Epreuve de mécanique du point matériel

Session de rattrapage – Mars 2014
Filière : SMC_1

Question de cours :

Dans le plan Oxy du repère Galiléen R(O,x,y,z), on s'intéresse au mouvement d'un point matériel M, de masse m, soumis à l'action de la force centrale $\vec{F}$. Le mouvement est décrit en coordonnées polaires (ρ et φ) et en utilisant la base cylindrique$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

1- Trouver les composantes de l'accélération $\vec{\gamma}(M)_{/R}$ en fonction de ρ, φ et/ou de leurs dérivées.

2- Montrer que : $\rho^2\dot{\varphi} = \text{Constante} = C$. (On appelle C, constante des aires)

3- a) Exprimer le moment cinétique au point O de M : $\vec{\sigma}_0(M)_{/R}$

b) Montrer que ce moment cinétique $\vec{\sigma}_0(M)_{/R}$ est conservé (constant) et en déduire que son module peut s'écrire : $\sigma_0 = m\rho^2\dot{\varphi} = mC$

4- Démontrer la première formule de Binet : $\vec{V}(M)_{/R} = C\left[-\dfrac{du}{d\varphi}\vec{e}_\rho + u\vec{e}_\varphi\right]$, en utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{\rho}$.

Problème :

Soit R(O,x,y,z) un référentiel terrestre supposé galiléen muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement le long d'une tige (T). Cette tige tourne avec une vitesse angulaire de rotation ω **constante et positive** autour de l'axe vertical Oz, tel que $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ (voir figure 1).

On définit le référentiel relatif $R_1(O,x_1,y_1,z_1=z)$ auquel est attachée la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Au cours du temps, la tige reste dans le plan vertical $(O,\vec{e}_\rho,\vec{k})$ et faisant un angle constant $\theta \langle \frac{\pi}{2}$ avec l'axe Oz. On donne $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r$ et $\vec{g} = -g\vec{k}$.

$\vec{e}_\theta$ est le vecteur perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le plan vertical $(O,\vec{e}_\rho,\vec{k})$ (voir : figure 2). $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est une base orthonormée directe.

<u>Dans la suite, toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base</u>$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

1- Exprimer les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

2- Calculer les produits scalaires suivants: $\vec{e}_r.\vec{e}_\rho$; $\vec{e}_r.\vec{k}$; $\vec{e}_\theta.\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta.\vec{k}$

1/2

3- Donner l'expression du vecteur position de M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

4- Calculer les vitesses : a) relative $\vec{V}_r(M)$ et b) d'entraînement $\vec{V}_e(M)$.

5- Calculer les accélérations : a) relative $\vec{\gamma}_r(M)$, b) d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et c) de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$.

6- Retrouver les expressions de $\vec{V}(M)_{/R}$ et de $\vec{\gamma}(M)_{/R}$ par un calcul direct.

7- Le repère relatif R_1 lié à la tige (T) est il galiléen ? justifier votre réponse.

8- Donner les expressions vectorielles des forces appliquées à M dans le référentiel relatif R_1 en sachant que la réaction est donnée dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sous la forme suivante : $\vec{R} = R_\theta\, \vec{e}_\theta + R_\varphi\, \vec{e}_\varphi$.

9- Ecrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à M dans R_1.

10-En projetant l'équation du PFD suivant $\vec{e}_r$ montrer que l'équation du mouvement de M s'écrit sous la forme : $\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2(\theta) + g\cos(\theta) = 0$.

11-En projetant l'équation du PFD suivant $\vec{e}_\varphi$, montrer que la composante de la réaction suivant $\vec{e}_\varphi$ est donnée par : $R_\varphi = 2m\dot{r}\,\omega \sin(\theta)$.

12-En projetant l'équation du PFD suivant $\vec{e}_\theta$, montrer que la composante de la réaction suivant $\vec{e}_\theta$ est donnée par : $R_\theta = -m\sin(\theta)\left[g + r\omega^2 \cos(\theta)\right]$.

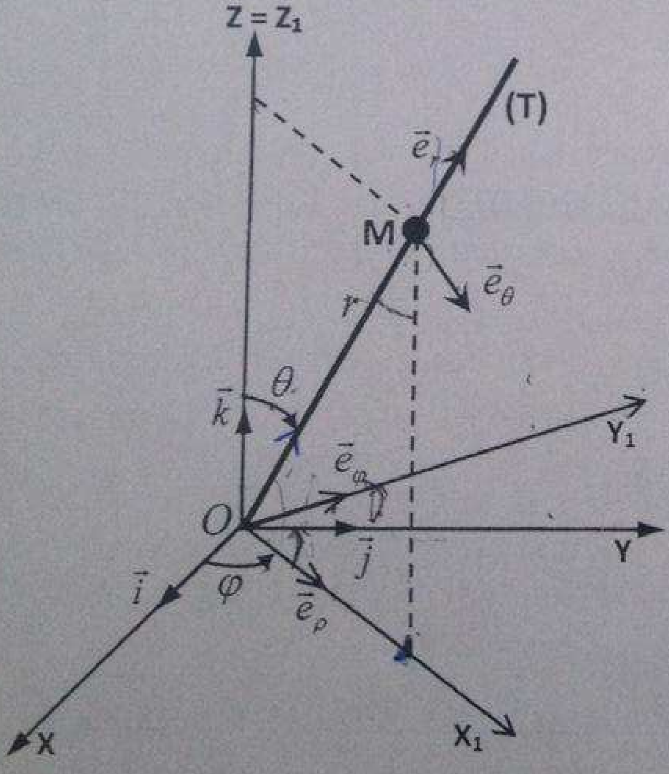


Figure 1

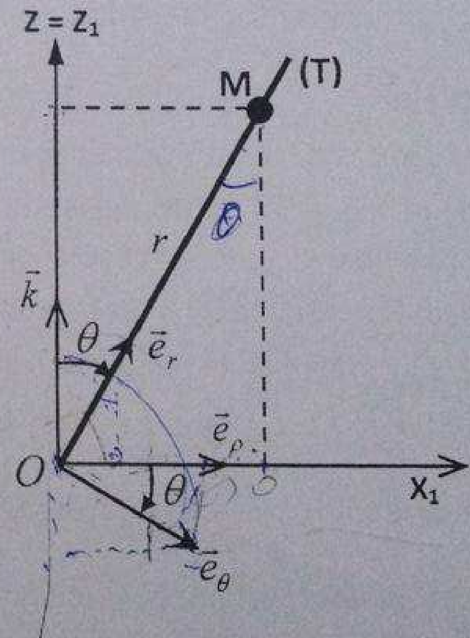


Figure 2

$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$

Correction d'examen de mécanique du point matériel
Session de rattrapage - Mars 2014
Filière : SMC1

Question de cours :

1- $\overline{OM} = \rho\bar{e}_\rho$ et $\bar{V}(M/R) = \dot{\rho}\bar{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi$

Ce qui donne $\bar{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\bar{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\bar{e}_\varphi$

2- Le mouvement est central, donc : $\bar{F} = f(\rho)\bar{e}_\rho$.

En appliquant le PFD au point M, on aura : $m\bar{\gamma}(M/R) = \bar{F}(\rho) = F(\rho)\bar{e}_\rho$

Ce qui implique que : $(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F(\rho) = f(\rho)$ (1)

$(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = 0$ (2)

(2) implique $\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = Cte = C$

3- a) Le moment cinétique $\bar{\sigma}_O(M)_{/R} = \overline{OM} \wedge m\bar{V}(M)_{/R} = m\rho^2\dot{\varphi}\,\bar{k}$

b) D'autre part, comme : $\frac{d}{dt}[\bar{\sigma}_O(M)]_{/R} = \overline{OM} \wedge m\bar{\gamma}(M)_{/R} = \rho\bar{e}_\rho \wedge F(\rho)\bar{e}_\rho = \bar{0}$

$\Rightarrow \quad \bar{\sigma}_O(M) = \overline{Cte}$

Donc le moment cinétique est **constant**. Soit : $\|\bar{\sigma}_O(M)_{/R}\| = \sigma_0 = m\rho^2\dot{\varphi}$

On en déduit encore que : $\rho^2\dot{\varphi} = \frac{\sigma_0}{m} = Cte = C$

4- Démonstration de la première formule de Binet.

i) Première méthode :

$\bar{V}(M/R) = \dot{\rho}\bar{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi$ avec $\dot{\rho}(t) = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}.\frac{C}{\rho^2}$

Or : $C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -C\frac{d\rho}{d\varphi}.\frac{1}{\rho^2}$ Donc : $\dot{\rho}(t) = -C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right)$

Finalement : $\bar{V}(M/R) = -C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\bar{e}_\rho + \frac{C}{\rho}\bar{e}_\varphi = -C\frac{du}{d\varphi}\bar{e}_\rho + Cu\bar{e}_\varphi$

ii) Deuxième méthode :

On a : $V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$ Comme : $\dot{\rho}(t) = \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma_0}{m}\frac{du}{d\varphi}$

Donc : $\dot{\rho}^2 = \frac{\sigma_0^2}{m^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$ et $\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{\sigma_0}{m}\right)^2.u^4$

Soit : $V^2 = \frac{\sigma_0^2}{m^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_0}{m}\right)^2.u^2 = \frac{\sigma_0^2}{m^2}\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$

Problème :

1- $\vec{e}_r = \sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}$ et $\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{k}$

2- $\vec{e}_r.\vec{e}_\rho = \sin\theta$; $\vec{e}_r.\vec{k} = \cos\theta$; $\vec{e}_\theta.\vec{e}_\rho = \cos\theta$ et $\vec{e}_\theta.\vec{k} = -\sin\theta$

3- $\overline{OM} = r\,\vec{e}_r = r(t)\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)$

4- a) Vitesse relative de M : $\vec{V}_r(M) = \left(\dfrac{d\overline{OM}}{dt}\right)_{/R_1} = \dot{r}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)$

b) Vitesse d'entraînement de M:

$$\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\overline{OM}(M\in R_1)}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\overline{OO}}{dt}\right)_{/R} + \vec{\Omega}_{R_1/R}\wedge\overline{OM}$$

$$= \omega\vec{k}\wedge r\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right) = r\,\omega\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

5- a) Accélération relative : $\vec{\gamma}_r(M) = \left(\dfrac{d^2\overline{OM}}{dt^2}\right)_{/R_1} = \ddot{r}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)$

b) Accélération d'entraînement de M:

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left(\frac{d^2\overline{OM}(M\in R_1)}{dt^2}\right)_{/R} = \left(\frac{d^2\overline{OO}}{dt^2}\right)_{/R} + \vec{\Omega}_{R_1/R}\wedge\left[\vec{\Omega}_{R_1/R}\wedge\overline{OM}\right]$$

$$= \omega\vec{k}\wedge\left[\omega\vec{k}\wedge r\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)\right] = -r\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

c) Accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}_{R_1/R}\wedge\vec{v}_r = 2\omega\vec{k}\wedge\dot{r}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right) = 2\omega\dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

6- Expressions de la vitesse absolue et de l'accélération absolue par un calcul direct.

i) $\vec{V}_a(M) = \left(\dfrac{d\overline{OM}}{dt}\right)_{/R} = \dfrac{d}{dt}\left[r\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)\right]_{/R}$

Soit : $\vec{V}_a(M) = \dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + r\,\omega\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\cos\theta\,\vec{k}$

ii) $\vec{\gamma}_a(M) = \left(\dfrac{d^2\overline{OM}}{dt^2}\right)_{/R} = \dfrac{d}{dt}\left[\dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + r\,\omega\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\cos\theta\,\vec{k}\right]_{/R}$

Soit : $\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{r}\sin\theta - r\omega^2\sin\theta\right)\vec{e}_\rho + 2\,\omega\,\dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \ddot{r}\cos\theta\,\vec{k}$

7- Le repère R_1 lié à la tige (T) n'est pas galiléen, car il est en rotation autour de repère fixe R.

8- Expressions vectorielles des forces appliquées à M dans R_1.

$$\vec{P} = -mg\vec{k} \;;\quad \vec{R} = R_\theta\,\vec{e}_\theta + R_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = mr\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_e = -2m\omega\dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

9- Application de la RFD dans R_1.

$$\sum\vec{F}_{réelles} + \sum\vec{F}_{inerties} = m\vec{\gamma}_r(M). \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{\gamma}_r$$

Soit :

$$-mg\vec{k} + R_\theta\,\vec{e}_\theta + R_\varphi\,\vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = m\ddot{r}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$

10- Projection de l'équation du PFD suivant $\vec{e}_r$.

$$\left[-mg\vec{k} + R_\theta\,\vec{e}_\theta + R_\varphi\,\vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right].\vec{e}_r =$$
$$\left[m\ddot{r}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)\right].\vec{e}_r$$

Implique : $-mg\cos\theta + mr\omega^2\sin^2(\theta) = m\ddot{r}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$

Soit : $\boxed{\ddot{r} - r\omega^2\sin^2(\theta) + g\cos\theta = 0}$

11- Projection de l'équation du PFD suivant $\vec{e}_\varphi$.

$$\left[-mg\vec{k} + R_\theta\,\vec{e}_\theta + R_\varphi\,\vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right].\vec{e}_\varphi =$$
$$\left[m\ddot{r}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)\right].\vec{e}_\varphi$$

Soit : $\boxed{R_\varphi = 2m\omega\dot{r}\sin\theta}$

12- Projection de l'équation du PFD suivant $\vec{e}_\theta$.

$$\left[-mg\vec{k} + R_\theta\,\vec{e}_\theta + R_\varphi\,\vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right].\vec{e}_\theta =$$
$$\left[m\ddot{r}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k}\right)\right].\vec{e}_\theta$$

Implique : $mg\sin\theta + R_\theta + mr\omega^2\sin\theta\cos\theta = m\ddot{r}\left(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta\right) = 0.$

Soit : $\boxed{R_\theta = -mr\omega^2\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta = -m\sin\theta\left[g + r\omega^2\cos\theta\right]}$

Pr : Mbarek NYA

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Physique
Agadir

Année Universitaire: 2013 / 2014

Epreuve de Mécanique du Point SMP$_1$
Janvier 2014
Durée: 1h30mn

(Documents non autorisés)

Exercice: On considère un point matériel M de masse m soumis à une force $\vec{F}$ de composantes cartésiennes: $F_x = xy - y^2 + x$, $F_y = \frac{x^2}{2} - 2xy + y$

$x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées du point matériel M.

1- Déterminer l'énergie potentielle dont dérive le champ de force $\vec{F}$.

2- Calculer le travail de la force $\vec{F}$ quand son point d'application se déplace du point O au point A : $W_O^A(\vec{F})$ avec $O(x=0, y=0), A(x=0, y=2)$

3- Quel serait le travail du champ de force $\vec{F}$: $W_O^{A_1}(\vec{F}) + W_{A_1}^{A}(\vec{F})$ et $W_O^B(\vec{F}) + W_B^{A_1}(\vec{F}) + W_{A_1}^{A}(\vec{F})$ avec $A_1(x=1, y=1), B(x=1, y=0)$.

Conclusion.

Problème : I-Etude de la trajectoire de l'extrémité A d'une tige OA

Soit R(O,X,Y,Z) un référentiel galiléen de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $R_1(O,X_1,Y_1,Z_1)$ un référentiel en mouvement par rapport à R de base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

On considère une tige OA de longueur d en mouvement comme le montre la figure . La tige OA tourne uniformément autour de l'axe OZ_1 avec une vitesse angulaire ω **constante** (B étant la projection du point A dans le plan XOY). Le plan vertical BOZ a un angle φ_0 **constant** par rapport à l'axe OX.

__**Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base.**__ $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

1- Calculer directement à partir du vecteur position $\overrightarrow{OA}$, les vecteurs vitesse et accélération du point A par rapport au repère R(O,X,Y,Z) ($\vec{V}(A/R)$ et $\vec{\gamma}(A/R)$) en fonction de d et ω.

2- Déterminer le vecteur vitesse rotation $\vec{\Omega}_{(R_1/R)}$ et retrouver $\vec{V}(A/R)$ et $\vec{\gamma}(A/R)$ par application de la loi de composition des vitesses et des accélérations.

3- Déterminer , en fonction de d et ω , les composantes tangentielle et normale de $\vec{\gamma}(A/R)$ dans le plan BOZ. En déduire , en fonction de d, le rayon de courbure de la trajectoire de l'extrémité A.

4- Déterminer la trajectoire et l'hodographe de l'extrémité de A de la tige OA dans le référentiel R(O,X,Y,Z).

5- Montrer que le mouvement de A par rapport au repère R(O,X,Y,Z) est un mouvement à accélération centrale. En déduire , en fonction de d et ω, la valeur de la constante des aires C.

II- Etude du mouvement d'un point M mobile sur la tige OA.

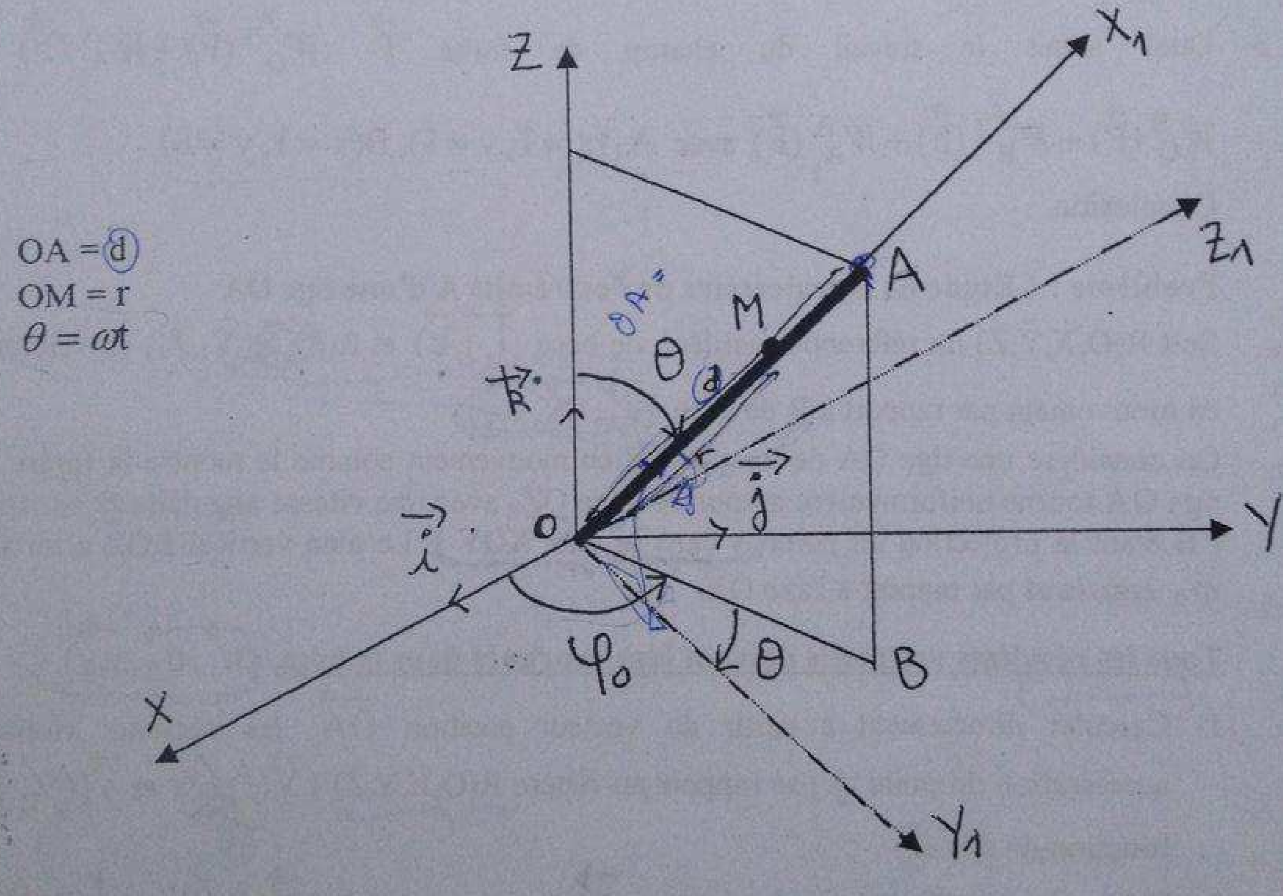
On place un point mobile M de masse m sur la même tige OA et on le lâche sans vitesse initiale. On suppose que le point M se déplace **sans frottement** sur la tige qui est toujours en rotation uniforme dans le plan vertical BOZ avec un angle φ_0 constant par rapport à l'axe OX.

1- Calculer , en fonction des variables $r, \dot{r}, \ddot{r}$ et $\dot{\theta}$, la vitesse et l'accélération du mobile M par rapport au repère R(O,X,Y,Z) ($\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$).

2- Quelles sont les forces appliquées au point M sur la tige OA dans le référentiel R(O,X,Y,Z). Exprimer ces forces dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ Ecrire le PFD de M dans le référentiel supposé galiléen R.

On donne : la force de réaction de la tige au point M: $\vec{N} = N_1\vec{u}_1 + N_2\vec{u}_2 + N_3\vec{u}_3$.

3- En déduire par projection sur les axes OX_1, OY_1 et OZ_1, l'équation du mouvement du point M. En déduire les composantes de la réaction de la tige au point M et montrer, que la réaction est portée par l'axe OY_1.



F. des Sciences Agadir

Corrigé De l'examen De Mécanique du point Janvier 2014 SMP1

Agadir, le 16/01/2014

Mr. Saba

Exercice

$F_x = xy - y^2 + x \quad ; F_y = \frac{x^2}{2} - 2xy - y$

1 - Energie potentielle dont dérive le champ de Force $\vec{F}$:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = xy - y^2 + x \Rightarrow E_p = -\frac{x^2}{2}y + y^2x - \frac{x^2}{2} + f(y) \quad (0,5\,pt)$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{x^2}{2} - 2xy + y = \frac{x^2}{2} - 2yx - f'(y) \quad (0,5\,pt)$$

$$\Rightarrow f'(y) = -y \Rightarrow f(y) = -\frac{y^2}{2} + Cst$$

D'où $\boxed{E_p(x,y) = -\frac{x^2}{2}y + y^2x - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + Cste}$ (1 pt)

2 - Le travail de la force $\vec{F}$:

Soit $W_O^A(\vec{F}) = E_p(O) - E_p(A)$ (0,5 pt)

$O(x=0,\ y=0) \quad ; A(x=0,\ y=2)$

$W_O^A(\vec{F}) = Cste - (-2) - Cste = 2\,J$

d'où $\boxed{W_O^A(\vec{F}) = 2\ \text{Joules}}$ (1 pt)

(0,5 pt)

3 - $W_O^{A_1}(\vec{F}) + W_{A_1}^A(\vec{F}) = E_p(O) - E_p(A_1) + [E_p(A_1) - E_p(A)] = E_p(O) - E_p(A) = \underline{2\ \text{Joules}}$

$$W_O^B(\vec{F}) + W_B^{A_1}(\vec{F}) + W_{A_1}^A(\vec{F}) = E_{pO} - \cancel{E_{pB}} + \cancel{E_{pB}} - \cancel{E_{pA_1}} + \cancel{E_{pA_1}} - E_{pA}$$

$$= E_{pO} - E_{pA} = W_O^A = \underline{2\ \text{Joules}} \quad (0,5\,pt)$$

C/C : Le travail est le même quelque soit le chemin suivi.

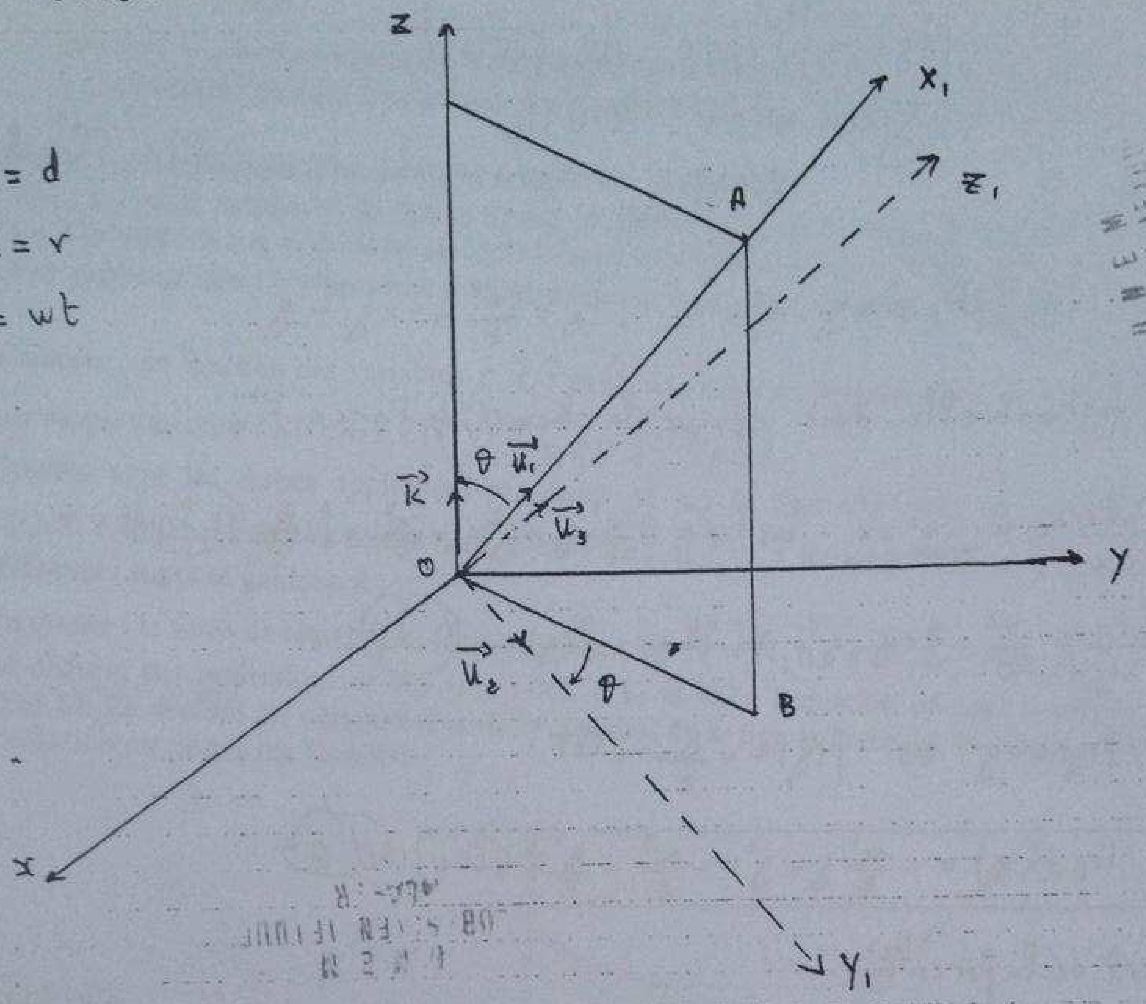
(1 pt)

Problème :

$OA = d$

$Om = r$

$\theta = \omega t$



I- 1) $\overrightarrow{OA} = d\overrightarrow{u_1}$ avec $d = C^{ste}$

$$\vec{V}(A/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_R = d\left.\frac{d\overrightarrow{u_1}}{dt}\right|_R$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_1}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_2} \quad ; \quad \frac{d\overrightarrow{u_2}}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_1}$$

$$\boxed{\vec{V}(A/R) = d\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_2} = d\omega\,\overrightarrow{u_2}} \quad (1\,pt)$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(A/R) = d\omega\,\frac{d\overrightarrow{u_2}}{dt} = -d\omega^2\,\overrightarrow{u_1}} \quad (1\,pt)$$

2)- La rotation se fait dans le plan BOz // au X_1OY_1 autour de l'axe OZ_1 de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_3}$

soit : $\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\,\overrightarrow{u_3}}$ (1 pt)

Loi de Composition des vitesses

$$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A/R_1) + \vec{V_e}$$

avec : $\vec{V_e} = \left.\dfrac{d\vec{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega} \wedge \vec{O_1A}$ $\qquad O \equiv O_1$

$$\vec{V_e} = \omega\vec{U_3} \wedge d\vec{U_1} = \omega\, d\vec{U_2}$$

$$\vec{V}(A/R_1) = \vec{0}$$

(0,5 pt)

d'où : $\boxed{\vec{V}(A/R) = \omega\, d\vec{U_2}}$ même résultat que 1)

Loi de Composition des accélérations

$$\vec{\gamma}(A/R) = \vec{\gamma}(A/R_1) + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$$

$\vec{\gamma}(A/R_1) = \vec{0}$ car $\vec{V}(A/R_1) = \vec{0}$

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(A/R_1) = 2\omega\vec{U_3} \wedge \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma_e} = \underset{\vec{0}}{\underset{\parallel}{\frac{d^2\vec{OO_1}}{dt^2}}} + \underset{\vec{0}}{\underset{\parallel}{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O_1A}}} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O_1A})$$

(1 pt)

$$\vec{\gamma_e} = \omega\vec{U_3} \wedge (\omega\vec{U_3} \wedge d\vec{U_1}) = -\omega^2 d\,\vec{U_1}$$

d'où : $\boxed{\vec{\gamma}(A/R) = -\omega^2 d\,\vec{U_1}}$ même résultat que 1)

3)_ Dans le système de Serret_Frenet l'accélération s'écrit :

$\boxed{\vec{\gamma}(A/R) = \gamma_t\vec{\tau} + \gamma_n\vec{n}}$ avec $\begin{cases} \gamma_t = \dfrac{dV}{dt} \\ \gamma_n = \dfrac{V^2}{\rho_c} \end{cases}$ (0,5 pt)

$V = |\vec{V}(A/R)| = d\omega = cste \Rightarrow \underline{\gamma_t = 0}$ (0,5 pt)

$\Rightarrow \vec{\gamma} = \gamma_n\vec{n} = -d\,\omega^2\vec{U_1} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\gamma_n = d\,\omega^2} \\ \underline{\vec{n} = -\vec{U_1}} \end{cases}$ (0,5 pt)

Le rayon de courbure : $\boxed{\rho_c = \dfrac{V^2}{\gamma_n} = \dfrac{d^2\omega^2}{d\omega^2} = d}$ (1 pt)

4)- Dans le plan BOZ_1, on a : $\overrightarrow{OA} = d\overrightarrow{u_1}$ (0,5pt)

c'est l'équation d'un cercle de rayon d et de centre O(0,0)

pour l'hodographe, on pose $\overrightarrow{OP} = \vec{v}(A/R) = d\omega \overrightarrow{u_\theta}$ (1pt)

c'est l'équation d'un cercle de centre O(0,0) et de rayon $d\omega$.

5)- Pour qu'un mouvement soit à accélération centrale, il faut que $\vec{\gamma} \parallel \overrightarrow{OA}$.

on a : $\underline{\vec{\gamma}(A/R) = -d\omega^2\overrightarrow{u_1}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{\gamma}(A/R) \parallel \overrightarrow{OA}}$ (1pt)

$\underline{\overrightarrow{OA} = d\overrightarrow{u_1}}$

donc le mouvement de A dans R est un $\underline{mvt}$ à accélération centrale.

$$\boxed{C = |\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(M/R)| = |d\overrightarrow{u_1} \wedge d\omega\overrightarrow{u_\theta}| = d^2\omega}$$

II- 1)

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_1}}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/R) = \dot{r}\overrightarrow{u_1} + r\omega\overrightarrow{u_\theta}}$$ (1pt)

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\omega^2)\overrightarrow{u_1} + 2\dot{r}\omega\overrightarrow{u_\theta}}$$

2)- R est galiléen $\Rightarrow$ les forces appliquées à M sont réelles.

(0,5pt) Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k} = -mg\cos\theta\overrightarrow{u_1} + mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$

(0,5pt) Réaction de la tige : $\vec{N} = N_1\overrightarrow{u_1} + N_2\overrightarrow{u_2} + N_3\overrightarrow{u_3}$

M se déplace sans frottement sur la tige $\Rightarrow N_1 = 0$.

$$\boxed{\vec{N} = N_2\overrightarrow{u_2} + N_3\overrightarrow{u_3}}$$

P.F.D s'écrit dans R galiléen :

$$\boxed{m\vec{\gamma}(M/R) = \sum \vec{F}_{réelles} = \vec{P} + \vec{N}}$$ (1pt)

3) - Dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

(1pt)

$$\boxed{m(\ddot{r} - r w^2)\vec{u_1} + 2 m \dot{r} w \vec{u_2} = -mg\cos\theta\,\vec{u_1} + mg\sin\theta\,\vec{u_2} + N_2\vec{u_2} + N_3\vec{u_3}}$$

En projetant sur les axes :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r w^2) = -mg\cos\theta & (1) \\ 2 m \dot{r} w = mg\sin\theta + N_2 & (2) \\ 0 = N_3 & (3) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $\ddot{r} - r w^2 = -g\cos\theta$ équation du mvt de M dans R.

(2) $\Rightarrow$ $N_2 = 2 m w \dot{r} - mg\sin\theta$

(3) $\Rightarrow$ $N_3 = 0$ (1pt)

donc : $\boxed{\vec{N} = N_2 \vec{u_2}}$ portée par $\vec{OY_1}$

Agadir

Epreuve de Mécanique du Point

Filière : SMP_1 — **Session Rattrapage Mars 2014**
Durée: 1h30mn — **Enseignant: Mr SABA**

(Documents non autorisés)

Exercice 1: Soit le repère $R_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ de base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ se déplaçant par rapport au repère $R(O,X,Y,Z)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de telle manière que si t représente le temps:

$\overrightarrow{OO_1} = \lambda(t)\vec{k}_1$, $\vec{k} = \vec{k}_1$, l'angle $\varphi(t) = (\vec{i}, \vec{i}_1) = (\vec{j}, \vec{j}_1)$. La position d'un point mobile M dans son mouvement par rapport au repère R_1 est donnée par la relation: $\overrightarrow{O_1M} = \mu(t)\vec{i}_1$.

R est le repère absolu, R_1 est le repère relatif.

1- **Les résultats vectoriels doivent être donnés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$**

a- Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M.

b- Déterminer le vecteur vitesse absolue de M: $\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/R)$

2- **Les résultats vectoriels doivent être donnés dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$**

a- Déterminer le vecteur vitesse relative de M: $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/R_1)$.

b- Déterminer le vecteur vitesse d'entraînement de M: $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(M \in R_1/R)$.

c- En déduire la vitesse absolue de M et vérifier la relation de composition des vitesses.

d- Déterminer l'accélération relative de M: $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/R_1)$.

e- Déterminer l'accélération d'entraînement de M: $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(M \in R_1/R)$.

f- Déterminer l'accélération de coriolis de M: $\vec{\gamma}_C(M)$.

g- Déterminer l'accélération absolue de M: $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M/R)$ et vérifier la relation de composition des accélérations.

Exercice 2: Soit R(O,X,Y,Z) un repère fixe, supposé galiléen muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, XOY est dans le plan vertical. Dans ce plan XOY, une tige spirale est maintenue fixe. Une particule M_1 de masse m se déplace sur cette tige spirale telle que:

$\dot{\varphi} = \omega = cte$, $\varphi = (\vec{i}, \vec{e}_\rho) = (\vec{j}, \vec{e}_\varphi)$ et $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ base mobile dans R avec $\vec{e}_z = \vec{k}$

Une particule M_2 de masse m se déplace sans frottement dans le plan XOY telle que:

$\overrightarrow{OM_2} = R\vec{e}_\rho$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = R(1 - e^{\varphi})\vec{e}_\rho$; R = constante.

Les résultats vectoriels doivent être donnés dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

A- Mouvement de la particule M_1

1- a/ Déterminer la vitesse $\vec{V}(M_1/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}\Big/R$ de la particule M_1 dans le repère R.

b/ En déduire que le vecteur $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire en M_1 s'écrit: $\vec{\tau} = \dfrac{(\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi)}{\sqrt{2}}$

c/ Déterminer le vecteur $\vec{n}$ tel que $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ avec $\vec{b} = \vec{k}$, forme une base.

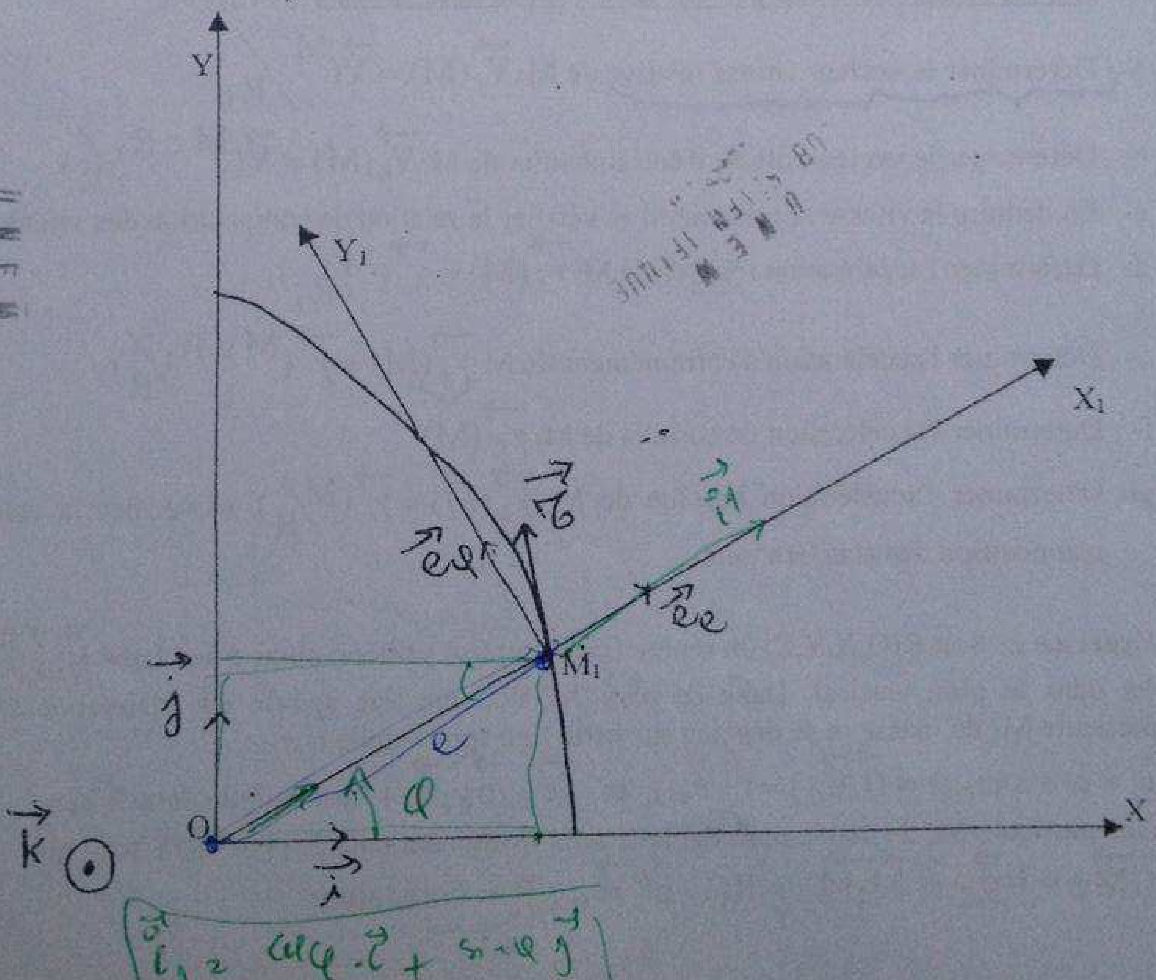
2- Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(M_1/R)$ de M_1.

B- Mouvement de la particule M_2

Soit $R_1(M_1, X_1, Y_1, Z)$ le repère relatif d'origine M_1 muni de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z = \vec{k}$, fixe dans R_1; lié au point M_1. R_1 est en mouvement par rapport à R (absolu), avec la vitesse angulaire $\dot{\varphi} = \omega$ tel que $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}$.

1- Déterminer les vitesses relative $\vec{V}(M_2/R_1)$, d'entraînement $\vec{V}_e(M_2/R)$ de la particule M_2.

2- Déterminer les accélérations relative $\vec{\gamma}(M_2/R_1)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M_2)$, de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M_2)$ et absolu $\vec{\gamma}(M_2/R)$ de la particule M_2.



$\vec{i}_1 = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j}$

Faculté des Sciences
Agadir

CORRIGE DE MECANIQUE DU POINT

Session: Rattrapage MARS 2014 — Mr SABA
Filière: SMP$_1$

Exercice 1:

1 _ a _ $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M} = \lambda \vec{k_1} + \mu \vec{i_1}$

$= \lambda \vec{k} + \mu(\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j})$

d'où: $\boxed{\vec{OM} = \mu\cos\varphi \vec{i} + \mu\sin\varphi \vec{j} + \lambda \vec{k}}$ (1,5pt)

b _ $\vec{V_a} = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R$

$\vec{V_a}(M) = \dot{\mu}(\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}) + \mu\dot{\varphi}(-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}) + \dot{\lambda}\vec{k}$

d'où: $\boxed{\vec{V_a}(M) = (\dot{\mu}\cos\varphi - \mu\dot{\varphi}\sin\varphi)\vec{i} + (\dot{\mu}\sin\varphi + \mu\dot{\varphi}\cos\varphi)\vec{j} + \dot{\lambda}\vec{k}}$ (1,5pt)

2 _ a _ $\vec{V_r}(M) = \vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$

$\boxed{\vec{V_r}(M) = \dot{\mu}\vec{i_1}}$ (1pt)

b _ $\vec{V_e}(M) = \left.\frac{d\vec{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$

$= \dot{\lambda}\vec{k_1} + \dot{\varphi}\vec{k_1} \wedge \mu\vec{i_1}$

d'où: $\boxed{\vec{V_e}(M) = \dot{\lambda}\vec{k_1} + \mu\dot{\varphi}\vec{j_1}}$ (1pt)

c _ $\vec{V_a}(M) = \vec{V}(M/R) =$

$$\vec{V}_a(M) = \frac{d}{dt}\left(\lambda \vec{k}_1 + \mu \vec{i}_1\right)/_R$$

$$= \dot{\lambda}\vec{k}_1 + \dot{\mu}\vec{i}_1 + \mu \frac{d\vec{i}_1}{dt}/_R$$

$$\boxed{\vec{V}_a(M) = \dot{\lambda}\vec{k}_1 + \dot{\mu}\vec{i}_1 + \mu\dot{\varphi}\vec{j}_1}$$ (1,5 pt)

on vérifie bien la loi de composition des vitesse.

$$\underline{\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.}$$ (0,5 pt)

d– $\vec{\gamma}(M/R_1) = \vec{\gamma}_r(M) = \frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2}/_{R_1}$

$$\boxed{\vec{\gamma}_r(M) = \ddot{\mu}\vec{i}_1}$$ (1 pt)

e– $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(M \in R_1/R)$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}/_R + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O_1M})$$

$$= \ddot{\lambda}\vec{k}_1 + \ddot{\varphi}\vec{k}_1\wedge\mu\vec{i}_1 + \dot{\varphi}\vec{k}_1\wedge(\dot{\varphi}\vec{k}_1\wedge\mu\vec{i}_1)$$

$$= \ddot{\lambda}\vec{k}_1 + \mu\ddot{\varphi}\vec{j}_1 - \mu\dot{\varphi}^2\vec{i}_1$$

d'où $$\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = -\mu\dot{\varphi}^2\vec{i}_1 + \mu\ddot{\varphi}\vec{j}_1 + \ddot{\lambda}\vec{k}_1}$$ (1 pt)

f– $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_r = 2\dot{\varphi}\vec{k}_1\wedge\dot{\mu}\vec{i}_1$

d'où: $$\boxed{\vec{\gamma}_c = 2\dot{\varphi}\dot{\mu}\vec{j}_1}$$ (1 pt) g- $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_R$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{i}_1 + \rho\dot{\varphi}\vec{j}_1 + \dot{\lambda}\vec{k}_1\right)\Big|_R$$

$$= \ddot{\rho}\vec{i}_1 + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{j}_1 + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{j}_1 + \rho\ddot{\varphi}\vec{j}_1$$

$$-\rho\dot{\varphi}^2\vec{i}_1 + \ddot{\lambda}\vec{k}_1$$

1pt

Soit $\boxed{\vec{\gamma}_a = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{i}_1 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{j}_1 + \ddot{\lambda}\vec{k}_1}$

on vérifie bien la loi de composition des accélérations $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$ 0,5pt

Exercice 2 : A_ Mvt de la particule M_1

$$\dot{\varphi} = \omega = cste$$

1_ $\vec{OM}_2 = R\vec{e}_\rho$ et $M_1M_2 = R(1 - e^\varphi)\vec{e}_\rho$; $R = cst$

$\vec{OM}_1 = \vec{OM}_2 + \vec{M_2M_1} = Re^\varphi\vec{e}_\rho$

a/ $\vec{V}(M_1/R) = \left.\frac{d\vec{OM}_1}{dt}\right|_R = R\dot{\varphi}e^\varphi\vec{e}_\rho + R\dot{\varphi}e^\varphi\vec{e}_\varphi$

d'où : $\boxed{\vec{V}(M_1/R) = R\dot{\varphi}e^\varphi(\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi)}$ 1pt

b/ $\boxed{\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M_1/R)}{\|\vec{V}(M_1/R)\|} = \frac{\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi}{\sqrt{2}}}$ 1pt

c/ $\boxed{\vec{n} = \vec{k}\wedge\vec{\tau} = \frac{\vec{e}_\varphi - \vec{e}_\rho}{\sqrt{2}}}$ 1pt

2 – Accélération $\vec{\gamma}(M_1/R)$:

$$\vec{\gamma}(M_1/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M_1/R)}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt}\left[R\dot{\varphi}\, e^{\varphi}(\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi)\right]$$

$$= R\dot{\varphi}^2 e^{\varphi}(\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi) + R\dot{\varphi}^2 e^{\varphi}(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_\rho)$$

d'où : $\boxed{\vec{\gamma}(M_1/R) = 2R\dot{\varphi}^2 e^{\varphi}\vec{e}_\varphi}$ (1pt)

B – Mouvement de la particule M_2

1 → Vitesse relative : $\vec{V}_r = \vec{V}(M_2/R_1)$

$$\boxed{\vec{V}(M_2/R_1) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right|_{R_1} = -R\dot{\varphi}\, e^{\varphi}\vec{e}_\rho}$$ (1pt)

→ Vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M_2)$

$$\vec{V}_e(M_2) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{M_1M_2}$$

$$= R\dot{\varphi}e^{\varphi}\vec{e}_\rho + R\dot{\varphi}e^{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k}\wedge R(1-e^{\varphi})\vec{e}_\rho$$

$$= R\dot{\varphi}e^{\varphi}(\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi) + R\dot{\varphi}(1-e^{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

d'où : $\boxed{\vec{V}_e(M_2) = R\dot{\varphi}\left(e^{\varphi}\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi\right)}$ (1pt)

2 → Accélération relative : $\vec{\gamma}(M_2/R_1) = \left.\dfrac{d\vec{V}(M_2/R_1)}{dt}\right|_R$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M_2/R_1) = -R\dot{\varphi}^2 e^{\varphi}\vec{e}_\rho}$$ (0,5pt)

→ Accélération d'entraînement : $\vec{\gamma}_e(M_2)$

$$\vec{\gamma}_e(M_2) = \left.\frac{d^2\,\overrightarrow{OM_1}}{dt^2}\right|_R + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{M_1M_2})$$

$$\gamma_e(M_2) = R\ddot{\varphi}e^{\varphi}(\vec{e}_e + \vec{e}_\varphi) + R\dot{\varphi}^2 e^{\varphi}(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_e) + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge [\dot{\varphi}\vec{k} \wedge R(1 - e^{\varphi})\vec{e}_e]$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e(M_2) = 2R\dot{\varphi}^2 e^{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2(1 - e^{\varphi})\vec{e}_e}$$ (1pt)

→ Accélération de coriolis : $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r$

$$\vec{\gamma}_c = 2\dot{\varphi}\vec{k} \wedge (-R\dot{\varphi}\, e^{\varphi}\vec{e}_e) = -2R\dot{\varphi}^2 e^{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

d'où. $$\boxed{\vec{\gamma}_c = -2R\dot{\varphi}^2 e^{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$ (1pt)

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Physique
Agadir

Année Universitaire: 2013 / 2014

Epreuve de Mécanique du Point SM₁
Janvier 2014
Durée: 1h30mn

(Documents non autorisés)

Soit $R(O,X,Y,Z)$ un repère galiléen de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $R'(O,X',Y',Z')$ un repère relatif de base cylindrique $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_Z=\vec{k})$. Un anneau M de masse m, assimilable à un point matériel peut glisser sur une hélice d'axe vertical OZ. Le point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ,φ,Z).

L'hélice se trouve sur une surface cylindrique de révolution, d'axe OZ de rayon ($R=\rho$). Son pas est $2\pi b$. La vitesse angulaire autour de OZ est notée $\omega=\dot{\varphi}$. Le point M décrit une courbe descendante $(Z\langle 0)$.

Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base. $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_Z=\vec{k})$.

I Etude cinématique

1- Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_Z=\vec{k})$.

2- En déduire $\vec{V}(M/R)$ dans la même base. Donner $\vec{V}(M/R)$ en fonction de R, b et ω. Retrouver $\vec{V}(M/R)$ par la loi de composition des vitesses. 3

3- Donner $\vec{\gamma}(M/R)$ en fonction de R, b, ω et $\dot{\omega}$ dans $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_Z=\vec{k})$. Retrouver $\vec{\gamma}(M/R)$ par la loi de composition des accélérations. R20 R0

II Etude dynamique

La réaction $\vec{F}$ entre l'hélice et l'anneau s'écrit: $\vec{F}=F_\rho\vec{e}_\rho+F_\varphi\vec{e}_\varphi+F_Z\vec{e}_Z$

1- Ecrire le PFD

2- Par projection sur $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_Z=\vec{k})$ écrire les 3 équations du mouvement.

3- Quelle relation peut-on écrire entre $\vec{F}$ et $\vec{V}(M/R)$ si on néglige les frottements?

En déduire une relation entre F_φ , F_Z, b et R

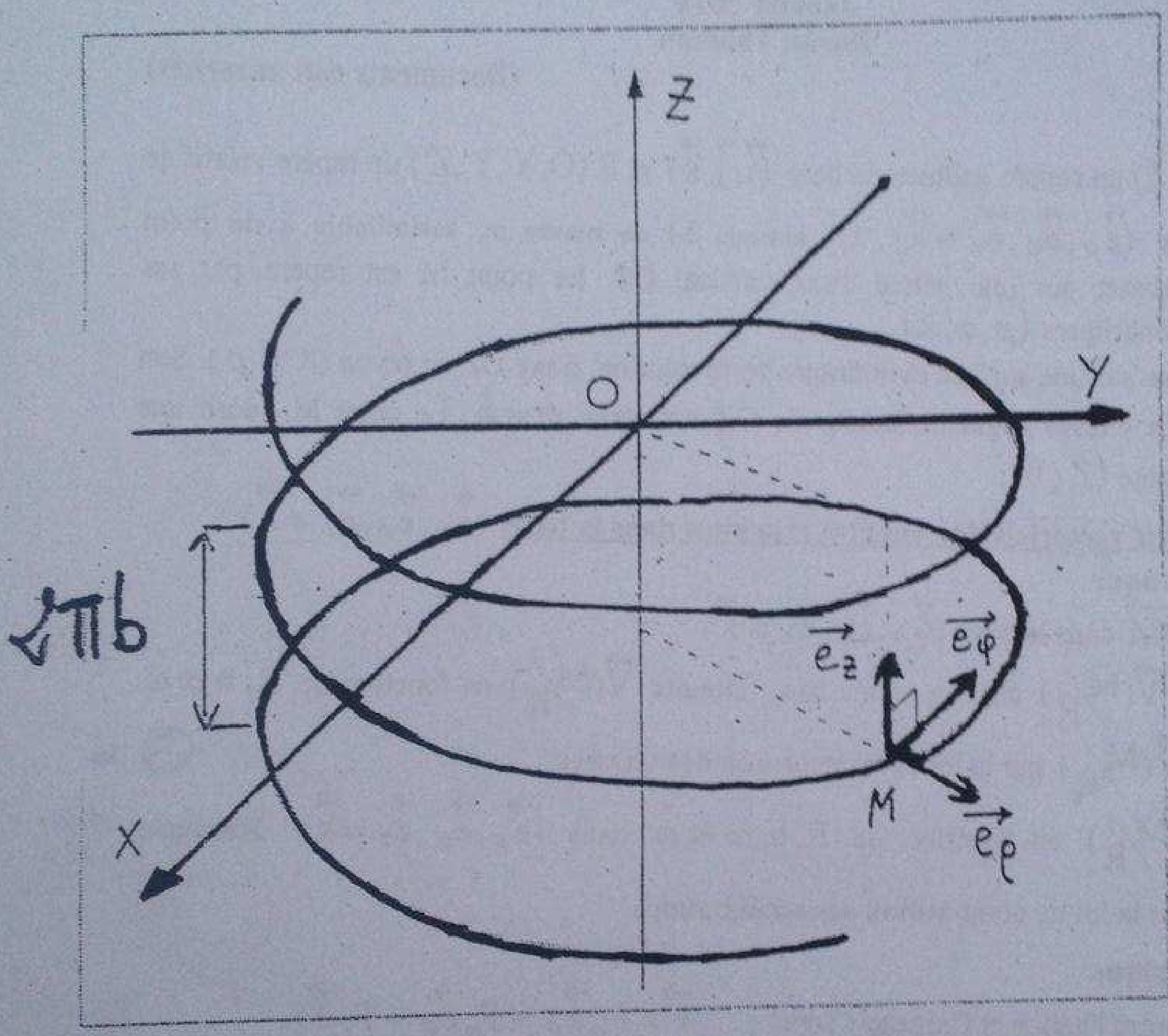
4- Donner $\dot{\omega}$ en fonction de g, b et R en l'absence de frottement. En déduire l'expression de $\ddot{Z}$. Que remarque -t-on ? Sachant qu'à t = 0, Z(0) = 0, $\dot{Z}(0)=0$; donner l'expression de Z en fonction de t.

5- Donner les composantes de $\vec{F}$ en fonction de t. Commenter le sens physique de ses termes.

III- Etude énergétique

1- L'énergie mécanique est-elle conservée? Justifier votre réponse

2- Retrouver $\dot{\omega}$ de la question II -4



Z
O
Y
X
2πb
$\vec{e_z}$
$\vec{e_\varphi}$
$\vec{e_\rho}$
M

Epreuve de Mécanique du point SM1 Janvier 2014 (Correction)

I - Etude Cinématique

1- $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z = \vec{k})$

Le point M est repéré en coordonnées cylindriques par : $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$.

- L'hélice décrite est une courbe d'équation

$\begin{cases} \rho = R \\ z = -b\varphi \end{cases}$. Le point M descend si $\omega = \dot{\varphi} > 0$

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho - b\varphi \vec{e}_z$$

2- $\vec{V}(M/R)$ dans la même base :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}/_R$$

$$= \underbrace{\dot{\rho}}_{0}\vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt}/_R + \dot{z}\vec{e}_z$$

(car $\rho = R = cte$)

$$= \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - b\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

$$\vec{V}(M/R) = R\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - b\omega \vec{e}_z = R\omega \vec{e}_\varphi - b\omega \vec{e}_z$$

* $\vec{V}(M/R)$ par la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

or : $\vec{V}_e = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt}/_R}_{0} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM}$

$$= \omega \vec{k} \wedge (\rho \vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)$$

$$\boxed{\vec{V}_e = \rho\omega \vec{e}_\varphi = R\omega \vec{e}_\varphi} \quad \left(\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \right)$$

$$\boxed{\vec{V}_r = \frac{d\vec{OM}}{dt}/_{R'}}$$

$$\boxed{\vec{V}_r = -b\dot{\varphi}\vec{e}_z = -b\omega \vec{k}} \quad (\rho = R = cte)$$

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

$$= R\omega \vec{e}_\varphi - b\omega \vec{k}$$

3- $\vec{\gamma}(M/R)$ en fonction de R, b, ω et $\dot{\omega}$ dans $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z = \vec{k})$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}$$

$$= R\dot{\omega}\vec{e}_\varphi + R\omega \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - b\dot{\omega}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -R\omega^2\vec{e}_\rho + R\dot{\omega}\vec{e}_\varphi - b\dot{\omega}\vec{k}}$$

$\vec{\gamma}(M/R)$ par la loi de composition :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

$$\vec{\gamma}_e = \underbrace{\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}/_R}_{0} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

$$= \dot{\omega}\vec{k} \wedge (\rho \vec{e}_\rho - b\varphi \vec{e}_z)$$

$$+ \omega \vec{k} \wedge [\omega \vec{k} \wedge (\rho \vec{e}_\rho - b\varphi \vec{k})]$$

$$= R\dot{\omega}\vec{e}_\varphi + \omega \vec{k} \wedge (R\omega \vec{e}_\varphi)$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = -R\omega^2\vec{e}_\rho + R\dot{\omega}\vec{e}_\varphi}$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}/_{R'}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_r = -b\dot{\omega}\vec{k}}$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

$$= 2\omega \vec{k} \wedge (-b\omega \vec{k}) = 0$$

donc : $\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r$

$$= -R\omega^2\vec{e}_\rho + R\dot{\omega}\vec{e}_\varphi - b\dot{\omega}\vec{k}$$

II. Etude dynamiques :

1. Le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}_a$$

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{\gamma}_a$$

$$m\vec{g} + F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{k}$$
$$= mR\dot{\omega}\vec{e}_\rho + mR\dot{\omega}\vec{e}_\varphi - mb\dot{\omega}\vec{k}$$

2.

Les 3 équations :

$$\begin{cases} F_\rho = -mR\dot{\omega} \\ F_\varphi = mR\dot{\omega} \\ F_z - mg = -mb\dot{\omega} \end{cases}$$

Ce système ne peut évidemment pas être intégré directement, puisqu'a priori les trois composantes des forces peuvent être des fonctions du temps. C'est l'absence de frottements qui permet d'obtenir une relation supplémentaire. La force de Liaison $\vec{F}$ ne travaille pas si sa puissance est nulle, ce qui se traduit par $\vec{F}.\vec{V} = 0, \forall t$, c'est-à-dire :

$$\vec{F}.\vec{V} = \left(F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z\right)$$
$$\left(R\omega \vec{e}_\varphi - b\omega \vec{e}_z\right) = 0$$

ce qui impose donc :

$$RF_\varphi = bF_z$$

4. Compte tenu de l'expression des composantes de $\vec{F}$ tirées de la relation fondamentale de la dynamique et de l'absence de frottement, on a :

$$mR^2\frac{d\omega}{dt} = b\left(mg - mb\frac{d\omega}{dt}\right)$$

soit

$$\frac{d\omega}{dt} = g\frac{b}{(R^2+b^2)}$$

L'accélération angulaire autour de Oz est constante, donc $\ddot{z}$ aussi. Les conditions initiales conduisent à :

$$z = -b\varphi = -\frac{1}{2}g\frac{b^2}{(R^2+b^2)}t^2$$

Le comportement de z montre que tout se passe comme si on avait une accélération azimutale égale à g pondéré par un facteur géométrique $\frac{1}{\left(1+\left(\frac{R}{b}\right)^2\right)}$ qui n'est fonction que du rapport entre le rayon de l'hélice et le pas (divisé par 2π), à savoir une fonction Lorentzienne en $\left(\frac{R}{b}\right)$.

Il est claire que ce facteur étant toujours inférieur à 1, l'accélération azimutale a toujours une valeur inférieur à g.

On retrouve la chute Libre de direction verticale pour $\frac{R}{b} \to 0$ (hélice de rayon negligeable devant le pas), et le cercle horizontal pour lequel l'accélération azimutale vaut 0 pour $\frac{R}{b} \to \infty$ (hélice de pas négligeable devant le rayon).

5- on peut alors exprimer les composantes des forces de liaison en fonction du temps :

$$\begin{cases} F_\rho = -mR\left(\frac{gb}{R^2+b^2}\right)^2 t^2 \\ F_\varphi = mg\left(\frac{Rb}{R^2+b^2}\right) \\ F_z = mg\left(\frac{R^2}{R^2+b^2}\right) \end{cases}$$

La composante radiale est centripète, proportionnelle à ω^2, donc ici à t^2; les composantes orthoradiale et azimutale sont constantes.

III - Etude énergitique

1-

L'énergie mécanique E_m du point matériel se conserve, car le poids dérive d'un potentiel et les liaisons de contact $\vec{F}$ ne travaillent pas; on a:

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$. sa dérivation par rapport au temps donne :

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + mg\frac{dz}{dt} = 0$$

2-

L'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques est :

$v = \sqrt{(R^2+b^2)\omega^2}$.

Comme:

$\dot{z} = -b\omega$, il vient alors

$\omega\sqrt{(R^2+b^2)} \times \dot{\omega}\sqrt{(R^2+b^2)} = gb\omega$

(en supposant $\omega > 0$).

Cela implique :

$$\dot{\omega} = g\frac{b}{(R^2+b^2)}.$$

UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
AGADIR

جامعة ابن زهر
كليـــة العلــوم
أكاديـر

21 janvier 2013

Epreuve de mécanique
Filière : SMC1
Durée : 1h30mn

Question de cours

Considérons un point matériel M de masse m en mouvement par rapport à un référentiel donné $R(O,x,y,z)$ avec une vitesse $\vec{V}(M/R)$.

1) Donner la définition et l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/R)$ en O de M par rapport à R.

2) Enoncer (définition) puis démontrer le théorème du moment cinétique.

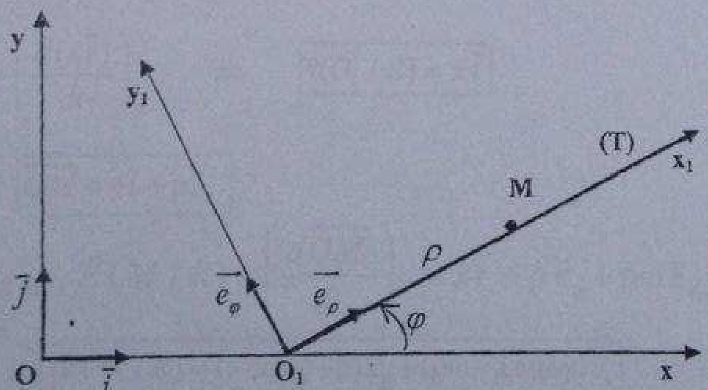
Problème

Soit Oxy un plan vertical d'un référentiel fixe supposé Galiléen $R(O,x,y,z)$ de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormée et directe. Un point matériel M de masse m se déplace **sans frottement** sur une tige (T) qui est constamment (toujours) en contact par son extrémité O_1 avec l'axe Ox. Le point O_1 se déplace sur l'axe Ox. (Voir figure ci-dessous).

Soit $R_1(O_1,x_1,y_1,z_1=z)$ de base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ orthonormée et directe, un référentiel relatif lié à la tige (T) tel que l'axe O_1x_1 confondu avec (T).

La tige (T) effectue également un mouvement de rotation **uniforme** autour de l'axe O_1z_1.

Les paramètres du système seront : $\left\|\overrightarrow{OO_1}\right\|=x(t)$, $\left\|\overrightarrow{O_1M}\right\|=\rho(t)$ et $\varphi(t)=(\vec{i},\vec{e}_\rho)=\omega t$.



A- CINEMATIQUE :

1°/ Le référentiel R_1 est-il Galiléen ? Justifier clairement votre réponse.

2°/ Donner le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R : $\vec{\Omega}(R_1/R)$.

3°/ Déterminer la vitesse et l'accélération du point O_1 par rapport à R dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

4°/ Déterminer le vecteur position $\overline{OM}$ en fonction de x, ρ, $\vec{i}$ *et* $\vec{e}_\rho$.

5°/ Calculer directement dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$:

a) La vitesse absolue de M : $\vec{V}(M/R)$

b) L'accélération absolue de M : $\vec{\gamma}(M/R)$

6°/ Déterminer dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ de R_1 :

a) La vitesse relative de M : $\vec{V}_r(M/R_1)$

b) L'accélération relative de M : $\vec{\gamma}_r(M/R_1)$

c) La vitesse d'entraînement de M : $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(M \in R_1/R)$

d) L'accélération d'entraînement de M : $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(M \in R_1/R)$

e) L'accélération de Coriolis de M : $\vec{\gamma}_c(M)$

7°/ Les lois de composition des vitesses et des accélérations sont-elles vérifiées ?

B- DYNAMIQUE :

L'expression générale de la réaction $\vec{R}$ de la tige (T) sur M peut s'écrire sous la forme : $\vec{R} = R_1\vec{e}_\rho + R_2\vec{e}_\varphi + R_3\vec{k}$.

1°/ Justifier que la composante R_1 de la réaction $\vec{R}$ est nulle.

2°/ Faire le bilan des forces appliquées à M dans le référentiel R_1.

3°/ Appliquer à M le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel mobile R_1.

4°/ Déduire de ce principe :

a) L'équation différentielle du mouvement de M le long de la tige (T). On posera : $\ddot{x} = a$.

b) Les composantes R_2 et R_3 de la réaction $\vec{R}$ de la tige.

5°/ Quelle sera la vitesse minimale de M sur la tige pour que le contact entre M et (T) puisse continuer à exister dans le temps ?

****

Université Ibn Zohr – Faculté des Sciences - Département de Physique - Agadir

Correction mécanique du point matériel

Session normale – Janvier 2013

Filière : SMC1

Question de cours :

1) Définition du Moment cinétique :

Le moment cinétique d'une particule M dans un référentiel R par rapport à un point O est égale au moment par rapport à O de la quantité de mouvement de M dans R.

Expression : $\boxed{\vec{\sigma}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)}$

2) Enoncé du théorème du moment cinétique :

Dans un référentiel R, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'une particule M en un point fixe O, est égale au moment en O, de la résultante des forces appliquées sur cette particule.

Démonstration : En dérivant le moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/R)$ par rapport au temps, relativement à R, on aura : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \wedge \vec{P}(M/R) + \overrightarrow{OM} \wedge m\left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R$

Comme : $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \vec{V}(M/R)$, alors $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \wedge \vec{P}(M/R) = \vec{0}$

Donc : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{OM} \wedge m\left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F} = \vec{M}_O(\sum \vec{F}/R)$

Problème :

A- CINEMATIQUE

1°/ Le référentiel R_1 n'est pas Galiléen car il n'est pas en translation rectiligne et uniforme par rapport à R.

2°/ Le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R est : $\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\,\vec{k}_1 = \omega\,\vec{k}}$

3°/ Vitesse et accélération du point O_1 par rapport à R dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{V}(O_1/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(x\vec{i})}{dt}\right)_R \Rightarrow \boxed{\vec{V}(O_1/R) = \dot{x}\,\vec{i}}$$

$$\vec{\gamma}(O_1/R) = \left(\frac{d\vec{V}(O_1/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(\dot{x}\vec{i})}{dt}\right)_R \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(O_1/R) = \ddot{x}\,\vec{i}}$$

4°/ Vecteur position de M : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \rho\vec{e}_\rho}$.

5°/ a) Vitesse absolue de M : $\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\omega\,\vec{e}_\varphi$

On a : $\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi \Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = (\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\,\vec{e}_\rho + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\vec{e}_\varphi}$

b) Accélération absolue de M : $\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\omega - \ddot{x}\sin\varphi)\vec{e}_\varphi}$

6°/ a) Vitesse relative de M : $\vec{V}_r(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R_1} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho \Rightarrow \boxed{\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho}$

b) Accélération relative : $\vec{\gamma}_r(M/R_1) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2}\right)_{R_1} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}_r(M/R_1) = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho}$

c) Vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M) = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}(M \in R_1)}{dt}\right)_{/R} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{/R} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}$

$$= \dot{x}\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge \rho\vec{e}_\rho = \dot{x}(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi) + \omega\rho\,\vec{e}_\varphi$$

Donc : $\boxed{\vec{V}_e(M) = (\dot{x}\cos\varphi)\vec{e}_\rho + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\vec{e}_\varphi}$.

d) Accélération d'entraînement :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}(M \in R_1)}{dt^2}\right)_{/R} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right)_{/R} + \frac{d}{dt}\left((\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M})\right)_{/R}$$

$$= \vec{\gamma}(O_1/R) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right)_{/R} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$= \ddot{x}\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge (\omega\vec{k} \wedge \rho\vec{e}_\rho) = \ddot{x}\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge \rho\omega\vec{e}_\varphi) = \ddot{x}\vec{i} - \rho\omega^2\vec{e}_\rho$$

Donc : $\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = (\ddot{x}\cos\varphi - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho - \ddot{x}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi}$

e) Accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M) = 2\omega\vec{k} \wedge \dot{\rho}\vec{e}\rho \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}_c(M) = 2\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi}$

7°/ On a : $\boxed{\vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = (\dot{x}\cos\varphi + \dot{\rho})\vec{e}_\rho + (\rho\omega - \dot{x}\sin\varphi)\vec{e}_\varphi = \vec{V}(M/R)}$

et : $\boxed{\vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) = (\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\omega - \ddot{x}\sin\varphi)\vec{e}_\varphi = \vec{\gamma}(M/R)}$

Les lois de composition du mouvement sont bien vérifiées.

B- DYNAMIQUE

1°/ R_1 est nulle car M se déplace sans frottement sur la tige (T).

2°/ Bilan des forces appliquées à M dans R_1 :

- Poids : $\vec{P}$
- Réaction de la tige : $\vec{R}$
- Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie}$
- Force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic}$

3°/ PFD dans R_1 :

$$\sum \vec{F}_{réelles} + \sum \vec{F}_{inerties} = m\vec{\gamma}_r(M). \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{\gamma}_r$$

Avec : $\vec{P} = -mg\vec{j} = -mg(\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\vec{e}_\varphi)$; $\vec{R} = R_2\,\vec{e}_\varphi + R_3\,\vec{k}$; $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$ et $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c$

$$\Rightarrow \left[-mg\sin\varphi - m(\ddot{x}\cos\varphi - \rho\omega^2)\right]\vec{e}_\rho + \left[m(\ddot{x}\sin\varphi - g\cos\varphi - 2\dot{\rho}\omega + R_2)\right]\vec{e}_\varphi + R_3\vec{k} = m\ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho$$

4°/ a) La projection de la RFD sur $\vec{e}_\rho$ donne l'équation différentielle du mouvement de M le long de la tige (T). Soit : $\boxed{\ddot{\rho} - \omega^2\rho = a\cos\varphi + g\sin\varphi}$ avec $\ddot{x} = a$

b) La projection de la RFD sur $\vec{e}_\varphi$ donne la composante R_2 de $\vec{R}$. $\boxed{R_2 = m(g\cos\varphi - a\sin\varphi) + 2\omega\dot{\rho}}$.

La projection de la RFD sur $\vec{k}$ donne la composante R_3 de $\vec{R}$. Soit : $\boxed{R_3 = 0}$

5°/ Pour que le contact entre M et (T) existe, il faut que $R_2 \geq 0$.

$\Rightarrow$ d'après 4°/ b) : $\boxed{\dot{\rho} \geq \dfrac{a\sin\varphi - g\cos\varphi}{2\omega} = \dot{\rho}_{min} = V_r(\min)}$

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences
Département de Physique
Agadir

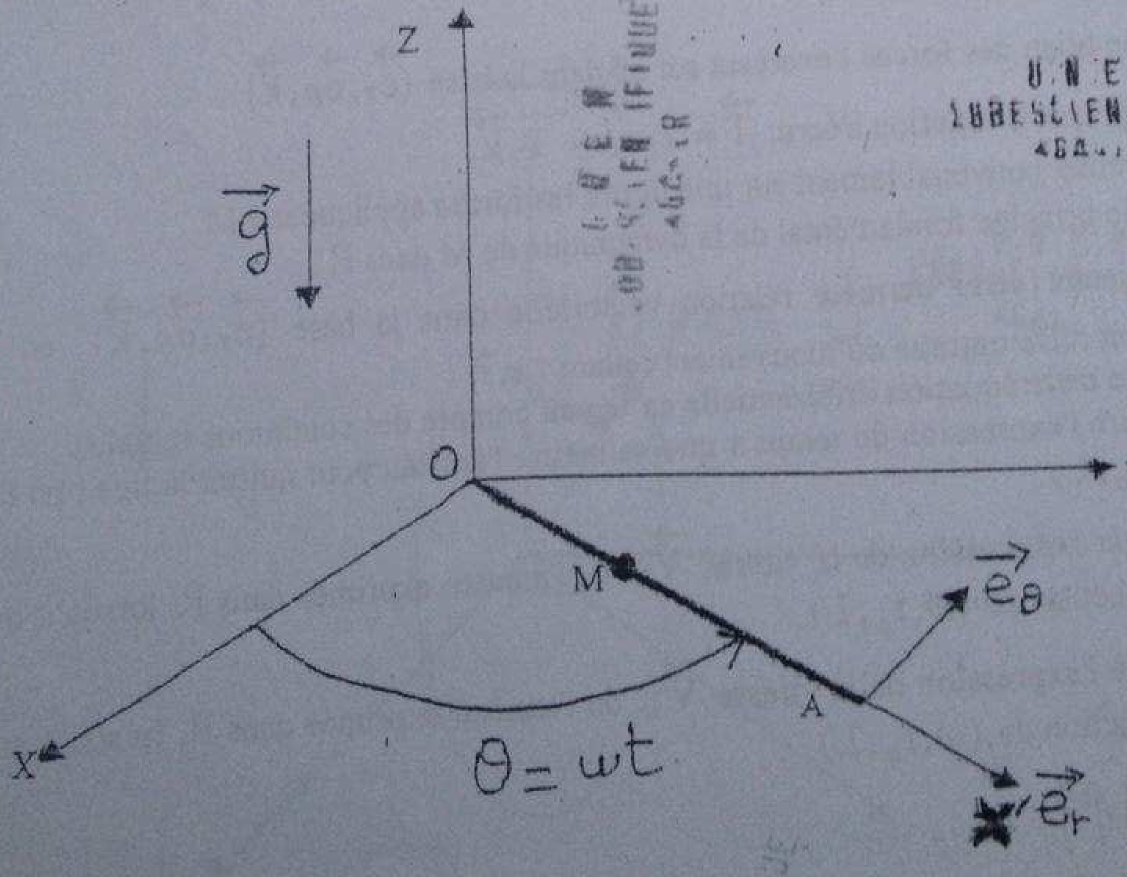
Année Universitaire: 2012 / 2013

Epreuve de Mécanique du Point SMP$_1$
Janvier 2013
Durée: 1h30mn

(Documents non autorisés)

Soit $R(O,X,Y,Z)$ un référentiel galiléen, d'axe OZ vertical ascendant. Sa base est désignée par $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Une tige OA de longueur L rigide, droite dont l'une de ses extrémités est fixée en O. Cette tige se trouve dans le plan horizontal (XOY) et tourne autour de l'axe OZ avec une vitesse angulaire **constante** ω. Un anneau M de masse m coulisse sur cette tige **sans frottement.**

On associe à la tige le référentiel $R'(O, X', Y', Z')$. On désigne par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ la base de R' telle que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. Soit $\theta = \omega t = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'})$. L'anneau est libéré sans vitesse initiale, à l'instant t=0 quand $r = r_o$ ($r_o < L$).



Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base. $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$

Partie I: Cinématique:

1- Définition d'un repère galiléen.

2- Donner l'expression du vecteur rotation: $\vec{\Omega}(R'/R)$.

3- Calculer la vitesse relative de M : $\vec{V}_r = \vec{V}(M/R')$. En déduire l'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R')$.

4- Calculer la vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(M \in R'/R)$. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}_a = \vec{V}(M/R)$.

5- Calculer :

a- l'accélération d'entraînement: $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(M \in R'/R)$

b- l'accélération de coriolis de M: $\vec{\gamma}_c$;

6- En déduire l'accélération absolue de M: $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M/R)$.

Partie II: Dynamique:

1- Faire le bilan des forces s'exerçant sur M dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$.

2- Montrer que la réaction s'écrit: $\vec{T} = T_1\vec{e_\theta} + T_2\vec{k}$.

3- Représenter convenablement sur une figure les forces appliquées à M.

4- Ecrire le principe fondamental de la dynamique de M dans R'.

5- En projetant cette dernière relation vectorielle dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$, en déduire l'équation différentielle du mouvement reliant r et $\ddot{r}$.

6- Résoudre cette équation différentielle en tenant compte des conditions initiales.

7- En déduire l'expression du temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige, en fonction de (ω, r_0, L).

8- Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{V}_L$ de l'anneau exprimée dans R' lorsqu'il quitte la tige en fonction de (ω, r_0, L).

9- En déduire l'expression de la vitesse $\vec{V'}_L$ de l'anneau exprimée dans R, lorsqu'il quitte la tige en fonction de (ω, r_0, L).

UNIVERSITÉ IBNOU ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
AGADIR

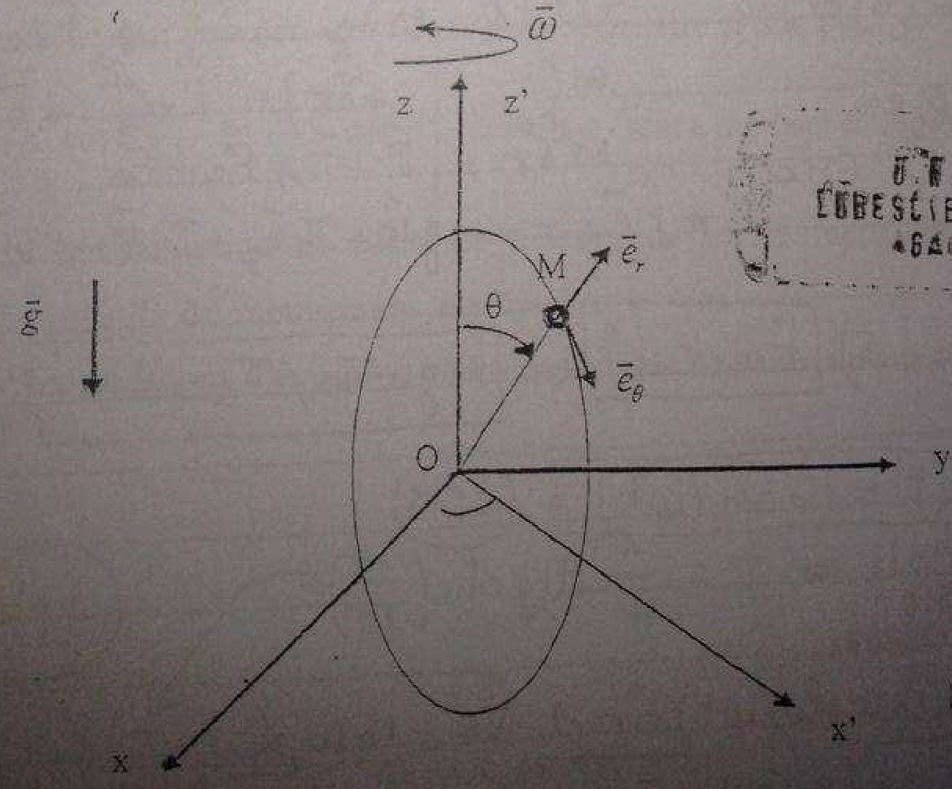
19 Janvier 2012

ÉPREUVE DE MÉCANIQUE SMC1
Durée 1h30min

Un cerceau de centre O et de rayon r est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω (ω constante) autour de son diamètre vertical. Un anneau M de masse m et assimilé à un point matériel se déplace sans frottement sur le cerceau (voir figure). La position du point M est repérée par les coordonnées polaires r et θ avec $\theta = (\widehat{\overline{Oz}, \overline{OM}})$ et r constant.

Soient $\mathcal{R}(O,x,y,z)$ le référentiel absolu supposé galiléen de base $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. Le référentiel d'étude est le référentiel relatif $\mathcal{R}'(O,x',y',z')$ de base $(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ lié au cerceau. Le repère (O,x',y',z') est en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical Oz du référentiel $\mathcal{R}(O,x,y,z)$ galiléen.

La base locale $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$ accompagne le point M dans son déplacement.



STPI1 Correction épreuve de mécanique

Janvier 2013.

Partie I : 1) Repère gal : en translation rectiligne et uniforme /R. (0,5pt)

2) $\vec\Omega(R'/R) = \omega\vec K = \dot\theta\vec K$ (0,5pt)

3) Vitesse relative : $\vec V_r = \dot r\vec e_r$ (0,5pt), Acc rel : $\vec\gamma_r = \ddot r\vec e_r$ (0,5pt)

4) Vitesse d'entr : $\vec V_e = \vec\Omega\wedge\vec{OM} = r\omega\vec e_\theta$; (0,5pt)

Vit abs : $\vec V_a = \vec V_e + \vec V_r = \dot r\vec e_r + r\omega\vec e_\theta$ (0,5pt)

5) Acc d'entr : $\vec\gamma_e = \vec\Omega\wedge(\vec\Omega\wedge\vec{OM}) = -r\omega^2\vec e_r$ (1pt)

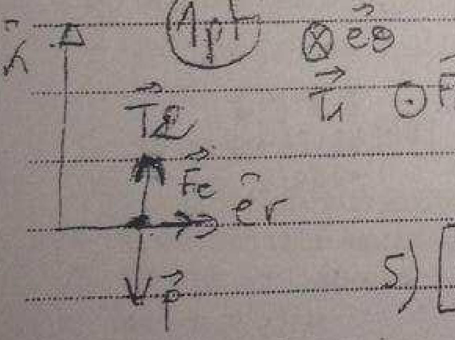
Acc Cor : $\vec\gamma_c = 2(\vec\Omega\wedge\vec V_r) = 2\omega\dot r\vec e_\theta$ (1pt)

6/ Acc abs : $\vec\gamma_a = \vec\gamma_e + \vec\gamma_r + \vec\gamma_c = (\ddot r - r\omega^2)\vec e_r + 2\omega\dot r\vec e_\theta$ (1pt)

Partie II) : 1) Bilan des forces : $\vec P, \vec T, \vec F_e, \vec F_c$ (1pt)

2) En gal : $\vec T = T_0\vec e_r + T_1\vec e_\theta + T_2\vec K = T_1\vec e_\theta + T_2\vec K$ (pas de frottement selon $\vec e_r$). (1pt)

3) Repr dans $(\vec K, \vec e_r)$:



4) PFD : $m\vec\gamma_r = \sum\vec F + \vec F_{ie} + \vec F_{ic}$

$m(\quad + \vec\gamma_r) = \vec P + \vec T + \vec F_{ie} + \vec F_{ic}$

$m\vec\gamma_r = \vec P + \vec T + \vec F_{ie} + \vec F_{ic}$

$m\ddot r\vec e_r = -mg\vec K + T_1\vec e_\theta + T_2\vec K + r\omega^2 m\vec e_r - 2m\dot r\omega\vec e_\theta$ (1pt)

5) $\boxed{\ddot r = r\omega^2}$ et $\boxed{mg = T_2,\ T_1 = 2m\dot r\omega}$ (2pts)

6) C. Init : $\boxed{r(t) = r_0\, ch(\omega t)}$ (2pts)

7) A $t = \tau$, $r = L \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega} Argch\left(\frac{L}{r_0}\right)$ (2pts)

8) $\vec V = \dot r\vec e_r = r_0\omega\, sh(\omega t)\vec e_r$ et $\vec V_L = r_0\omega\, sh(\omega\tau)\vec e_r$

$= \vec e_r\left(r_0\omega\sqrt{ch^2\omega\tau - 1}\right) = \left(r_0\omega\sqrt{\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 - 1}\right)\vec e_r = \boxed{\left(\omega\sqrt{L^2 - r_0^2}\right)\vec e_r}$ (2pts)

9) $\vec V'_L = \vec V_L + L\omega\vec e_\theta = \boxed{\left(\omega\sqrt{L^2 - r_0^2}\right)\vec e_r + L\omega\vec e_\theta}$ (2pts)

$(L = r)$

1) Déterminer en fonction de $r,\ \theta,\ \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$, la vitesse relative et l'accélération relative de M dans la base $(\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$.

2) Déterminer en fonction de $\omega, r, \theta,$ et $\dot{\theta}$ les expressions de la vitesse d'entraînement, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis dans la base $(\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$.

3) a- Quelles sont les forces appliquées à M dans le référentiel $\mathcal{R}'$?

b- Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}$.

c- En projetant la relation fondamentale de la dynamique suivant $\vec{e}_\theta$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme $r\ddot{\theta} = f(\theta)$ où $f(\theta)$ est à exprimer en fonction de θ, g, r et ω.

4) a- la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle E_p^{entr}, exprimer cette énergie en fonction de θ en prenant la position θ=0 comme origine des énergies potentielles $E_p^{entr}(\theta = 0) = 0$

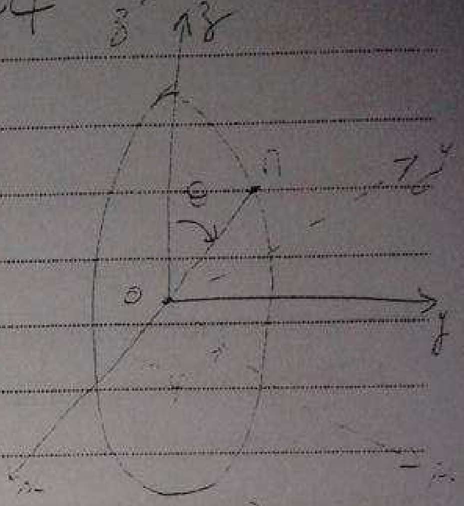
b- Déterminer l'énergie potentielle E_p^{pes} dont dérive le poids de M en fonction de θ en choisissant $E_p^{pes}(\theta = 0) = 0$.

c- Déduire de ce qui précède que l'énergie potentielle totale peut se mettre sous la forme $E_p(\theta) = K\left[\cos\theta - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \sin^2\theta\right]$ où K et ω_c sont à exprimer en fonction de m, g et r.

d- Ecrire la conservation de l'énergie mécanique en la justifiant et retrouver l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

5) Déterminer les positions d'équilibre relatif possibles de l'anneau sur le cercle.

Mécanique note $\frac{3}{4}$ Année 2012



(1) 1) $\vec{OM} = r\sin\theta\,\vec{i}' + r\cos\theta\,\vec{k}'$

(1) $\vec{v}_r(M) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R'} = r\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{i}' - r\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{k}'$

l'accélération relative

(1) $\vec{\gamma}_r(M) = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{R'} = (r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta)\,\vec{i}' - (r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta)\,\vec{k}'$

2) vitesse d'entraînement

$\vec{v}_e(M) = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_R + (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M})$

$\vec{\omega}_{R'/R} = \omega\,\vec{k}'$ ω constante, r constant

$O \equiv O'$

$\vec{v}_e(M) = (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM}) = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ r\sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix}$

(1,5) $\vec{v}_e(M) = \omega r\sin\theta\,\vec{j}'$

l'accélération d'entraînement

$\vec{\gamma}_e(M) = \left(\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_R + \left(\frac{d\vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M}\right) + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M})$

$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM}) = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_e = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

(1,5) $\vec{\gamma}_e(M) = -\omega^2 r\sin\theta\,\vec{i}'$

l'accélération de Coriolis

(1) $\vec{\gamma}_c = 2(\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r(M)) = 2\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ r\dot{\theta}\cos\theta & 0 & -r\dot{\theta}\sin\theta \end{vmatrix} = +\omega r\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j}'$

3) a) les forces appliquées à M dans R'

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}'$
- la réaction $\vec{R} =$
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c$

(2)

b) R' non galiléen

(1) (P.F.D) dans R' $m\vec{\gamma}_r = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$

c) projection de l'équation fondamentale de la dynamique sur $\vec{e_\theta}$.

(1) $m(\vec{\gamma}\cdot\vec{e_\theta}) = \vec{R}\cdot\vec{e_\theta} + \vec{P}\cdot\vec{e_\theta} + \vec{f}_{ie}\cdot\vec{e_\theta} + \vec{f}_{ic}\cdot\vec{e_\theta}$

$\vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{k}$

$\vec{P}\cdot\vec{e_\theta} = mg\sin\theta$; $\vec{R}\cdot\vec{e_\theta} = 0$ (pas de frottement)

$\vec{f}_{ie}\cdot\vec{e_\theta} = m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta$, $\vec{f}_{ic}\cdot\vec{e_\theta} = 0$

(2) $\Rightarrow \boxed{r\ddot{\theta} = \sin\theta\,(g + r\omega^2\cos\theta)}$

4) a) La force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle E_p^{ent}

(1) $E_p^{ent} = \int_0^\theta -\vec{f}_{ie}\cdot d\vec{OM} =$ $\quad d\vec{OM} = r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

$= -\int_0^\theta m\omega^2 r\sin\theta\,(r\,d\theta)(\vec{i}\cdot\vec{e_\theta}) = -\int_0^\theta m\omega^2 r^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$= m\omega^2 r^2\left[\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^\theta = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2\theta$

(1,5) $\boxed{E_p^{ent} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2\theta}$

b) énergie potentielle dont dérive le poids

(1) $E_p^{pes} = -\int_0^\theta \vec{P}\cdot d\vec{OM} = \int_0^\theta mg\,r\,d\theta\,(\vec{k}\cdot\vec{e_\theta}) = -mgr\int_0^\theta \sin\theta$

$= mgr\left[\cos\theta\right]_0^\theta = mgr(\cos\theta - 1)$

(1,5) $\boxed{E_p^{pes} = mgr(\cos\theta - 1)}$

c) $E_p(\theta) = E_p^{ent} + E_p^{pes} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2\theta + mgr(\cos\theta - 1)$

$= mgr\left[\cos\theta - 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r}{g}\sin^2\theta\right]$

$= K\left[\cos\theta - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\sin^2\theta\right]$

(1) (1) avec $\boxed{K = mgr}$ et $\boxed{\omega_c^2 = \frac{g}{r}}$

d) Conservation de l'énergie mécanique

$E_m = E_c + E_p = cte$ (pas de frottement)

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (r\dot\theta)^2$

(1) $E_m = \frac{1}{2} m (r\dot\theta)^2 + \left[mgr\left((\cos\theta - 1) - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r}{g}\sin^2\theta\right)\right]$

$\frac{dE_m}{d\theta} = 0 = \cancel{m} r^2 \dot\theta \ddot\theta + \cancel{m} gr\left[-\sin\theta\,\dot\theta - \frac{\omega^2 r}{2g} 2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\right]$

(1) $\boxed{r\ddot\theta = g\sin\theta - \omega^2 r \sin\theta\cos\theta}$

5) Les positions d'équilibre

(1) $\frac{dE_p}{d\theta} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 (2\sin\theta\cos\theta) - mgr\sin\theta$

$= -\sin\theta\,(mgr + m\omega^2 r^2 \cos\theta) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = 0$ où $mgr + m\omega^2 r^2\cos\theta = 0$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow \underline{\theta = 0}$ ou bien $\underline{\theta = \pi}$

(1) $\cancel{m}gr + \cancel{m}\omega^2 r^2 \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{g}{\omega^2 r}$

$\theta = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 r}$