Faculté des Sciences de Tétouan — TD 1
SMI-3 — 2012–2013

Codage des informations & Arithmétique des ordinateurs « Corrigé »

*

Remarque 1 Merci de me signaler toute erreur de calcul par mail au hibaoui.ens@gmail.com.

1 Codage

Exercice 1 : Donner la valeur décimale des entiers suivants, la base dans laquelle ces entiers sont codés étant précisée.
(a) 1011010 et 101110 en binaire (base 2) ;
(b) A1AE et C4FB en hexadécimal (base 16) ;
(c) 260777 et 41737 en octal (base 8).
Solution

Solution

(a) $(1011010)_2 = (90)_{10}$ et $(101110)_2 = (46)_{10}$;
(b) $A1AE_{16} = (41390)_{10}$ et $(C4FB)_{16} = (50427)_{10}$;
(c) $(260777)_8 = (90623)_{10}$ et $(41737)_8 = (17375)_{10}$.

Exercice 2 : Coder les nombres suivants en base 2 puis en base 8 et ce en utilisant les différentes méthodes vues en cours.

$(280777)_{10}$	$(1AFE)_{16}$
$(1285)_{10}$	$(110101)_{10}$
$(3322)_{16}$	$(ABCD)_{16}$

Solution

Solution

- $(280777)_{10} = (001\ 000\ 100\ 100\ 011\ 001\ 001)_2 = (1044311)_8$
- $(1AFE)_{16} = (0001\ 1010\ 1111\ 1110)_2 = (15376)_8$
- $(1285)_{10} = (0101\ 0000\ 0101)_2 = (2405)_8$
- $(110101)_{10} = (0001\ 1010\ 1110\ 0001\ 0101)_2 = (327025)_8$
- $(3322)_{16} = (0011\ 0011\ 0010\ 0010)_2 = (31442)_8$
- $(ABCD)_{16} = (1010\ 1011\ 1100\ 1101)_2 = (125715)_8$

Exercice 3 :

1) Indiquer la valeur codée par le mot de 16 bits `1101100101110101` suivant qu'il représente un entier non signé, ou un entier signé.
2) Indiquer la valeur codée par la suite `1101100101110101` qui représente un entier signé en complément à 2 sur 2 octets.

SOLUTION

Solution

1) En non signé, la valeur est $(1101100101110101)_2 = (55669)_{10}$. En signé, le premier bit (bit de signe) vaut 1, c'est donc un nombre négatif dont la valeur est $-101100101110101_2 = -22901_{10}$.
2) c'est un nombre négatif. Complément à 2 : 0010011010001011 donc $(-9867)_{10}$.

Exercice 4 : Représentation des réels

(a) En virgule fixe, décoder le nombre binaire 11.011 puis coder en binaire le réel 11.625.

(b) En virgule flottante normalisée, coder en binaire au format simple précision le réel 11.625 et le réel 12.575

SOLUTION

Solution

(a) décodage : $(11,011)_2 = (3,375)_{10}$
Codage du réel $11,625$
- Sa représentation en base 2 est la suivante : $1011,101$

Représentation en virgule flottante normalisée du réel $11,625$

- $11,625$ est positif donc le 1er bit sera 0.
- En binaire le réel vaut $1011,101$ et en normalisant, on trouve : $1,011101 \times 2^3$
- On ajoute 127 à l'exposant qui vaut 3 ce qui donne 130, soit en base 2 : 1000 0010
- La mantisse est composée de la partie décimale de $11,625$ en base 2 normalisée, c'est-à-dire 011101
- Comme la mantisse doit occuper 23 bits, il est nécessaire d'ajouter des zéros pour la compléter : 01110100000000000000000
- La représentation du nombre $1,625$ en binaire avec la norme IEEE est donc :
  01000 001001110100000000000000000

  En hexadécimale :
  $(\underbrace{0100}\ \underbrace{0001}\ \underbrace{0011}\ \underbrace{1010}\ \underbrace{0000}\ \underbrace{0000}\ \underbrace{0000}\ \underbrace{0000})_2 = (413A0000)_{16}$

(b) Codage en binaire au format simple précision du réel 12.575

- $12,575$ est positif donc le 1er bit sera 0.
- Sa représentation en base 2 est la suivante : $1100,10010011001100110011$
- En normalisant, on trouve : $1,10010010011001100110011 \times 2^3$
- On ajoute 127 à l'exposant qui vaut 3 ce qui donne 130, soit en base 2 : 1000 0010
- La mantisse est composée de la partie décimale de $12,575$ en base 2 normalisée, c'est-à-dire 10010010011001100110011

– La représentation du nombre $12,575$ en binaire avec la norme IEEE est donc :
01000 00101001001001100110011 0011

En hexadécimale :

$(\underbrace{0100}\ \underbrace{0001}\ \underbrace{0100}\ \underbrace{1001}\ \underbrace{0011}\ \underbrace{0011}\ \underbrace{0011}\ \underbrace{0011})_2 = (41493333)_{16}$

2 Architecture générale

Exercice 5 :

1) Combien d'entiers positifs peut-on coder en binaire sur un octet ?
2) Combien de bits faut-il pour représenter 65563 entiers différents en binaire ?
3) Soit un ordinateur dont les mots mémoire sont composés de 32 bits. Cet ordinateur dispose de $4Mo$ de mémoire. Un entier étant codé sur un mot, combien de mots cet ordinateur peut-il mémoriser simultanément ?

Solution

Solution

1) (a) En arithmétique binaire entière non signée.
un octet contient 8 bits, on peut donc coder $2^8 = 256$ entiers.
(b) En arithmétique binaire entière signée, le bit le plus à gauche est réservé pour le signe.
Par conséquent, on ne peut coder que 2^7 entiers positifs (avec $+0$) et 2^7 entiers négatifs (avec -0). Soit au total $2 \times 2^7 = 2^8 = 256$ entiers.
2) Avec b bits, on peut coder 2^b entiers différents. Pour coder n entiers, il nous faut donc m bits tels que $2^{m-1} < n \leq 2^m$, c.-à-d. $m - 1 < log_2 n \leq m$. On a donc $m = \lceil log_2 n \rceil$.
Pour $n = 65563$, on a $m = \lceil log_2 65563 \rceil = 17$.
3) $4Mo = 4 \times 2^{20}$ octets, un mot est composé de 4 octets. Cet ordinateur peut donc mémoriser $\frac{4\times2^{20}}{4} = 2^{20} = 1048576$ mots.

Exercice 6 : En utilisant la représentation binaire sur 8 bits en complément à deux des entiers,

1) Écrire le nombre 0, 4, -5, 100 et -100.
2) Déterminer l'entier positif maximum (*resp.* négatif minimum) pouvant être codé.

Solution

Solution

1) Représentation des nombres en complément à 2 sur 8 bits
Les nombres 0, 4, 100 sont positifs leurs représentations respectives sur 8 bits sont : 0000 0000, 0000 0100, 0110 0100.

- Pour coder (-5) :
  - On prend le nombre positif 5 : 0000 0101
  - On inverse les bits : 1111 1010
  - On ajoute 1 : 1111 1011
- Pour coder -100 :
  - On prend le nombre positif 100 : 0110 0100
  - On inverse les bits : 1001 1011
  - On ajoute 1 : 1001 1100

2) L'entier positif maximum (*resp.* négatif minimum) pouvant être codé.
– l'entier positif maximum correspond à la valeur $(0111\ 1111)_2 = (127)_{10}$
– l'entier négatif minimum correspond à la valeur $(1000\ 0000)_2 = (-128)_{10}$

3 Arithmétique des ordinateurs

Exercice 7 : Coder en binaire sur un octet les entiers 134 et 44 puis effectuer l'addition binaire des entiers ainsi codés. Vérifier que le résultat sur un octet est correct. Même question avec les entiers 234 et 44.

Solution

Solution

Sur 1 octet :
$(134)_{10} = (10000110)_2$ et $(44)_{10} = (00101100)_2$ et $(234)_{10} = (11101010)_2$

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline = & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$= (178)_{10}$, le résultat est correct

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$= (86)_{10}$, le résultat est faux!!!
Dépassement de capacité

Exercice 8 :

1) Coder les entiers 61 et -61 sur un octet en utilisant la représentation par le signe et la valeur absolue.
2) Montrer que l'addition binaire de ces entiers ainsi codés produit un résultat incorrect.
3) Montrer qu'en revanche le résultat est correct si ces entiers sont codés en utilisant la représentation par le complément à 2.

Solution

Solution

1) En utilisant la représentation signe plus valeur absolu, nous avons sur un octet :
$(61)_{10} = (0011\ 1101)_2$ et $(-61)_{10} = (1011\ 1101)_2$

2) l'addition en binaire

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
= & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Le résultat est faut puisque $(11111010)_2 = (-122)_{10}$.

3) Si nous utilisons le complément à deux nous avons :
(-61) est un nombre négatif dont le complément sur un octet est : 01000011

l'addition donne :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
= & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Le décodage du résultat donne le nombre $(-0)_{10}$. Donc le résultat est correct.

Exercice 9 : Coder en binaire sur un octet les entiers 101 et 35 puis effectuer la multiplication et la division binaire des entiers ainsi codés.

SOLUTION

Solution

$(101)_{10} = (1100101)_2$ et $(35)_{10} = (100011)_2$

– **La multiplication binaire :**

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & \times & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
= & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & . & . \\
\hline
= & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Nous avons bien $(110111001111)_2 = (3535)_{10} = (35 \times 101)_{10}$.

– **La division binaire**
2Do

Exercice 10 : Faire les opérations suivantes

a) base 2
$1100 + 10101100 - 10101100 \times 1010$

b) base 8
$31 + 6213 - 32502 \times 3$

c) base 16
$31 + 82123 - 42102 \times 39$
$CA34 \div A$

SOLUTION

Solution

$a)$ base 2
$1100 + 10101100 - 10101100 \times 1010 = -11000000000$
$b)$ base 8
$31 + 6213 - 32502 \times 3 = -111442$
$c)$ base 16
$31 + 82123 - 42102 \times 39 = -E3381E$
$CA34 \div A = (1438, 66)_{16}$