SÉRIE 02

Ex 1 :

$$\vec{V} = A\vec{i} + B\vec{j}$$

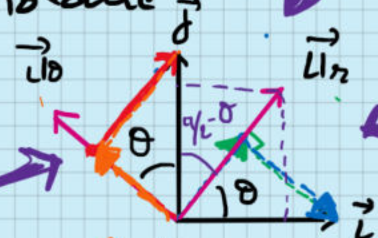
A, B sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base cartésienne.

Écrire $\vec{V}$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

⇒ Il faut convertir / trouver le lien entre la base Cart et polaire ⚠

⇒ Trouver les relations de passage

Cart ⟶ Polaire



$$\begin{cases} \vec{i} = +\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta \\ \vec{j} = +\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta \end{cases}$$

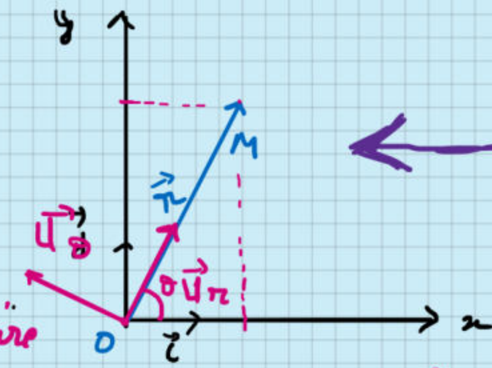
On remplace les expressions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans l'expression du vect. $\vec{V}$:

la base polaire est une base plane = 2D.

le vect. position

$$\vec{OM} = r\,\vec{u}_r$$

(r, θ) sont les coordonnées, radiale et angulaire de la polaire



(x, y) dans la base cartésienne

On trouve :

$$\vec{V} = A(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta) + B(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

On réarrange les terme en fonction de $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$:

$$\vec{V} = \underbrace{(A\cos\theta + B\sin\theta)}_{V_r}\vec{u}_r + \underbrace{(-A\sin\theta + B\cos\theta)}_{V_\theta}\vec{u}_\theta$$

V_r, V_θ : sont les composantes ou encore les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base polaire.

Ex 3 :

$$\vec{V} = V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta + V_z \vec{u}_z$$

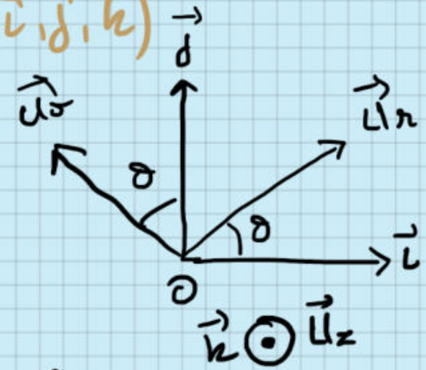
Écrire $\vec{V}$ dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

→ Trouvez les relations de passage

cylind ⟶ carté

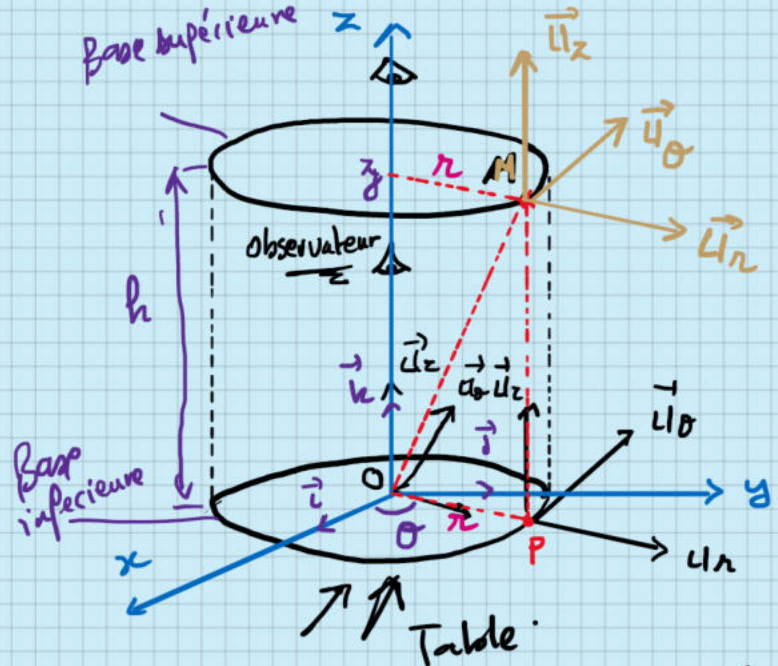
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ ⟶ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$



On injecte $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ par leurs expressions dans l'expression de $\vec{V}$. On obtient après réarrangement :

$$\vec{V} = (\overbrace{V_r \cos\theta - V_\theta \sin\theta}^{V_x})\,\vec{i} + (\overbrace{V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta}^{V_y})\,\vec{j} + \underbrace{V_z}_{V_z}\,\vec{k}$$



Système cylindrique est le cas généralisé du système polaire

V_x, V_y, V_z sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base cylindrique.

EXERCICE : 2

$$\vec{V} = V_r \vec{U_r} + V_\theta \vec{U_\theta} + V_\varphi \vec{U_\varphi}$$

Écrire $\vec{v}$ dans la base cartésienne : Ceci dit, qu'il faut chercher les relations de passage :

Sphérique $\longrightarrow$ CART

$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$ $\quad$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Cherchons donc les expressions de $\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi}$ en $f^{ct}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

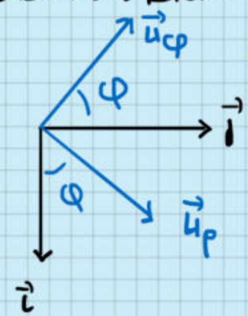


Schéma 1

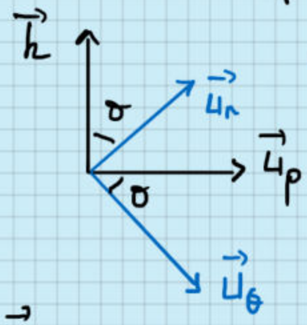


Schéma 2

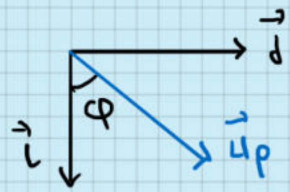


Schéma 3

d'après le schéma 2 :

$$\vec{U_r} = \sin\theta\, \vec{U_p} + \cos\theta\, \vec{k}$$

et schéma 3 donne : $\vec{U_p} = \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j}$

donc :

$$\vec{U_r} = \sin\theta(\cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j}) + \cos\theta\, \vec{k}$$

et ;

$$\boxed{\vec{U_r} = \sin\theta\cos\varphi\, \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{j} + \cos\theta\, \vec{k}}$$

* $\vec{U_\theta} = ?$

$$\vec{U_\theta} = \cos\theta\, \vec{U_p} - \sin\theta\, \vec{k} \quad (\text{d'après schéma } 2)$$

on connaît l'expression de $\vec{U_p}$: donc :

$$\boxed{\vec{U_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\, \vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\, \vec{j} - \sin\theta\, \vec{k}}$$

* $\vec{U_\varphi} = ?$ d'après le schéma 1 :

$$\boxed{\vec{U_\varphi} = -\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j}}$$

On injecte les expressions de $\vec{U_r}$, $\vec{U_\theta}$ et $\vec{U_\varphi}$ dans l'expression de $\vec{v}$, on trouve :

$$\vec{V} = (\overbrace{V_r \sin\theta\cos\varphi + V_\theta \cos\theta\cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi}^{V_x})\,\vec{i}$$
$$+ (\underbrace{V_r \sin\theta\sin\varphi + V_\theta \cos\theta\sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi}_{V_y})\,\vec{j}$$
$$+ (\underbrace{V_r \cos\theta - V_\theta \sin\theta}_{V_z})\,\vec{k}$$

V_x, V_y, V_z : Sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base Cartésienne

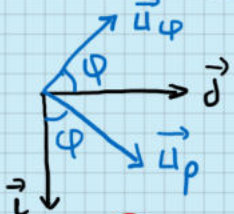
Ex 4 :

$$\vec{V} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

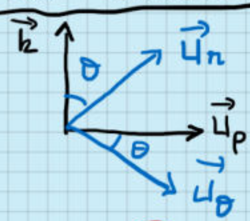
1/- Convertir $\vec{V}$ en coordonnées cylindriques

— VOIR EXERCICES ① et ③

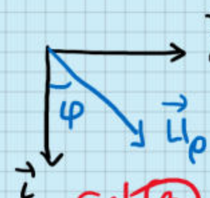
2/- Écrire $\vec{V}$ en Coordonnées Sphériques :



Sch ①



Sch ②



Sch ③

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} &= \cos\varphi\, \vec{u}_\rho - \sin\varphi\, \vec{u}_\varphi \\ \vec{j} &= \sin\varphi\, \vec{u}_\rho + \cos\varphi\, \vec{u}_\varphi \end{aligned}\right\} \text{d'après sch ①}$$

$$\vec{k} = \cos\theta\, \vec{u}_r - \sin\theta\, \vec{u}_\theta \qquad \text{d'après sch ②}$$

et $\quad \vec{u}_\rho = \sin\theta\, \vec{u}_r + \cos\theta\, \vec{u}_\theta \qquad$ d'après sch ③

on remplace $\vec{u}_\rho$ dans les expressions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ on obtient :

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\varphi \sin\theta\, \vec{u}_r + \cos\varphi \cos\theta\, \vec{u}_\theta - \sin\theta\, \vec{u}_\varphi \\ \vec{j} = \sin\varphi \sin\theta\, \vec{u}_r + \sin\varphi \cos\theta\, \vec{u}_\theta + \cos\varphi\, \vec{u}_\varphi \\ \vec{k} = \cos\theta\, \vec{u}_r - \sin\theta\, \vec{u}_\theta \end{cases}$$

On injecte ces expressions dans l'expression de $\vec{V}$:

$$\vec{V} = (\underbrace{A\cos\varphi \sin\theta + B\sin\varphi \sin\theta + C\cos\theta}_{V_r}) . \vec{u}_r$$

$$+ (\underbrace{A\cos\varphi \cos\theta + B\sin\varphi \cos\theta - C\sin\theta}_{V_\theta})\, \vec{u}_\theta$$

$$+ (\underbrace{-A\sin\varphi + B\cos\varphi}_{V_\varphi})\, \vec{u}_\varphi$$

V_r, V_θ, V_φ sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base Sphérique.