b}{2}]$.

Application : Une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice III-03. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

Exercice III-04. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a\in I$. Montrer que :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\right)\Rightarrow\left(\lim_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|\right).$$
2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\sup(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\sup(f,g)$ est continue sur I.

Exercice III-05. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x\in I$, $f(x)^2=1$. Montrer que $f=1$ ou $f=-1$.

Exercice III-06. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ? (*Indication :* on pourra raisonner en deux temps : d'abord écrire la définition de la limite en $+\infty$, en fixant par exemple $\epsilon = 1$, cela donne une borne sur $[A, +\infty]$. Puis travailler sur $[0, A]$.)

Exercice III-07. Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ? (*Indication :* Examiner la fonction $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.)

Exercice III-08.

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soient $f,\ g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Exercice III-09. Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}. (*Indication :* Distinguer trois intervalles pour la formule définissant f^{-1}).

Exercice III-10. Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice III-11. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$(a)\ \ f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad (b)\ \ g(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ , \quad (c)\ \ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}.$$

Exercice III-12. Montrer que

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!, \qquad (b) \quad \sum_{k=0}^{n} e^{k^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{n^2}.$$

Exercice III-13. En utilisant des équivalents, calculer les limites suivantes :

$(a)\ \lim\limits_{0} \dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x\tan x}$ $\quad(b)\ \lim\limits_{0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ $\quad(c)\ \lim\limits_{0} \dfrac{1-\cos(ax)}{x(2-x)\tan(bx)},\ (a,\ b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

$(d)\ \lim\limits_{\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$ $\quad(e)\ \lim\limits_{\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan x$ $\quad(f)\ \lim\limits_{+\infty} \sqrt{\ln(1+x^2)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}$

$(g)\ \lim\limits_{+\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$ $\quad(h)\ \lim\limits_{0} (\cos x)^{\dfrac{1}{\sin^2 x}}$ $\quad(i)\ \lim\limits_{+\infty} \left[\ln(1+e^{-x})\right]^{\frac{1}{x}}.$

Indication : On pourra avoir à utiliser les équivalents suivants :

$\sin x \underset{0}{\sim} x\,;$ $\quad \tan x \underset{0}{\sim} x\,;$ $\quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_m x^m \underset{0}{\sim} a_m x^m$ pour $m<n$ et $a_m\neq 0$.

$1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}\,;$ $\quad \ln(1+x)\underset{0}{\sim} x\,;$ $\quad e^x-1\underset{0}{\sim} x.$

$\cos x \underset{0}{\sim} 1+\dfrac{x^2}{2}\,;$

Exercice III-14.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1.$
2. Soient m,n des entiers positifs. Etudier $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$
3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \dfrac{1}{2}.$

Exercice III-15. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{n+1}-a^{n+1}}{x^n-a^n}$. (**Indication :** On pourra calculer d'abord la limite de $f(x)=\dfrac{x^k-a^k}{x-a}$).
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$. (**Indication :** On pourra utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et faire un changement de variable $u=\cos x$)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$. (**Indication :** On pourra Utiliser l'expression conjuguée.)
4. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},\quad (a>0)$. (**Indication :** On pourra diviser numérateur et dénominateur par $\sqrt{x-a}$ puis utiliser l'expression conjuguée)
5. $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (**Indication :** On a toujours $y-1\leq E(y)\leq y$, poser $y=1/x$)
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x-e^2}{x^2+x-6}$. (**Indication :** On pourra Diviser numérateur et dénominateur par $x-2$)

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}$, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.. (**Indication :** Pour $\alpha \geq 4$ il n'y a pas de limite, pour $\alpha < 4$ la limite est $+\infty$.)

Exercice III-16. Pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a,b).$$

Exercice III-17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice III-18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \exists\ \delta > 0,$ tq $\forall\ y \in [x, x+\delta],\ f(y) \geq f(x)$. Montrer que f est croissante.

Exercice III-19.

1. Etudier brièvement la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.
2. Trouver tous les couples (a,b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Exercice III-20.

3.1.2 Correction des exercices

Correction exercice III-01.

1. Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x \neq \dfrac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2+3x)\times(5-2x) \geq 0$, soit $x \in [-\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{2}[$.
2. Il faut $x^2 - 2x - 5 \geq 0$, soit $x \in]-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, +\infty[$.
3. Il faut $4x+3 > 0$ soit $x > -\frac{3}{4}$, l'ensemble de définition étant $]-\dfrac{3}{4}, +\infty[$.

Correction exercice III-02.

1. $g(a) = f(\dfrac{a+b}{2}) - f(a)$ et $g(\dfrac{a+b}{2}) = f(b) - f(\dfrac{a+b}{2})$.
   Comme $f(a) = f(b)$ alors nous obtenons que $g(a) = -g(\dfrac{a+b}{2})$. Donc ou bien $g(a) \leq 0$ et $g(\dfrac{a+b}{2}) \geq 0$ ou bien $g(a) \geq 0$ et $g(\dfrac{a+b}{2}) \leq 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et $\frac{a+b}{2}$.
2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t et supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue.
   Soit $f(t) = d(t) - 4t$. Alors $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$.
   Appliquons la question précédente avec $a = 0$, $b = 1$. Alors, il existe $c \in [0, \dfrac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c+\frac{1}{2}) = f(c)$. Donc $d(c+\frac{1}{2}) - d(c) = 4(c+\frac{1}{2}) - 4c = 2$.
   Donc entre c et $c + \dfrac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Correction exercice III-03. Il existe $x < 0$ tel que $f(x) < 0$ et $y > 0$ tel que $f(y) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$. Donc f s'annule.
Les polynômes de degré impair vérifient les propriétés des limites, donc s'annulent. Ceci est faux, en général, pour les polynômes de degré pair, par exemple regardez $f(x) = x^2 + 1$.

Correction exercice III-04.

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire).
   Donc pour tout $x \in I$:$\big||f(x)| - |f(a)|\big| \leq |f(x) - f(a)|$.
   L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement on peut conclure :
   La fonction $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$ est continue sur I.

Correction exercice III-05. Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$. **Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1.**
Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$. Montrons alors que f est constante égale à $+1$.
S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$. Donc f est constante égale à $+1$.

Correction exercice III-06. Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad x > A \Rightarrow \ell - \epsilon \leq f(x) \leq \ell + \epsilon.$$

Fixons $\epsilon = +1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x > A$, $\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$. Nous venons de montrer que f est bornée “à l'infini”.
La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe m, M tels que pour tout $x \in [0, A]$, $m \leq f(x) \leq M$.
En prenant $M' = \max(M, \ell + 1)$, et $m' = \min(m, \ell - 1)$ nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m' \leq f(x) \leq M'$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.
La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Correction exercice III-07. Non, par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, où $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f n'est pas continue (en 0), mais pour tout a, b et pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Correction exercice III-08.

1. $f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1.
2. Sinon $f - g$ est de signe constant, par exemple positif.
   Si a est le plus grand point fixe de f alors $g(a) > a$ et $g(a)$ est aussi point fixe de f, absurde.

Correction exercice III-09.

1. Le graphe est composé d'une portion de droite au dessus des $x \in]-\infty, 1[$; d'une portion de parabole pour les $x \in [1, 4]$, d'une portion d'une autre parabole pour les $x \in]4, +\infty$. (Cette dernière branche est bien une parabole, mais elle n'est pas dans le sens "habituel", en effet si $y = 8\sqrt{x}$ alors $y^2 = 64x$ et c'est bien l'équation d'une parabole.)
   On "voit" immédiatement sur le graphe que la fonction est continue (les portions se recollent !). On "voit" aussi que la fonction est bijective.
2. La fonction est continue sur $]-\infty, 1[$, $]1, 4[$ et $]4, +\infty[$ car sur chacun des ces intervalles elle y est définie par une fonction continue. Il faut examiner ce qui se passe en $x = 1$ et $x = 4$.
   Pour $x < 1$, $f(x) = x$, donc la limite à gauche (c'est-à-dire $x \to 1$ avec $x < 1$) est donc $+1$.
   Pour $x \geq 1$, $f(x) = x^2$ donc la limite à droite vaut aussi $+1$.
   Comme on a $f(1) = +1$ alors les limites à gauche, à droite et la valeur en 1 coïncident donc f est continue en $x = 1$.

   Même travail en $x = 4$. Pour $x \in [1, 4]$, $f(x) = x^2$ donc la limite à gauche en $x = 4$ est $+16$.
   On a aussi $f(4) = +16$. Enfin pour $x > 4$, $f(x) = 8\sqrt{x}$, donc la limite à droite en $x = 4$ est aussi $+16$.

Ainsi f est continue en $x = 4$.

Conclusion : f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Le graphe devrait vous aider : tout d'abord il vous aide à se convaincre que f est bien bijective et que la formule pour la bijection réciproque dépend d'intervalles. Petit rappel : le graphe de la bijection réciproque f^{-1} s'obtient comme symétrique du graphe de f par rapport à la bissectrice d'équation $(y = x)$ (dans un repère orthonormal).

   Ici on se contente de donner directement la formule de f^{-1}.
   Pour $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = x$. Donc la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in]-\infty, 1[$.
   Pour $x \in [1,4]$, $f(x) = x^2$. L'image de l'intervalle $[1,4]$ est l'intervalle $[1,16]$. Donc pour chaque $y \in [1,16]$, la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
   Enfin pour $x \in]4, +\infty[$, $f(x) = 8\sqrt{x}$. L'image de l'intervalle $]4, +\infty[$ est donc $]16, +\infty[$ et f^{-1} est définie par $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{64}y^2$ pour chaque $y \in]16, +\infty[$.

   Nous avons définie $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de telle sorte que f^{-1} soit la bijection réciproque de f.

   Commentaire : C'est un bon exercice de montrer que f est bijective sans calculer f^{-1} : vous pouvez par exemple montrer que f est injective et surjective.
   Un autre argument est d'utiliser un résultat du cours : f est continue, strictement croissante avec une limite $-\infty$ en$-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et on sait même que la bijection réciproque est continue).

Correction exercice III-10. Soit $x_0 \neq 0$, alors la fonction f est continue en x_0, car elle s'exprime sous la forme d'un quotient de fonctions continues où le dénominateur ne s'annule pas en x_0.
Reste à étudier la continuité en 0. Mais

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

Correction exercice III-11.

1. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ t elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

   $$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leq |\sin x|.$$

   Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Ainsi, en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.

2. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
   Etudions la situation en 0. Il faut remarquer que g est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $k(x) = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$: en effet $g(x) = \dfrac{k(x) - k(0)}{x - 0}$.
   Donc si k est dérivable en 0 alors la limite de g en 0 est égale à la valeur de k' en 0.
   Or la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ donc $k'(0) = 0$.
   Bilan : en posant $g(0) = 0$ nous obtenons une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. h est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
$$h(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{(1+x)}.$$
Donc h a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $h(1)=-\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
En -1 la fonction h ne peut être prolongée continûment, car en -1, h n'admet de limite finie.

Correction exercice III-12.

1. On a
$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} k!}{n!}-1\right| &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} k!\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k!+\frac{1}{n}\\ &\le \frac{1}{n!}(n-2)\,((n-2)!)+\frac{1}{n}\\ &= \frac{n-2}{(n-1)n}+\frac{1}{n}\end{aligned}$$
Or, $\lim_n \frac{n-2}{(n-1)n}+\frac{1}{n}=0$, d'où $\lim_n \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!}=1$. Par suite, $\sum_{k=1}^n k! \underset{+\infty}{\sim} n!$.
2. On a
$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{k=0}^{n} e^{k^2}}{e^{n^2}}-1\right| &= e^{-n^2}\sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2}\\ &\le e^{-n^2}\,n\,e^{(n-1)^2}\\ &= n\,e^{-2n+1}\end{aligned}$$
Or, $\lim_n n\,e^{-2n+1}=0$, d'où $\lim_n \frac{\sum_{k=0}^{n} e^{k^2}}{e^{n^2}}=1$. Par suite, $\frac{\sum_{k=0}^{n} e^{k^2}}{e^{n^2}} \underset{+\infty}{\sim} e^{n^2}$.

Correction exercice III-13.

(a) Comme $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{0}{\sim} x$, alors $\frac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}\underset{0}{\sim}\frac{x\times x^2}{x\times x}=x$.
Par suite, $\lim_0 \frac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}=0$.

(b) Comme $e^x-1\underset{0}{\sim} x$, $\sin x\underset{0}{\sim} x$ et $x^2+x^3\underset{0}{\sim} x^2$ alors $\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}\underset{0}{\sim}\frac{-x\times x}{x^2}=-1$.
Par suite, $\lim_0 \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}=-1$.

(c) Comme $1-\cos(ax) \underset{0}{\sim} \frac{a^2x^2}{2}$ et $x(2-x)\tan(bx) \underset{0}{\sim} 2x \times bx$ alors $\frac{1-\cos(ax)}{x(2-x)\tan(bx)} \underset{0}{\sim} \frac{a^2}{4b}$.
Ainsi, $\lim\limits_{0} \frac{(1-\cos(ax))}{x(2-x)\tan(bx)} = \frac{a^2}{4b}$.

(d) Soit $f(x) = (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$, et posons $x = \frac{1}{2} + t$.
Alors $f(x) = f(\frac{1}{2}+t) = (-1+2t)t\tan(\frac{\pi}{2}+\pi t) = (-1+2t)t\frac{\cos(\pi t)}{-\sin(\pi t)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\pi}$, d'où $\lim\limits_{\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x) = \frac{1}{\pi}$.

(e) Soit $f(x) = (\pi - 2x)\tan x$, et posons $x = \frac{\pi}{2} + t$.
Alors $f(x) = f(\frac{\pi}{2}+t) = -2t\tan(\frac{\pi}{2}+t) = -2t\frac{\cos t}{-\sin t} \underset{0}{\sim} 2$, d'où $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x = 2$.

(f) En multipliant par l'expression conjuguée, on a
$\sqrt{\ln(1+x^2)} - \sqrt{\ln(x^2-1)} = \frac{\ln(1+x^2)-\ln(x^2-1)}{\sqrt{\ln(1+x^2)}+\sqrt{\ln(x^2-1)}} = \frac{N}{D}$
On a $N = \ln(1+x^2)-\ln(x^2-1) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$.
Et, de même $D = \sqrt{\ln(1+x^2)}+\sqrt{\ln(x^2-1)} = \sqrt{2\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^2})} + \sqrt{2\ln x + \ln(1-\frac{1}{x^2})} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{2\ln x}$.
D'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2\sqrt{2\ln x}}$, et ainsi $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{\ln(1+x^2)} - \sqrt{\ln(x^2-1)} = 0$.

(g) Soit $y(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, alors $\ln(y(x)) = x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1$. D'où $\lim\limits_{+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Correction exercice III-14. Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguée" :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$.
Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}
\end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.

Distinguons plusieurs cas pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n}, et donc $f(x)$, tendent vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tendent vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$.
  Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$.
  Conclusion. Pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction exercice III-15.

1. Montrons d'abord que la limite de
$$f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha},$$
en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé.
Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1}$.
En effet $(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1})(x - \alpha) = x^k - \alpha^k$.
Donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$.
Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$.
Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme
$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n} = \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \times \frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n}.$$
Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$.
Donc la limite cherchée est
$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$ s'écrit aussi $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x(\cos 2x - \cos x)}$. Or $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.
Posons $u = \cos x$, alors
$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2 - u - 1)} = \frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)} = \frac{1}{u(-1-2u)}.$$
Lorsque x tend vers 0, $u = \cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{3}$.

3. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}\end{aligned}$$

Quand $x \to +\infty$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}} \to 0$, donc la limite recherchée est $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. La fonction s'écrit :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \to \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \dfrac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

5. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y-1 < E(y) \le y$. Donc pour $y > 0$, $\dfrac{y-1}{y} < \dfrac{E(y)}{y} \le 1$.
On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{E(y)}{y}$ tend 1.
On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$.
En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $xE(\frac{1}{x}) = \dfrac{E(y)}{y}$ tend vers 1.

6. On a

$$\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$

La limite de $\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto e^x$ en la valeur $x = 2$), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.

7. Soit $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}$. Supposons $\alpha \ge 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$.
En effet pour pour $u_k = 2k\pi$, $f(2k\pi) = (2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$.
Cependant pour $v_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $f(v_k) = \frac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha = 4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$.

Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.

$$f(x) = \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4 - \beta > 0$. Et $\dfrac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2 x$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives).
La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc $+\infty$.

Correction exercice III-16. Supposons $a \geq b$. Alors

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(a^x \times \frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Or $0 \leq \dfrac{b}{a} \leq 1$, donc $0 \leq (\dfrac{b}{a})^x \leq 1$ pour tout $x \geq 1$.

Donc $(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{x}} \leq \left(\dfrac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leq 1^{\dfrac{1}{x}}$.
Les deux termes extrêmes tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ donc le terme du milieu tend aussi vers 1.

Conclusion : Si $a \geq b$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}} = a$. Si $b \geq a$ alors cette limite vaudrait b.

Cela se résume dans le cas général où a, b sont quelconques par $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a, b)$.

Correction exercice III-17.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$0 \leq |f(x)| = \frac{|\cos x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq 1.$$
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1, 1]$ donc f est minorée (-1 est un minorant), majorée (1 est un majorant)

2. D'après ce qui précède, on a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leq 1$. Comme $f(0) = 1$ on a nécessairement $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geq 1$.
Conclusion :
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$

Correction exercice III-18. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f(b) < f(a)$.
On note $E = \{x \in [a, b] \text{ tq } f(x) < f(a)\}$ et $c = \inf(E)$.
On a $c \in E$ et $c > a$ par hypothèse et donc $f(c) = \lim_{x\to c^-} f(x) \geq f(a)$, absurde.

Correction exercice III-19.

1. Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$. f est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Le graphe de f s'en déduit facilement :
2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$. On a alors

$$a^b = b^a \Leftrightarrow \ln(a^b) = \ln(b^a) \Leftrightarrow b\ln a = a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

   Si $a \geq 3$, puisque f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, on a alors $f(a) > f(b)$ et en particulier, $f(a) \neq f(b)$. a n'est donc pas solution.
   $a = 1$ n'est évidemment pas solution. Par exemple, $a^b = b^a \Rightarrow 1^b = b^1 \Rightarrow b = 1 = a$ ce qui est exclu.
   Donc, nécessairement $a = 2$ et b est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à e, vérifiant $f(b) = f(2)$. Comme f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, l'équation $f(b) = f(2)$ a au plus une solution dans $[e,+\infty[$.
   Enfin, comme $2^4 = 16 = 4^2$, on a montré que : il existe un et un seul couple (a,b) d'entiers naturels non nuls tel que $a < b$ et $a^b = b^a$, à savoir $(2,4)$.

3.2 Exercices non corrigés

Enoncé III-01. Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que pour tout x et x' $(x \neq x')$ de $[a,b]$ on ait : $|f(x)-f(x')| < |x-x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une et une seule solution dans $[a,b]$. (*Indication :* On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x)-x$).

Enoncé III-02. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0)=1$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Enoncé III-03. Soit f croissante sur $[a,b]$ et prenant toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer que f est continue.

Enoncé III-04. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Enoncé III-05. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_1(0) = 0$.
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_2(0) = 0$.
3. $f_3(x) = xE(x)$.
4. $f_4(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Enoncé III-06. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante puis que pour tout $y \in \ ]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Enoncé III-07. Trouver un équivalent, au voisinage de $+\infty$ de $x \longmapsto \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2 - E(x)^2}$.

Enoncé III-08. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad$ (b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad$ (c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

(d) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $\quad$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $\quad$ (f) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $\quad$ (h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$.

Enoncé III-09.

1. Rappeler que pour tout nombre réels $\epsilon > 0$ il existe un entier n tel que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n\pi} &< \epsilon \\ \frac{1}{(2n+1)\pi} &< \epsilon. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ tel que :

$$|\sin \frac{1}{x} - l| > \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Enoncé III-10. Montrer que pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}.$$

Enoncé III-11. Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$.

Enoncé III-12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{R}^+$. Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme $P(X) = X^n - d$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Enoncé III-13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$. Montrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Chapitre 4

Fonctions réelles. Dérivabilité, développements limités

4.1 Exercices corrigés

4.1.1 Enoncé des exercices

Exercice IV-01. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$; $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$; $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$, si $x \neq 1$; $f_3(1) = 1$.

Exercice IV-02. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1,$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. (*Indication : Deux conditions doivent être vérifiées : (i) la fonction doit être continue -car la dérivabilité entraîne la continuité- et ensuite la condition de dérivabilité proprement dite.*)

Exercice IV-03. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice IV-04. Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g définies par :

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin^2 x.$$

(*Indication : on ne cherchera pas à utiliser la formule de Leibniz mais à linéariser les expressions trigonométriques*).

Exercice IV-05. Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1 - t^2\right)^n\right]^{(n)},$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples, et appartiennent à $[-1,1]$. (*Indication : Appliquer le théorème de Rolle une fois au polynôme* $(1-t^2)^n$*, puis deux fois à sa dérivée première, puis trois fois à sa dérivée seconde, ...*).

Exercice IV-06. Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0)=0$. (*indication : on peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.*)

Exercice IV-07. Par application du théorème des accroissements finis à $f(x)=\ln x$ sur $[n,n+1]$ montrer que la suite S_n définie par

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice IV-08. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=(1-k)^3x^2+(1+k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f.

Exercice IV-09. Déterminer les extremums de $f(x)=x^4-x^3+1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV-10. Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums locaux) de f_λ quand λ décrit $\mathbb{R}$, où :

$$f_\lambda : x\mapsto \lambda e^x+x^2.$$

Exercice IV-11. Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a :$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Exercice IV-12. Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ en 0.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en $+\infty$.
3. Calculer un développement à l'ordre 1 en $-\infty$.

Exercice IV-13. Calculer les limites suivantes :

$$(a)\ \lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}\qquad (b)\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}\qquad (c)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

Exercice IV-14. Etudier la position du graphe de l'application $x\mapsto\ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice IV-15. Soit g la fonction $x\mapsto\dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3}-\dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice IV-16. Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $\cos x \cdot \exp x$ à l'ordre 3.
2. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.
3. $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ à l'ordre 6.
4. $\exp\big(\sin(x)\big)$ à l'ordre 4.
5. $\sin^6(x)$ à l'ordre 9.
6. $\ln\big(\cos(x)\big)$ à l'ordre 6.
7. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
8. $\tan x$ à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux).
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.
10. $\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big)$ à l'ordre 6.

Exercice IV-17. Déterminer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice IV-18. Déterminer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Exercice IV-19. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

4.1.2 Correction des exercices

Correction exercice IV-01.

1. Il est claire que la fonction f_1 est dérivable en dehors de $x=0$.
   En effet $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puis par multiplication par la fonction dérivable $x \mapsto x^2$, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Par la suite on omet souvent ce genre de discussion ou on l'abrège sous la forme "f est dérivable sur I comme somme, produit, composition de fonctions dérivables sur I".
   Pour savoir si f_1 est dérivable en 0, étudions le taux d'accroissement :
   $$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = x\cos\frac{1}{x}.$$
   Comme $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos(1/x)| \le 1$, alors le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$.

2. Comme précédemment, La fonction f_2 est dérivable en dehors de 0 et le taux d'accroissement en $x=0$ est donnée par :
   $$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x}\sin\frac{1}{x}.$$
   Or $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. ainsi, le taux d'accroissement n'a pas de limite et donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

3. La fonction f_3 s'écrit $f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}$. Ainsi,
   - Donc pour $x \ge 1$ on a $f_3(x)=x$, pour $0 \le x < 1$ on a $f_3(x) = -x$ et pour $x<0$ on a $f_3(x)=x$.
   - La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. (*Rappel : la fonction* $x \mapsto |x|$ *n'est pas dérivable en* 0).
   - La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet, $\lim_{x\to 1+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x\to 1-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
   - La fonction f_3 est continue en 0 et le taux d'accroissement pour $x>0$ est
     $$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1,$$
     et pour $x<0$, on a
     $$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \frac{x}{x} = +1.$$
     Ainsi, le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction exercice IV-02. La fonction f est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Le point qui pose problème est le point $x=1$. Ainsi,

- Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x=1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x\to 1^+} ax^2+bx+1 = a+b+1$.
  on obtient ainsi $a+b+1=1$ et donc $b=-a$.
- Maintenant, il faut que les dérivées à droite et à gauche soient égales.
  Comme la restriction de la fonction f à $]0,1]$ est définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ alors elle est dérivable et puisque $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, alors $f_g'(1) = \frac{1}{2}$.

Pour la dérivée à droite, on doit calculer la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, lorsque $x \to 1$ avec $x > 1$. Et comme,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{ax^2+bx+1-1}{x-1} = \frac{ax^2-ax}{x-1} = \frac{ax(x-1)}{x-1} = ax,$$

alors f est dérivable à droite et $f'_d(1) = a$.
En résumant, on voit que pour que f soit dérivable, il faut et il suffit que $a = \frac{1}{2}$. Et ainsi, l'unique couple (a,b) que rend f dérivable sur $]0,+\infty[$ est $(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2})$.

Correction exercice IV-03. On voit que la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Comme $|\sin(1/x)| \leq 1$ alors f tend vers 0 quand $x \to 0$. Donc en prolongeant f par $f(0) = 0$, la fonction f prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Le taux d'accroissement de f en $x = 0$ s'écrit $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\frac{1}{x}$. Et, comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$.
   Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ et ainsi $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Par suite, f' n'est pas continue en 0.

Correction exercice IV-04.

1. Il est facile de voir que selon que $n \equiv 0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4$ alors $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.
2. On a $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$. Ainsi, les dérivées suivantes seront : $2\cos 2x, -4\sin 2x, -8\cos 2x, 16\sin 2x$, ...
   Et donc, selon que $n \equiv 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4, 0 \pmod 4$, alors $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.

Correction exercice IV-05. Soit $Q_n(t) = (1-t^2)^n$ le polynôme de degré $2n$, qu'on dérive n fois, on obtient alors un polynôme de degré n. Les valeurs -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q'_n(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$. Le même résultat est obtenu en -1. Enfin $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]-1,1[$ telle que $Q'_n(c) = 0$.
Ainsi, $Q'_n(-1) = 0$, $Q'_n(c) = 0$, $Q'_n(-1) = 0$. Et, en appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1,c]$ et sur $[c,+1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q''_n, qui s'ajoutent aux racines -1 et $+1$.
On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons alors le théorème de Rolle $n$fois. ce qui permet d'obtenir n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$.
Finalement, comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines de P_n et par construction ces racines sont réelles distinctes, donc simples.

Correction exercice IV-06. la fonction f' étant dérivable, elle est continue. Comme f s'annule $n+1$ fois, f' change de signe (au moins) $n+1$ fois donc s'annule (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Correction exercice IV-07. Le théorème des accroissements finis donne :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c_n}(n+1-n) = \frac{1}{c_n},$$

avec $c_n \in [n, n+1]$. Et comme, $c_n \geq n$ alors $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{c_n}$, et ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

On avoit alors que $S_n \geq \ln(n+1)$ et donc $S_n \to +\infty$.

Correction exercice IV-08. En dérivant deux fois, on obtient $f'(x) = 2(1-k)^3 x + 3(1+k)x^2$ et $f''(x) = 2(1-k)^2 + 6(1+k)x$. Ainsi, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2(1-k)^3$.
Donc si $k \neq 1$ alors, la dérivée seconde étant non nulle en $x = 0$, 0 est un extremum (maximum ou minimum) local.
Par contre, si $k = 1$ alors $f(x) = 2x^3$ et bien sûr 0 n'est pas un extremum local.
Dans tous les cas 0 n'est ni un minimum global, ni un maximum global (regardez les limites en $+\infty$ et $-\infty$).

Correction exercice IV-09. On a $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$ et ainsi, les extremums sont soit $x = 0$ soit $x = \frac{3}{4}$.
Comme $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$, alors f'' ne s'annule pas en $x = \frac{3}{4}$, donc $x = \frac{3}{4}$ donne un extremum local (qui est même un minimum global). Par contre $f''(0) = 0$ et $f'''(0) \neq 0$ donc $x = 0$ est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas local, pensez à un fonction du type $x \mapsto x^3$).

Correction exercice IV-10. On a $f'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x$, $f''_\lambda(x) = \lambda e^x + 2$. Et comme les points d'inflexion sont les racines de f''_λ, alors si $\lambda \geq 0$, alors il n'y a pas de point d'inflexion, et si $\lambda < 0$ alors il y a un point d'inflexion en $x_\lambda = \ln(-2/\lambda)$.

- **Cas 1** Si $\lambda \geq 0$, alors f''_λ est toujours strictement positive, donc f'_λ est strictement croissante, en $-\infty$ la limite de f'_λ est $-\infty$, en $+\infty$ la limite de f'_λ est $+\infty$, donc il existe un unique réel y_λ tel que $f'_\lambda(y_\lambda) = 0$.
  f_λ est décroissante sur $]-\infty, y_\lambda]$ et croissante sur $[y_\lambda, +\infty[$. Et en y_λ, nous avons un minimum absolu.
- **Cas 1** Si $\lambda < 0$, alors f''_λ s'annule seulement en x_λ. Comme f'_λ est croissante sur $]-\infty, x_\lambda]$ et décroissante sur $[x_\lambda, +\infty[$, alors f'_λ a des racines si et seulement si $f'(x_\lambda) \geq 0$. Or $f'(x_\lambda) = -2 + 2x_\lambda$. Ainsi,
  * Si $\lambda = -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) = 0$. Comme $f''_\lambda(x_\lambda) = 0$ et f'''_λ ne s'annule pas alors x_λ est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum local.
  * Si $\lambda > -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) < 0$ et donc f'_λ est négative donc f est strictement décroissante et Il n'y a pas d'extremum local.
  * Si $-2/e < \lambda < 0$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) > 0$, alors f'_λ s'annule en deux points, une fois sur $]-\infty, x_\lambda[$ et une sur $]x_\lambda, +\infty[$. Ce sont des extremums locaux (minimum et maximum respectivement).

Correction exercice IV-11. Soit $x > 0$, pour montrer que $(\forall x > 0, \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$, il suffit de montrer que $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad x\ln(1+\frac{1}{x}) < 1 < (x+1)\ln(1+\frac{1}{x}) \\
&\Leftrightarrow \quad x(\ln(x+1) - \ln x) < 1 < (x+1)(\ln(x+1) - \ln x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour x un réel strictement positif fixé et pour $t \in [x, x+1]$, posons $f(t) = \ln t$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel

c dans $]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c)$ ou encore

$$\exists c \in]x, x+1[/ \ \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c},$$

ce qui montre que $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, et donc que

$$\forall x > 0, \ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Correction exercice IV-12.

1. calcul du DL de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}{1+x+1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)} \qquad \text{car } \sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x) \\
&= \left(1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) \times \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+x^4\varepsilon(x)} \qquad \text{on pose } u = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+x^4\varepsilon(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) \times \frac{1}{1+u} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) \times \left(1-u+u^2+o(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) \times \left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)^2+x^2\varepsilon(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) \times \left(1-\frac{x}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

2. En $+\infty$ on va poser $h = \frac{1}{x}$ et se ramener à un DL en $h = 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} = \frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h+\sqrt{1+h^2}} = f(h).$$

Ici -miraculeusement- on retrouve exactement l'expression de f dont on a déjà calculé le DL en $h = 0$: $f(h) = \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{4} + h^2\varepsilon(h)$. Ainsi

$$f(x) = f(h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x).$$

3. Attention cela ne fonctionne plus du tout en $-\infty$. Dans le calcul de la deuxième question on était on voisinage de $+\infty$ et nous avons considéré que x était positif. En $-\infty$ il faut faire attention au signe, par exemple $\sqrt{1+x^2} = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$.

Ainsi toujours en posant $h = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\big(1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\big)} \\
&= -\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h-\sqrt{1+h^2}} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+h^2\,\varepsilon(h)}{1+h-\big(1+\frac{1}{2}h^2+h^2\,\varepsilon(h)\big)} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+h^2\,\varepsilon(h)}{h-\frac{1}{2}h^2+h^2\,\varepsilon(h)} \\
&= -\frac{1}{h}\,\frac{1+\frac{1}{2}h^2+h^2\,\varepsilon(h)}{1-\frac{1}{2}h+h\,\varepsilon(h)} \\
&= -\frac{1}{h}\big(1+\frac{1}{2}h^2+h^2\,\varepsilon(h)\big)\times\big(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2+h^2\,\varepsilon(h)\big) \\
&= -\frac{1}{h}\big(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}h^2+h^2\,\varepsilon(h)\big) \\
&= -\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}h+h\,\varepsilon(h) \\
&= -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\,\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Ainsi un développement (asymptotique) de f en $-\infty$ est

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\,\varepsilon(x).$$

On en déduit par exemple que $f(x)$ se comporte essentiellement comme la fonction $-x$ en $-\infty$ et en particulier $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$.

Correction exercice IV-13.

(a) On a :

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+x^4\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\,\varepsilon(x).$$

On s'aperçoit qu'en fait un DL à l'ordre 2 suffit :

$$e^{x^2}-\cos x = \big(1+x^2+x^2\,\varepsilon(x)\big)-\big(1-\frac{x^2}{2}+v\big) = \frac{3}{2}x^2+x^2\,\varepsilon(x).$$

Ainsi $\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}+\varepsilon(x)$ et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

(b) On sait que

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+x^3\,\varepsilon(x).$$

Les DL sont distincts dès le terme de degré 2 donc un DL à l'ordre 2 suffit :

$$\ln(1+x)-\sin x = \left(x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)-\left(x+o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x),$$

et donc

$$\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} = -\frac{x}{2}+x\varepsilon(x),$$

et ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}=0.$$

(*c*) Sachant que

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x),$$

et

$$\sqrt{1-x^2} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+x^4\varepsilon(x),$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+x^4\varepsilon(x)\right)}{x^4}\\ &= \frac{\frac{1}{6}x^4+x^4\varepsilon(x)}{x^4}\\ &= \frac{1}{6}+\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

Correction exercice IV-14.

– Commençons en $x=0$, le DL de $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 2 est

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+o(x^2) = x+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x).$$

Par identification avec $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+x^2\varepsilon(x)$, cela entraîne donc $f(0)=0$, $f'(0)=1$ (et $f''(0)=1$).
L'équation de la tangente est donc $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ donc $y=x$.
La position par rapport à la tangente correspond à l'étude du signe de $f(x)-y(x)$ où $y(x)$ est l'équation de la tangente.

$$f(x)-y(x) = x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\ -\ x = \frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x).$$

Ainsi pour x suffisamment proche de 0, $f(x)-y(x)$ est du signe de $\frac{1}{2}x^2$ et est donc positif. Ainsi dans un voisinage de 0 la courbe de f est au-dessus de la tangente en 0.

– Faisons la même étude en $x = 1$.
Il s'agit donc de faire le DL de $f(x)$ en $x = 1$. On pose $x = 1 + h$ (de sorte que $h = x - 1$ est proche de 0) :

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln(1+x+x^2) &= \ln\big(1+(1+h)+(1+h)^2\big) \\
&= \ln\big(3+3h+h^2\big) \\
&= \ln\Big(3\big(1+h+\frac{h^2}{3}\big)\Big) \\
&= \ln 3 + \ln\big(1+h+\frac{h^2}{3}\big) \\
&= \ln 3 + \big(h+\frac{h^2}{3}\big) - \frac{\big(h+\frac{h^2}{3}\big)^2}{2} + h + \frac{h^2}{3}\big)^2 \varepsilon(h) \\
&= \ln 3 + h + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h) \\
&= \ln 3 + h - \frac{1}{6}h^2 + h^2 \varepsilon(h) \\
&= \ln 3 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_1 \varepsilon(x) = 0
\end{aligned}$$

La tangente en $x = 1$ est d'équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ et est donc donnée par le DL à l'ordre 1 : c'est $y = (x-1) + \ln 3$. Et la différence $f(x) - \big(\ln 3 + (x-1)\big) = -\frac{1}{6}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x)$ est négative pour x proche de 1. Donc, dans un voisinage de 1, le graphe de f est en-dessous de la tangente en $x = 1$.

Correction exercice IV-15.

1. La fonction g est définie en x sauf si $\sin(x) = 0$ ou $x = 0$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. On peut prolonger g en une fonction continue en 0 si et seulement si elle y admet une limite.
Elle est dérivable en ce point si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Toutefois, comme l'énoncé demande la position du graphe de g par rapport à sa tangente en 0, nous allons calculer directement le développement limité à l'ordre 2 de g en 0.
Le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + x^5 \epsilon_1(x)$.
Or $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + x^5 \epsilon_2(x)$. Donc $\sin^3 x = x^3 - \dfrac{x^5}{2} + \dfrac{13x^7}{120} + x^7 \epsilon_3(x)$ et $\dfrac{1}{\sin^3 x} = \dfrac{1}{x^3}(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9x^4}{40} + x^4 \epsilon_4(x))$.
On en déduit que : $\dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^3}(x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{31x^5}{120} + x^5 \epsilon_5(x)) - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{31x^2}{120} + x^2 \epsilon_5(x)$.
Ainsi on peut prolonger g en une fonction continue en 0 en posant $g(0) = \dfrac{1}{6}$.
La fonction ainsi obtenue est dérivable en 0 et sa dérivée est nulle. La tangente en 0 à son graphe est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{6}$. Enfin le graphe de g est au-dessus de cette droite au voisinage de 0.

Correction exercice IV-16. On rappelle que toutes les fonctions $\epsilon_i(x)$ vérifient $\epsilon_i(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

1. $\cos x \cdot \exp x$ (à l'ordre 3).
Les DLs de $\cos x$ à l'ordre 3 et de $\exp x$ à l'ordre 3 sont respectivement donnés par

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{1}{2!}x^2}_{=P(x)} + \epsilon_1(x)x^3 \quad \text{et} \quad \exp x = \underbrace{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3}_{=Q(x)} + \epsilon_2(x)x^3.$$

On multiplie P par Q et on alors

$$\begin{aligned}
P(x).Q(x) &= \left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\times\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3\right) \\
&= 1\cdot\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}x^2\cdot\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3\right) \\
&\quad 1+x-\frac{1}{3}x^3+\cdots
\end{aligned}$$

Rappelons qu'on n'a pas besoin de calculer les coefficients d'ordre supérieure à 4 car cherche un dl à l'ordre 3 donc tout terme en x^4, x^5 ou plus se met dans $\epsilon_3(x)x^3$. Ainsi le DL de $\cos x\cdot\exp x$ en 0 à l'ordre 3 est :

$$\cos x\cdot\ln(1+x)=1+x-\frac{1}{3}x^3+\epsilon_5(x)x^3.$$

2. $(\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4). Il s'agit juste de multiplier le dl de $\ln(1+x)$ par lui-même, i.e., de l'élever au carré. En fait si l'on réfléchit un peu on s'aperçoit qu'un dl à l'ordre 3 sera suffisant (car le terme constant est nul) :

$$\ln(1+x)=\underbrace{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}_{=p(x)}+x^3\epsilon_3(x),$$

On a $p(x)^2=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\epsilon(x)x^3\right)^2=x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+\cdots$. Rappelons encore une fois qu'on n'a pas besoin de calculer les coefficients d'ordre supérieure à 5 car cherche un DL à l'ordre 4 donc tout terme en x^5, x^6 ou plus se met dans $\epsilon_5(x)x^3$. Ainsi le DL de $(\ln(1+x))^2$ est

$$(\ln(1+x))^2=x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+x^4\epsilon_4(x).$$

3. $\dfrac{\operatorname{sh}x-x}{x^3}$ (à l'ordre 6). Pour le DL de $\dfrac{\operatorname{sh}x-x}{x^3}$ on commence par faire un dl du numérateur. Tout d'abord :

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9+x^9\epsilon(x),$$

et ainsi

$$\operatorname{sh}x-x=\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9+x^9\epsilon(x).$$

Il ne reste maintenant plus qu'à diviser par x^3 pour obtenir

$$\frac{\operatorname{sh}x-x}{x^3}=\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}x^2+\frac{1}{7!}x^4+\frac{1}{9!}x^6+x^6\epsilon(x).$$

Remarquez que nous avons commencé par calculer un DL du numérateur à l'ordre 9, pour obtenir après division un DL à l'ordre 6.

4. $\exp\big(\sin(x)\big)$ (à l'ordre 4). Dans la suite, on désigne par $o(x^k)$ toute fonction $x^k\varepsilon(x)$ où $\lim_0\varepsilon(x)=0$.
On sait que $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)$ et que $e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{4!}u^4+o(u^4)$.
Comme on veut obtenir le DL à l'ordre 4 de e^u où $u=\sin x$, on doit calculer u,u^2,u^3 et u^4. On a alors

$$u=\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots,\quad\text{et}\quad u^2=\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots\right)^2=x^2-\frac{1}{3}x^4+\ldots,$$

et de même

$$u^3 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots\big)^3 = x^3 + \dots \quad \text{et} \quad u^4 = x^4 + \dots$$

Enfin, on obtient

$$\begin{aligned}
\exp(\sin(x)) &= 1 + (x - \frac{1}{3!}x^3) + \frac{1}{2!}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) + \frac{1}{3!}(x^3) + \frac{1}{4!}(x^4) + o(x^4) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

5. $\sin^6(x)$ (à l'ordre 9).
   On sait $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$. Si l'on voulait calculer un dl de $\sin^2(x)$ à l'ordre 5 on écrirait :

   $$\sin^2(x) = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^2 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big) \times \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big) = x^2 - 2\frac{1}{3!}x^4 + o(x^5).$$

   En effet tous les autres termes sont dans $o(x^5)$.

   Le principe est le même pour $\sin^6(x)$. En effet, comme $(x - \frac{1}{3!}x^3)^6 = x^6 - x^8 + 0x^9 + \dots$, alors $\sin^6(x) = x^6 - x^8 + o(x^9)$.

6. $\ln\big(\cos(x)\big)$ (à l'ordre 6).
   Les DLs de $\cos x$ à l'ordre 6 et de $\ln(1+u)$ à l'ordre 6 sont

   $$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6), \quad \text{et} \quad \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6).$$

   On pose alors $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$ de sorte que

   $$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6).$$

   Il ne reste plus qu'à développer les u^k, "de façon économique" c'est à dire en écartant les puissances supérieures à 7, i.e.,

   $$u^2 = \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6\right)^2 = \dots = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \dots$$

   et

   $$u^3 = \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6\right)^3 = \dots = -\frac{1}{8}x^6 + \dots$$

   pour ce qui est des autres termes u^4, u^5, u^6, la puissance minimale est supérieure à 6 donc ils ce sont tous des $o(x^6)$. Et en fait développer $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 est suffisant.

   Il ne reste plus qu'à rassembler pour obtenir :

   $$\begin{aligned}
   \ln(\cos x) = \ln(1+u) &= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) \\
   &= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6\right) + \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right)\right) + \left(+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6 +\right)\right) + o(x^6) \\
   &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)
   \end{aligned}$$

7. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.

   Il suffit d'utiliser le DL de $\cos x$ à l'ordre 4 qui est $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$ ainsi que le DL de $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre 2 qui est $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$.

   On pose alors $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$, et on a alors $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + \ldots$. Ainsi

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+u} = 1-u+u^2+o(u^2) = 1-\big(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\big)+\big(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\big)^2+o(x^4) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4).$$

8. $\tan x$ (à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)). Pour le DL à l'ordre 5 de $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$, il suffit de multiplier la partie régulière du DL de $\sin x$ à l'ordre 5 par celle du DL de $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.

   Par contre, pour le DL de $\tan x$ à l'ordre 7, il faut d'abord refaire le DL de $\frac{1}{\cos x}$ mais cette fois à l'ordre 6 et qui est donnée par

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6)$$

   Après calcul, on trouve que le DL à l'ordre 7 de $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$.

9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ (à l'ordre 3).
   Si l'on pense bien à écrire $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\big(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\big)$ alors c'est juste des calculs utilisant les dl à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$ et $\exp x$. on trouve alors $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$.

Correction exercice IV-17. On expose deux méthodes :
Première méthode. On applique la formule de Taylor (autour du point $x = 1$)

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + (x-1)^3\,\varepsilon(x).$$

Comme $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ et donc $f'(1) = \frac{1}{2}$. Ensuite on calcule $f''(x)$ (puis $f''(1)$), $f'''(x)$ (et enfin $f'''(1)$). On trouve le dl de $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x = 1$:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + (x-1)^3\,\varepsilon(x).$$

Deuxième méthode. Posons $h = x - 1$ (et donc $x = h + 1$). On applique la formule du DL de $\sqrt{1+h}$ autour de $h = 0$ qui est donnée par

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + h^3\,\varepsilon(h).$$

Ainsi $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + (x-1)^3\,\varepsilon(x)$.

Correction exercice IV-18. Dans cette réponse, on expose également deux méthodes. De plus, on désigne par $o((x-\alpha)^k)$ toute fonction $(x-\alpha)^k\,\varepsilon(x)$ où $\lim_{\alpha}\varepsilon(x) = 0$. **Première méthode.** Cette méthode consiste à calculer $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\exp\sqrt{x}$, $g''(x)$, $g'''(x)$ puis $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à :

$$\exp(\sqrt{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3). \quad \text{avec } e = \exp(1).$$

Deuxième méthode. On commence par calculer le DL de $k(x) = \exp x$ en $x = 1$ ce qui est très facile car pour tout n, $k^{(n)}(x) = \exp x$ et donc $k^{(n)}(1) = e$. Ainsi, on obtient :

$$\exp x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Pour obtenir le DL $g(x) = h(\sqrt{x})$ en $x = 1$ on écrit d'abord :

$$\exp(\sqrt{x}) = e + e(\sqrt{x}-1) + \frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3 + o((\sqrt{x}-1)^3).$$

Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ par son DL obtenu dans l'exercice précédent et on alors on retrouve

$$\exp(\sqrt{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3). \quad \text{avec } e = \exp(1).$$

Correction exercice IV-19. Cette fois ci, on n'exposera pas la première méthode comme dans les deux précédents exercices.
Posons $u = x - \frac{\pi}{3}$ (et donc $x = \frac{\pi}{3} + u$). Alors

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{3} + u) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(u) + \sin(u)\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u.$$

On connaît les DL de $\sin u$ et $\cos u$ autour de $u = 0$ (car on cherche un DL autour de $x = \frac{\pi}{3}$) donc

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{2!}u^2 + o(u^3)\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

Maintenant pour le DL de la forme $\ln(a+t)$ en $v = 0$ on se ramène au dl de $\ln(1+t)$ de la façon suivante :

$$\ln(a+t) = \ln\left(a(1+\frac{t}{a})\right) = \ln a + \ln(1+\frac{t}{a}) = \ln a + \frac{t}{a} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{t^3}{a^3} + o(t^3).$$

On applique ceci à $h(x) = \ln(\sin x)$ en posant toujours $u = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
h(x) = \ln(\sin x) &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \cdots \quad \text{on effectue le DL du } \ln \text{ et on regroupe les termes} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

On trouve finalement que :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3).$$

4.2 Exercices non corrigés

Enoncé IV-01. Etudier la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée pour les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

1.) $f(x) = x|x|$. *2.)* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *3.)* $f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ ch(\sqrt{-x}) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Enoncé IV-02. La fonction $x \to \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Enoncé IV-03. Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h :\mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

Enoncé IV-04. Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilté de

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

Enoncé IV-05. Soit $f : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in]0, \pi/2] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.
2. Etablir que $\forall\ x \in [0, \pi/2]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.

Enoncé IV-06. Soit $a \in \mathbb{R}$, f une application définie au voisinage de a à valeurs réelles ; lorsque la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ quant h tend vers 0 existe, on la note $f_s^{'}(a)$, et on l'appelle la dérivée symétrique de a.

1. Montrer que si $f_d^{'}(a)$ et $f_g^{'}(a)$ existent, alors $f_s^{'}(a)$ existe et $f_s^{'}(a) = \dfrac{1}{2}(f_d^{'}(a) + f_g^{'}(a))$.
2. Montrer par un exemple que la réciproque du résultat précédent est fausse.

Enoncé IV-07. Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert contenant a, et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée de classe C^2 sur I. En utilisant un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de a, calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2}(f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)).$$

Enoncé IV-08. Etablir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}],\ x \leq \tan x \leq 2x$.
2. $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. $\forall x > 0,\ x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.
4. $0 < b \leq a \Longrightarrow \frac{a-b}{a} \leq \ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$.
5. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{-2}, |e^a - e^b| \leq |a-b|$.

Enoncé IV-09. Calculer la fonction dérivée d'ordre n de $h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Enoncé IV-10. Soient u et v des fonctions dérivables à l'ordre n sur l'intervalle I

1. montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n du produit uv sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

2. En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$(a)\ x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad (b)\ x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad (c)\ x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad (d)\ x \mapsto x^{n-1}\ln x.$$

Enoncé IV-11. Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 où

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$$

Enoncé IV-12. Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Enoncé IV-13. Etudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Enoncé IV-14. Soient a et b deux réels donnés. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles. (*indication : on peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.*)

Enoncé IV-15. Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Enoncé IV-16. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, a+2h]$. Par introduction de la fonction $g(t) = f(a+t+h) - f(a+t)$ montrer qu'il existe α dans $]0,2[$ tel que $f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(a+\alpha h)$.

Enoncé IV-17. étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geq (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \geq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}}$.

Enoncé IV-18. Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right), \qquad \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotan} x,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4)-1}{x^4 e^x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx},$$

Enoncé IV-19. Etudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. $g : x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
3. $h : x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Enoncé IV-20. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles distinctes si n est pair, et plus de trois racines réelles distinctes si n est impair.

Enoncé IV-21. Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

Enoncé IV-22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Enoncé IV-23. Etudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.
2. $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Enoncé IV-24. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}$.

Enoncé IV-25. Soient u, v, f les fonctions définies par $u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$, $v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $f(x) = u(x) - v(x)$.

1. Donner un équivalent de f au voisinage de $-\infty$, en déduire $\lim_{-\infty} f$.

2. Déteminer $\lim_{x\to-\infty} u(x)-x$, $\lim_{x\to-\infty} v(x)+x$. En déduire l'équation de la droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par rapport à cette asymptote.

3. Même étude en $+\infty$.

Enoncé IV-26. Soient $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$ et $g : x \mapsto (x+1)\exp(\dfrac{1}{x-1})$ deux fonctions. Déterminer si leurs graphes respectifs ont des asymptotes puis la position de ces graphes par rapport à celles-ci.

Enoncé IV-27. Former le développement limité en 0 à l'ordre n de chacune des fonctions définies ci-dessous :

1.) $f : x \longmapsto \tan x,\ n=5.$ *2.)* $f : x \longmapsto \tan^2 x,\ n=6.$

3.) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x},\ n=4.$ *4.)* $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^x-1},\ n=4.$

5.) $f : x \longmapsto \ln(1-x+x^2),\ n=6.$ *6.)* $f : x \longmapsto \sqrt{1+\sin x},\ n=3.$

Enoncé IV-28. On pose $f(x) = \dfrac{(x+2)e^{-x}}{(x+1)^2}$, $g(x) = \dfrac{2-x+x^2}{1+2x}$ et $h(x) = \dfrac{2+x-3x^2}{1+3x+2x^2}$

1. Former les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions f, g et h.

2. Des deux fonctions g et h, laquelle réalise la "meilleure approximation" de f au voisinage de 0 ?

Enoncé IV-29. Former le développement limité à l'ordre n et au voisinage de x_0 de chacune des fonctions définies ci-dessous :

1.) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2},\ n=5,\ x_0=1.$ *2.)* $f : x \longmapsto \sin^2(\dfrac{x}{2}),\ n=4,\ x_0=\frac{\pi}{3}.$

3.) $f : x \longmapsto \tan x,\ n=3,\ x_0=\frac{\pi}{4}.$ *4.)* $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2},\ n=4,\ x_0=+\infty.$

Enoncé IV-30. Calculer lorsque x tend vers 0, les limites des expressions suivantes :

1.) $\dfrac{x(2+\cos x)-3\sin x}{x^3(1-\cos x)}.$ *2.)* $\dfrac{2}{x(e^x-1)}-\dfrac{2}{x^2}.$

3.) $\dfrac{2\tan(x)-\tan(2x)}{x(1-\cos(3x))}.$ *4.)* $\dfrac{\sinh x+\sin x-2x}{x(\cosh x+\cos x-2)}.$

Enoncé IV-31. Dans un repère (O,x,y), soit $\mathscr{C}_f$ la courbe d'équation $y = f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-3}$:

1. Former le développement limité à l'ordre 3 et au voisinage de 0 de $f(-1+t)$.

2. En déduire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $x_0=-1$ et la nature du point $(-1,1)$.

Enoncé IV-32. Etudier, lorsque $|x| \leftrightarrow \infty$, les branches infinies des courbes suivantes d'équation $y = f(x)$ dans les cas :

1. $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.
2. $g(x) = (x+1)e^{\frac{1}{2x+1}}$.
3. $h(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

Enoncé IV-33. Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier, au voisinage du point d'abscisse 0, la position de la tangente (T) par rapport à la courbe $(\mathscr{C}_f)$. On rappelle que $\arcsin x = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + x^5\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Donner les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions $x \longmapsto \arcsin x - x$ et $x \longmapsto x \arcsin x$.
3. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$.
4. Donner l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 et étudier sa position par rapport à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Chapitre 5

Fonctions trigonométriques, hyperboliques et réciproques.

5.1 Exercices corrigés

5.1.1 Enoncé des exercices

Exercice V-01. Pour $x \in \mathbb{R}$, vérifier que chacune des expressions

$$(a)\ \ \arcsin x + \arccos x, \quad (b)\ \ \arctan x + \text{arccot}\ x, \quad \text{et } (c)\ \ \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}).$$

est une constante réelle que l'on déterminera.

Exercice V-02. Tracer les courbes d'équations

$$(a)\ \ y = \sin(\arcsin x) \quad \text{et} \quad (b)\ \ y = \arcsin(\sin x).$$

Exercice V-03. Démontrer les inégalités suivantes :

$$(a)\ \ \arcsin a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1, \quad \text{et} \quad (b)\ \ \arctan a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

Exercice V-04. Etablir les égalités suivantes :

$$(a)\ \ 2\arctan(\frac{1}{2}) = \arctan(\frac{4}{3}) \quad (b)\ \ \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4} \quad (c)\ \ \arcsin(\frac{5}{13}) + \arcsin(\frac{3}{5}) = \arcsin(\frac{56}{65}).$$

Exercice V-05. Ecrire sous forme d'expression algébrique

$$(a)\quad \sin(\arccos x), \quad (b)\quad \cos(\arcsin x), \quad (c)\quad \cos(2\arcsin x).$$

Exercice V-06. Résoudre les équations suivantes :

1. $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$.
2. $\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}$.
3. $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice V-07. Calculer :

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{sh}^3 x) \quad (b) \quad \lim_{x\to+\infty}(x - \ln(\mathrm{ch}\, x)).$$

Exercice V-08. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \arctan(\mathrm{sh}\, x)$.

1. Etablir les relations $\tan t = \mathrm{sh}\, x$, $\quad \frac{1}{\cos t} = \mathrm{ch}\, x$ et $\quad \sin t = \tanh x$.
2. Montrer que $x = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Indication : Pour la première question calculer $\frac{1}{\cos^2 t}$. *Pour la seconde question, vérifier que* $y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ *est bien défini et calculer* $\mathrm{sh}\, y$.

Exercice V-09. *On considère la fonction numérique* f *telle que :* $f(x) = (x^2 - 1)\arctan\frac{1}{2x-1}$ *et on appelle* $(\mathscr{C})$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

1. *Quel est l'ensemble de définition* $\mathscr{D}$ *de* f *?*
2. *Exprimer sur* $\mathscr{D} \setminus \{0\}$, *la dérivée de* f *sous la forme :* $f'(x) = 2xg(x)$.
3. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ *et en déduire le tableau de variation de* g.
4. *Dresser le tableau de variation de* f.

Exercice V-10.

1. *Montrer que pour tout réel x non nul, on a :* $\tanh x = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh x}$.
2. *En déduire la valeur de* $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \tanh(2^k x)$ *pour* n *entier naturel non nul et* x *réel non nul donnés puis calculer la limite de* (u_n).

Exercice V-11. *Simplifier les expressions suivantes*

1. $\sin(2\arcsin x)$,
2. $\cos(2\arccos x)$,
3. $\sin^2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$,

Exercice V-12. *Simplifier les expressions suivantes*

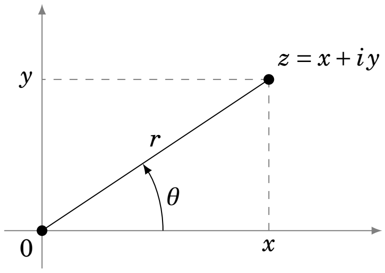
1. $\ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$,
2. $\mathrm{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$,

3. $\operatorname{argch}(2x^2-1)$,
4. $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right)$,
5. $\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}$.

Exercice V-13. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :*

1. $\operatorname{ch}x = 2$,
2. $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$,
3. $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

Exercice V-14. *Soit $z = x+iy$ un nombre complexe, où $x = \Re z$ et $y = \Im z$. On sait que si z est non nul, on peut l'écrire de façon unique sous la forme $z = x+iy = re^{i\theta}$, où $\theta \in]-\pi,\pi]$ et $r = \sqrt{x^2+y^2}$.*



1. *Montrer que si $x > 0$, alors $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.*
2. *Montrer que si $\theta \in]-\pi,\pi[$, alors $\theta = 2\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$.*
3. *En déduire que si z n'est pas réel négatif ou nul, on a l'égalité $\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.*

Exercice V-15. *Simplifier les expressions suivantes :*

1. *(a)* $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}x)$, (b) $\tanh(\operatorname{argsh}x)$, (c) $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh}x)$.
2. *(a)* $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}x)$, (b) $\tanh(\operatorname{argch}x)$, (c) $\operatorname{ch}(3\operatorname{argch}x)$.

5.1.2 Correction des exercices

Correction exercice V-01. *En examinant les dérivées des fonctions trigonométrique réciproques, on remarque que :*

(a) *Pour tout* $x \in]-1,\ 1[$, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos' x$. *Ainsi, pour tout* $x \in]-1,\ 1[$, $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$.
On en déduit alors que $\exists c \in \mathbb{R}$ ($c = constante$) *tel que* $\arcsin x + \arccos x = c$. *On détermine alors c en prenant (par exemple)* $x = 0$ *et on a* $c = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. *Finalement*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\quad \forall x \in]-1,\ 1[.$$

(b) *De la même manière que précédemment, on vérifie que* $\arctan x + \operatorname{arccot}\ x = \frac{\pi}{2},\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Si On ne veut pas utiliser la réponse précédente, on peut répondre de la manière suivante :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = -\operatorname{arccot}' x$. *Ainsi, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $(\arctan x + \operatorname{arccot}\ x)' = 0$.
On en déduit alors que $\exists c \in \mathbb{R}$ ($c = constante$) *tel que* $\arctan x + \operatorname{arccot}\ x = c$. *On détermine alors c en prenant par exemple* $x = 1$ *et on a* $c = \arctan 1 + \operatorname{arccot}\ 1 = \frac{\pi}{2}$. *Finalement*

$$\arctan x + \operatorname{arccot}\ x = \frac{\pi}{2},\quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) *Remarquons que la fonction* $x \longmapsto \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$ *est définie sur* $\mathbb{R}^*$ *et qu'elle est impaire.*
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\left(\arctan(\frac{1}{x})\right)' = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{-1}{1+x^2} = -\arctan' x$. *On en déduit alors que pour tout* $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $(\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}))' = 0$.
Ainsi, $\exists c \in \mathbb{R}$ ($c = constante$) *tel que* $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = c$ *pour tout* $x > 0$. *On détermine alors c en prenant (par exemple)* $c = 1$ *et on a* $c = \arctan 1 + \arctan 1 = \dfrac{\pi}{2}$. *Finalement*

$$\begin{cases} \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}, & \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \\ \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}, & \forall x \in \mathbb{R}^{*-}. \end{cases}$$

Correction exercice V-02. *Posons* $f(x) = \sin(\arcsin x)$ *et* $g(x) = \arcsin(\sin x)$ *et remarquons alors que les domaines de définition de f et g sont respectivement* $D_f = [-1,\ 1]$ *et* $D_g = \mathbb{R}$.

(a) *Puisque la fonction* $x \longmapsto \arcsin x$ *est la bijection réciproque de la fonction* $x \longmapsto \sin x$ *sur* $D_f = [-1,\ 1]$, *alors* $f(x) = x$ *pour tout* $x \in D_f$.

(b) *Puisque la fonction* $x \longmapsto \sin x$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et est impaire et périodique de période* 2π, *alors la fonction* $x \longmapsto g(x)$ *est également impaire et périodique de période* 2π. *Etudions donc la fonction g sur l'intervalle* $[0,\ \pi]$.

- *Cas 1.* $x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$
  Pour $x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$, *la fonction* $x \longmapsto \sin x$ *est bijective de* $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ *sur* $[0,\ 1]$ *et sa bijection réciproque est la restriction de la fonction* $x \longmapsto \arcsin x$ *à l'intervalle* $[0,\ 1]$. *Ainsi,* $g(x) = x$ *pour tout* $x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$.

- *Cas 2.* $x \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$
  Pour $x \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$, *on a* $\sin x = \sin(\pi - x)$, *or* $X = \pi - x \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$ *et donc, en utilisant le résultat obtenu dans le cas 1, on a* $g(x) = g(X) = X = \pi - x$. *Ainsi,* $g(x) = \pi - x$ *pour tout* $x \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$.

Ainsi le tracé des courbes des fonction f et g est comme suit :

Correction exercice V-03.

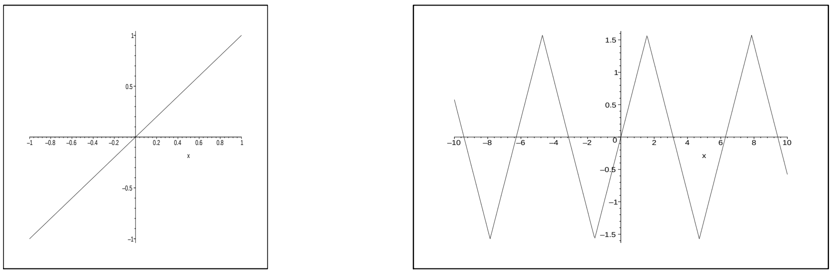


FIGURE 5.1 – Courbes des fonctions $f = \sin(\arcsin .)$ (à gauche) et $g = \arcsin(\sin .)$ (à droite)

(a) Soit $f(a) = \arcsin a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ *sur* $]0,1[$. *Alors* $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}(1-a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{-a^2}{1-a^2}$ *et donc* $f'(a) \leq 0$.
Ainsi f *est strictement décroissante et* $f(0) = 0$ *et par suite donc* $f(a) < 0$ *pour tout* $a \in]0,1[$.

(b) Posons $g(a) = \arctan a - \frac{a}{1+a^2}$. *On a alors* $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$. *Donc* g *est strictement croissante. Comme* $g(0) = 0$, *alors* g *est strictement positive sur* $]0,+\infty[$.

Correction exercice V-04.

(a) *On pose* $a = \arctan(\dfrac{1}{2})$ *et* $b = \arctan(\dfrac{4}{3})$, *ainsi* $\tan(a) = \dfrac{1}{2}$ *et* $\tan(b) = \dfrac{4}{3}$.
On sait que $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$, *ainsi* $\tan(2a) = \dfrac{4}{3}$. *Et comme* $\tan(2a) = \tan(b)$, *alors* $\exists k \in \mathbb{Z};\ 2a = b + k\pi$.
D'autre part :

$$\begin{aligned} 0 < a &= \arctan(\frac{1}{2}) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \textit{soit } 0 < 2a < \frac{\pi}{2}. \\ 0 < b &= \arctan(\frac{4}{3}) < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

Ainsi, $(\tan(2a) = \tan(b)$ *et* $2a,\ b \in]0, \dfrac{\pi}{2}[) \implies 2a = b$.

(b) *On pose* $a = \arcsin(\dfrac{1}{\sqrt{5}})$ *et* $b = \arctan(\dfrac{1}{3})$, *ainsi* $\sin(a) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *et* $\tan(b = \dfrac{1}{3}$.
On sait que $\tan(a) = \dfrac{2\sin(a)}{\sqrt{1-\sin^2(a)}}$, *ainsi* $\tan(a) = \dfrac{1}{2}$. *De plus* $\tan(\dfrac{\pi}{4} - b) = \dfrac{1-\tan(b)}{1+\tan b} = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, $(\tan(a) = \tan(\dfrac{\pi}{4} - b)$ *et* $a,\ \frac{\pi}{4} - b \in]0, \frac{\pi}{2}[) \implies a = \frac{\pi}{4} - b$.

(c) *On pose* $a = \arcsin(\dfrac{5}{13})$, $b = \arcsin(\dfrac{3}{5})$ *et* $c = \arcsin(\dfrac{56}{65})$, *ainsi* $\sin(a) = \frac{5}{13}$, $\sin(b) = \frac{3}{5}$ *et* $\sin(c) = \frac{56}{65}$.
On a $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) = \dfrac{5}{13}\sqrt{1-(\dfrac{3}{5})^2} + \dfrac{3}{5}\sqrt{1-(\dfrac{5}{13})^2} = \dfrac{56}{65} = \sin(c)$.
Or $0 < a = \arcsin(\dfrac{5}{13}) < \arcsin(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$, *et* $0 < b = \arcsin(\dfrac{3}{5}) < \arcsin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\pi}{3}$
Ainsi $(\sin(a+b) = \sin(c)$ *et* $a+b,\ c \in]0, \dfrac{\pi}{2}[) \implies a + b = c$.

Correction exercice V-05.

(a) *On a pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$, *donc* $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$.
Posons $y = \arccos x$, *il vient que* $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. *Or* $\arccos x \in [0,\pi]$, *donc* $\sin(\arccos x)$ *est positif et finalement* $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$.

(b) *De la même manière on trouve* $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. *Or* $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *donc* $\cos(\arcsin x)$ *est positif et finalement* $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-x^2}$.

Ces deux égalités sont à connaître ou à savoir retrouver très rapidement :

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x).$$

(c) *Enfin, puisque* $\cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y$, *on obtient avec* $y = \arcsin x$,

$$\cos(2\arcsin x) = (\sqrt{1-x^2})^2 - x^2 = 1 - 2x^2.$$

Correction exercice V-06.

1. *On vérifie d'abord que* $2\arccos\frac{3}{4} \in [0,\pi]$ *(sinon, l'équation n'aurait aucune solution). En effet, par définition, la fonction* arccos *est décroissante sur* $[-1,1]$ *à valeurs dans* $[0,\pi]$, *donc puisque* $\frac{1}{2} \le \frac{3}{4} \le 1$, *on a* $\frac{\pi}{3} \ge \cos\left(\frac{3}{4}\right) \ge 0$.
Puisque par définition $\arccos x \in [0,\pi]$, *on obtient en prenant le cosinus :*
$$\arccos x = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow x = \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right).$$
En appliquant la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$, *on arrive donc à une unique solution* $x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$.

2. *Vérifions d'abord que* $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5} \le \frac{\pi}{2}$. *En effet, la fonction* arcsin *est strictement croissante et* $0 < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ce qui donne $0 < \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) < \frac{\pi}{6} < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{4}$, *d'où l'encadrement*
$$0 + \frac{\pi}{6} < \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5} \le \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}.$$
Puisque par définition on aussi $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *il vient en prenant le sinus :*
$$\begin{aligned} & \arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5} \\ \Longleftrightarrow \quad & x = \sin\left(\arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & x = \frac{3}{5}\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5}\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$
La dernière équivalence vient de la formule de $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$ *et de l'identité* $\sin\left(\arcsin u\right) = u$.
En utilisant la formule $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, *on obtient une unique solution :* $x = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}} + \frac{2}{5}\frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{21}+8}{25}$.

3. *Supposons d'abord que x est solution. Remarquons d'abord que x est nécessairement positif, puisque* $\arctan x$ *a le même signe que x.*
Alors, en prenant la tangente des deux membres, on obtient $\tan\left(\arctan(2x) + \arctan(x)\right) = 1$.

En utilisant la formule donnant la tangente d'une somme : $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$*, on obtient* $\frac{2x+x}{1-2x\cdot x} = 1$*, et finalement* $2x^2+3x-1=0$ *qui admet une unique solution positive* $x_0 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$*. Ainsi, si l'équation de départ admet une solution, c'est nécessairement* x_0*.*
Maintenant, posons $f(x) = \arctan(2x)+\arctan(x)$ *qui est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*. Comme* $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\pi$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\pi$*, on sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires que* f *prend la valeur* $\frac{\pi}{4}$ *au moins une fois (et en fait une seule fois, puisque* f *est strictement croissante comme somme de deux fonctions strictement croissantes). Ainsi l'équation de départ admet bien une solution, qui est* x_0*.*

Correction exercice V-07.

(a) *Par la formule du binôme de Newton nous avons* $\operatorname{ch}^3 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}\right)$*. Et de même* $\operatorname{sh}^3 x = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x}\right)$*. Donc* $e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) = \frac{1}{8}e^{-x}(6e^x+2e^{-3x}) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}$ *qui tend vers* $\frac{3}{4}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$*.*

(b) *On a :* $x-\ln(\operatorname{ch} x) = x-\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2}) = x-\ln(e^x+e^{-x})+\ln 2 = x-\ln(e^x(1+e^{-2x}))+\ln 2 = x-x+\ln(1+e^{-2x})+\ln 2 = \ln(1+e^{-2x})+\ln 2$.
Lorsque $x\to+\infty$, $\ln(1+e^{-2x})\to 0$ *donc* $x-\ln(\operatorname{ch} x)\to\ln 2$.

Correction exercice V-08.

1. (a) *Remarquons d'abord que, par construction,* $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*,* t *est donc dans le domaine de définition de la fonction* tan.
   En prenant la tangente de l'égalité $t = \arctan(\operatorname{sh} x)$ *on obtient directement* $\tan t = \tan\left(\arctan(\operatorname{sh} x)\right) = \operatorname{sh} x$.
   (b) *On a également,* $\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t = 1+\tan^2\left(\arctan(\operatorname{sh} x)\right) = 1+\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$*. Or la fonction* ch *ne prend que des valeurs positives, et* $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *donc* $\cos t>0$*. Ainsi* $\frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x$.
   (c) *Enfin,* $\sin t = \tan t\cdot\cos t = \operatorname{sh} x\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \tanh x$.
2. *Puisque* $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*, on a* $0<\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$*, donc* $\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ *est bien défini et strictement positif. Ainsi* $y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *est bien défini.*
   Ensuite :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} y &= \frac{e^y-e^{-y}}{2}\\
&= \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\
&= \frac{-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

car $\sin(2u) = 2\cos u\sin u$ *et* $\cos(2u) = \cos^2 u-\sin^2 u$.
Enfin, puisque $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ *et* $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t$*, on a* $\operatorname{sh} y = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = \operatorname{sh} x$.
Puisque la fonction sh *est bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, on en déduit* $y = x$.
Conclusion : $x = y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Correction exercice V-09.

1. *f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.*
2. *Pour x élément de $\mathscr{D}$,*

$$f'(x) = 2x \arctan \frac{1}{2x-1} + (x^2-1)\frac{-2}{(2x-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x\arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x) = 2xg(x)$ où $g(x) = \arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x}\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3. *Pour x élément de $\mathscr{D} \setminus \{0\}$,*

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(x^2-2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4-4x^3+9x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7} > 0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.
En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0, donc g est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.
Quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2} < 0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$.
Ainsi, g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0,\frac{1}{2}[$ en un certain réel x_0 de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.
La fonction g est de plus strictement négative sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0,x_0[$.
Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty,0[$. Enfin, puisque $f'(x) = 2xg(x)$ pour $x \neq 0$, on a les résultats suivants :

– *sur $]-\infty,0[$, $f' > 0$, sur $]0,x_0[$, $f' > 0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f' < 0$, sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f' > 0$. Comme $f'(0) = 1 > 0$, on a donc : sur $]-\infty,x_0[$, $f' > 0$,*
– *sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f' < 0$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f' > 0$. f est strictement croissante sur $]-\infty,x_0]$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[x_0,\frac{1}{2}\right[$.*

Correction exercice V-10.

1. *On sait que pour tout réel x, $\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\frac{1+\tanh^2 x}{\tanh x} = \frac{2}{\tanh(2x)}$ ou encore $\tanh x + \frac{1}{\tanh x} = \frac{2}{\tanh(2x)}$ ou finalement*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \tanh x = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh x}.$$

2. *Soient n un entier naturel non nul et x un réel non nul. D'après ce qui précède,*

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh(2^k x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^{k+1}}{\tanh(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k x)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{\tanh(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\tanh(2^k x)} \\ &= \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\tanh x}. \end{aligned}$$

   Ensuite, pour $x > 0$, $\tanh(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Correction exercice V-11.

1. *Pour tout réel x de $[-1,1]$,* $\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

2. *Pour tout réel x de $[-1,1]$,* $\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$.

3. *Pour tout réel x de $[-1,1]$,* $\sin^2(\frac{1}{2}\arccos x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\arccos x)) = \frac{1-x}{2}$.

Correction exercice V-12.

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :* $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = Max\{x, -x\}$. *Donc,* $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ *et* $\sqrt{x^2+1} - x > 0$.
   L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{x^2+1}-x) &= \ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right) = \ln(x^2+1-x^2) \\ &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

2. *L'expression proposée est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire. Soit alors $x > 0$.*

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) &= \ln\left(\frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2} + 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2})\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2 - 1 + \sqrt{(x^2+1)^2})\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2 - 1 + x^2 + 1)\right) \\ &= \ln x \end{aligned}$$

   Par imparité, si $x < 0$, $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = -\ln(-x)$. *En résumé, en notant ε le signe de x,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \varepsilon \ln|x|.$$

3. *L'expression proposée existe si et seulement si* $2x^2 - 1 \in [1, +\infty[$ *ou encore* $x^2 \in [1, +\infty[$ *ou enfin* $x \in$

$]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. *Cette expression est paire. Soit donc* $x\in[1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}(2x^2-1) &= \ln(2x^2-1+\sqrt{(2x^2-1)^2-1}) = \ln(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}) \\
&= \ln\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right) \\
&= 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\
&= 2\operatorname{argch} x
\end{aligned}$$

Par parité, on en déduit que

$$\forall x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[,\ \operatorname{argch}(2x^2-1) = 2\operatorname{argch}|x|.$$

4. *Soit* $x\in\mathbb{R}$, *alors*

$$\begin{aligned}
\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\ \textit{existe} &\Leftrightarrow \operatorname{ch}x+1\neq 0\ \textit{et}\ \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\geq 0\ \textit{et}\ \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\in]-1,1[\\
&\Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\in[0,1[
\end{aligned}$$

Mais, d'une part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\geq 0$ *et d'autre part,* $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} = \frac{\operatorname{ch}x+1-2}{\operatorname{ch}x+1} = 1-\frac{2}{\operatorname{ch}x+1} < 1$.
L'expression proposée existe donc pour tout réel x et est paire. Ensuite, pour x réel positif, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}{1-\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}} &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}-\sqrt{\operatorname{ch}x-1}} \\
&= \frac{(\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1})^2}{(\operatorname{ch}x+1)-(\operatorname{ch}x-1)} = \frac{2\operatorname{ch}x+2\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{2} \\
&= \operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x} = \operatorname{ch}x+|\operatorname{sh}x| = \operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x = e^x
\end{aligned}$$

Par suite, x étant toujours positif,

$$\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}.$$

Par parité, on a alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right) = \frac{|x|}{2}.$$

*(**Remarque.** Pour 2), 3) et 4), on peut aussi dériver chaque expression)*

5. *Pour* $x>0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Correction exercice V-13.

1. $\operatorname{ch}x = 2 \Leftrightarrow x = \pm\operatorname{argch}2 = \pm\ln(2+\sqrt{2^2-1}) = \pm\ln(2+\sqrt{3})$. *Les solutions sont* $\ln(2+\sqrt{3})$ *et* $-\ln(2+\sqrt{3})$ *(ou encore* $\ln(2-\sqrt{3})$ *car* $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$*).*

2. *Une solution est nécessairement dans* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. *Soit donc* $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}) \quad &\Rightarrow \quad \sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}))\\
&\Leftrightarrow \quad 2x = x\sqrt{1-(x\sqrt{2})^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2-2x^2} = 2\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } 1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 4\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 1+4x^2\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } 4(4x^4-6x^2+2) = (4x^2+1)^2\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}
\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *(ce qui est le cas puisque* $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leq \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$*) et* $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$ *est dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Mais,*

$$0 \leq \arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin\sqrt{\frac{7}{16}} \leq 2\arcsin\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2},$$

et donc $\arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
De même, par parité, $\arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ *ce qui achève la résolution.*

$$\mathscr{S} = \left\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.$$

3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *alors* $\arcsin x$ *existe si et seulement si* $x \in [-1,1]$. *Ensuite,*

$$\begin{aligned}
\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \textit{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \textit{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]\\
&\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \textit{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0,1]\\
&\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \textit{ et } 4x^2(1-x^2) \leq 1\\
&\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \textit{ et } 4x^4-4x^2+1 \geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \textit{ et } (2x^2-1)^2 \geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1,1]$, $\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}))$, *et de plus,* $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Par suite,*

$$\begin{aligned}
x \textit{ solution} \quad &\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \textit{ et } 2\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\\
&\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \textit{ et } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Correction exercice V-14.

1. *Si* $x > 0$*, alors* $\frac{y}{x}$ *est bien défini et* $\arctan \frac{y}{x}$ *aussi. Comme* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$*, on a bien* $\frac{y}{x} = \tan\theta$*. Puisque par hypothèse* $\theta \in]-\pi,\pi]$ *et que l'on a supposé* $x > 0$*, alors* $\cos\theta > 0$*. Cela implique* $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*. Donc* $\theta = \arctan(\tan\theta) = \arctan\frac{y}{x}$*. (Attention ! Il est important d'avoir* $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *pour considérer l'identité* $\arctan(\tan\theta) = \theta$*.)*

2. *Si* $\theta \in]-\pi,\pi[$ *alors* $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*, donc* $\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$*. Or*

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{1+\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2},$$

d'où $\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$*.*

3. *Remarquons que* $z = x+iy$*, supposé non nul, est un nombre réel négatif si et seulement si (*$x = r\cos\theta < 0$ *et* $y = r\sin\theta = 0$*), c'est-à-dire* $\theta = \pi$*.*
Par conséquent, dire que z n'est pas réel négatif ou nul signifie que $\theta \in]-\pi,\pi[$*. On a alors* $x+\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ *(sinon, on aurait* $\sqrt{x^2+y^2} = -x$*, et donc* $y = 0$ *et* $x \leq 0$*) et*

$$\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta + r} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}.$$

finalement par la question précédente :

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Correction exercice V-14.

1. (*a*) *On sait que* $\operatorname{ch}^2 u = 1+\operatorname{sh}^2 u$*. Comme de plus la fonction* ch *est à valeurs positives,* $\operatorname{ch} u = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}$ *et donc* $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} x)} = \sqrt{1+x^2}$*.*

   (*b*) *Alors* $\tanh(\operatorname{argsh} x) = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$*.*

   (*a*) *Et* $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x) = 2\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = 2x\sqrt{1+x^2}$*.*

2. *On pourrait, comme pour la question précédente, appliquer les formules trigonométriques hyperboliques. Pour changer, on va plutôt utiliser les expressions explicites des fonctions hyperboliques réciproques. Supposons* $x \geq 1$*, pour que* $\operatorname{argch} x$ *soit bien défini, alors on a la formule (à connaître) :*

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

(a) *Ainsi :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) &= \frac{e^{\operatorname{argch} x} - e^{-\operatorname{argch} x}}{2} \\
&= \frac{x + \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2} \\
&= \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{2\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)\big(x - \sqrt{x^2-1}\big)} \\
&= \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{2\big(x^2 - (x^2-1)\big)} \\
&= \sqrt{x^2-1}
\end{aligned}$$

(b) *Donc* $\tanh(\operatorname{argch} x) = \dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x)} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

(c) *Enfin, si* $u = \operatorname{argch} x$ *: alors* $\operatorname{ch}(3u) = \operatorname{ch}(2u+u) = \operatorname{ch}(2u)\operatorname{ch} u + \operatorname{sh}(2u)\operatorname{sh} u$*, où*

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(2u) = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u = x^2 + (x^2-1) = 2x^2 - 1 \\ \operatorname{sh}(2u) = 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2x\sqrt{x^2-1} \end{cases}$$

Donc $\operatorname{ch}(3\operatorname{argch} x) = (2x^2-1)x + 2x\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1} = x(4x^2-3)$.

5.2 Exercices non corrigés

Enoncé V-01. *Résoudre les équations suivantes :*

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

Enoncé V-02. *Soient les fonctions* $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ *et* $g : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1. *Simplifier les expressions de* $f(x)$ *et* $g(x)$.
2. *Construire les graphes de* f *et* g.

Enoncé V-03. *Etudier la fonction :* $\phi : x \to \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

Enoncé V-04. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation d'inconnue* x *:* $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

Enoncé V-05. *Donner un expression plus simple de :*

$$(a)\;\; y = \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}; \quad (b)\;\; y = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}); \quad (c)\;\; y = \operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Enoncé V-06. *Calculer les sommes*

$$(a)\;\; 1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \cdots + \operatorname{ch} nx \quad \textit{et} \quad (b)\;\; 1 + \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx.$$

Enoncé V-07. *Simplifier* $\operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Enoncé V-08. *Vérifier les égalités*

$$(a)\;\; 2\operatorname{argth}\tan x = \operatorname{argth}\sin 2x, \qquad (v)\;\; \operatorname{argsh}(3x+4x^3) = 3\operatorname{argsh} x.$$

Enoncé V-09. *Expliciter au moyen de la fonction logarithme* $\operatorname{argch}\frac{1}{x}$ *et* $\operatorname{argsh}\frac{1}{x}$.

Enoncé V-10. *Déterminer* $\lim\limits_{+\infty}(x - \ln(\operatorname{ch} x))$.

Enoncé V-11. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}\ \operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$. *En déduire un équivalent de* $\operatorname{ch} x - 1$ *en* 0.

Enoncé V-12. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $f_n(x) = \cos(n\arccos x)$ *et* $g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. *Montrer que* f_n *et* g_n *sont des fonctions polynomiales.*

Enoncé V-13.

1. *Montrer que pour tout $x > 0$, on a*

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

2. *En déduire une expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.*

Enoncé V-14. *Simplifier l'expression* $\dfrac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2}$ *et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.*

Enoncé V-15. *Etudier le domaine de définition de la fonction f définie par*

$$f(x) = \operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right].$$

et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens.

Enoncé V-16. *Montrer que l'équation* $\operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x = 1$ *admet une unique solution, puis la déterminer.*

Enoncé V-17. *Etudier* $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) - x$.