Exercices de colle - MPSI/PCSI

Tristan Tourniaire

23 février 2016

Table des matières

Introduction

Pour me signaler toute erreur dans ce qui suit : tristan.tourniaire[at]ens.fr.

Première partie

Exercices

1 Logique et applications

log15 **Exercice 1.1** (solution). 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier divisible par 2 et 3. Montrer que n est divisible par 6.

2. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\forall (a,b,n) \in \mathbb{N}^3, (n \text{ est divisible par } a \text{ et } b \implies n \text{ est divisible par } ab).$$

3. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 6.
4. Montrer en fait que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

log16 **Exercice 1.2** (solution). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \overline{z}$.

log17 **Exercice 1.3** (solution). Soit $n \geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} kk!.$$

log01 **Exercice 1.4** (solution). Soit $f \colon X \to Y$ une application.

1. Soient A et B des parties de X. Que dire de $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$?
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A, B \subset X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

log02 **Exercice 1.5** (solution). Soit $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est surjective $\iff \forall A \subset X$, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
2. Montrer que f est injective $\iff \forall A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

log03 **Exercice 1.6** (solution). Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

log14 **Exercice 1.7** (solution). On définit la suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$. Montrer que (u_n) est croissante.

log10 **Exercice 1.8** (solution). Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

log11 **Exercice 1.9** (solution). Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

log04 **Exercice 1.10** (solution). 1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

2. On définit la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ par
$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que f est bijective.
3. On définit la fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ par $f(p,q) = 2^p(2q+1)$. Montrer que f est bijective.

log06 **Exercice 1.11** (solution)**.** Soit $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto a + \sqrt{2}b$. Montrer que f est injective.

log12 **Exercice 1.12** (solution)**.**
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+1)^n$. Calculer la dérivée de f de deux manières différentes.
2. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. On suppose que $n \geqslant 2$. Calculer $T = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

log13 **Exercice 1.13** (solution)**.** On définit la fonction $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ par $f(p,q) = p + \dfrac{1}{q}$. f est-elle injective ? Surjective ?

log05 **Exercice 1.14** (solution)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

log07 **Exercice 1.15** (solution)**.**
1. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
2. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$.
3. Montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$.

On admet le résultat suivant (théorème de Cantor-Bernstein) : si E et F sont des ensembles et si il existe $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to E$ des injections, alors il existe une bijection entre E et F.

4. En utilisant le théorème de Cantor-Bernstein, montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.
5. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$.

log08 **Exercice 1.16** (solution)**.** Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si et seulement si
$$\forall f\colon E \to E,\ \exists A \subset E \text{ tel que } A \neq \emptyset,\ A \neq E \text{ et } f(A) \subset A.$$

log09 **Exercice 1.17** (solution)**.** On appelle $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ définie par :
- $f(0) = 0$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, f(2n) = \dfrac{1}{f(n)+1}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, f(2n+1) = f(n) + 1$.

1. Expliquer pourquoi f est bien définie.
2. Calculer $f(n)$ pour n allant de 0 à 8.
3. Montrer que f est injective.
4. Calculer un antécédent de $\dfrac{14}{5}$ par f. On pensera à l'algorithme d'Euclide.
5. Montrer que f est surjective. On pensera à l'algorithme d'Euclide.

2 Fonctions usuelles

fon01 **Exercice 2.1** (solution). 1. Soit $\theta = \arctan(1/5)$. Calculer $\tan(4\theta - \pi/4)$.
2. En déduire la formule de Machin : $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$.

fon02 **Exercice 2.2** (solution). 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\arctan(n+1) - \arctan(n)$.
2. Déterminer la limite pour $N \to \infty$ de $S_N = \sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

fon03 **Exercice 2.3** (solution). 1. Soit f définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.
2. Que vaut f ?

fon04 **Exercice 2.4** (solution). Comparer π^e et e^π sans calculatrice.

fon05 **Exercice 2.5** (solution). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $[0, \pi]$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(a_k) \leqslant n \sin\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right).$$

fon06 **Exercice 2.6** (solution). On définit la fonction $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin^2(x)\sin(2x).$$

Déterminer le maximum de f sur $[0, \pi]$. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$,

$$\left|\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x)\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

fon07 **Exercice 2.7** (solution). Soit $f\colon x \mapsto \arcsin\left(2x/(1+x^2)\right)$. Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f. Calculer f'. En déduire une expression par morceaux de f.

3 Nombres complexes

com07 **Exercice 3.1** (solution). Soit z un complexe de module 1. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$. Interprétation géométrique ?

com16 **Exercice 3.2** (solution). 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$. On pourra développer l'expression $(\cos(x) + i\sin(x))^5$ à l'aide du binôme de Newton.
2. Montrer que $\cos^2(\pi/10) = (5+\sqrt{5})/8$.
3. Calculer $\cos(\pi/5)$.

com15 **Exercice 3.3** (solution). Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

com15:eq1 1. $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$,
com15:eq2 2. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$,
com15:eq3 3. $z^2 + (4-3i)z - (2+8i) = 0$,
com15:eq4 4. $z^2 + 5z + 7 - i = 0$,
com15:eq5 5. $z^n = \overline{z} \qquad (n \geq 1)$,
com15:eq6 6. $z^6 - 2z^3\cos(\varphi) + 1 = 0 \qquad (\varphi \in \mathbb{R})$,
com15:eq7 7. $(z^2-2z)\cos^2(\varphi)+1 = 0 \qquad (\varphi \in \mathbb{R})$,
com15:eq8 8. $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$,
com15:eq9 9. $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.

com05 **Exercice 3.4** (solution).
1. Démontrer l'inégalité triangulaire : si z et z' sont deux complexes, alors $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.
2. On suppose que $z \neq 0$. Montrer que si z et z' sont deux complexes vérifiant l'égalité dans l'inégalité triangulaire (autrement dit $|z+z'| = |z| + |z'|$), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \lambda z$.

com09 **Exercice 3.5** (solution). Soient θ et $\theta' \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et l'argument de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

com06 **Exercice 3.6** (solution). Soient x, y et z des complexes de module 1 tels que $x + y + z = 0$.
1. Calculer $xy + yz + xz$.
2. Calculer $x^2 + y^2 + z^2$.

com01 **Exercice 3.7** (solution). Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on note $h(z) = (z+1)/(z-2)$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|h(z)| = 1$ et l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(h(z)) = 0$.

com03 **Exercice 3.8** (solution).
1. Soit $f\colon x \mapsto x/(1+x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall x, y \geq 0, f(x) \leq f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
2. En déduire pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ l'inégalité :

$$\frac{|u+v|}{1+|u+v|} \leq \frac{|u|}{1+|u|} + \frac{|v|}{1+|v|}.$$

com10 **Exercice 3.9** (solution). Soient z, z' deux complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

com08 **Exercice 3.10** (solution). On note $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Montrer que $f(H) \subset D$.

Cela permet de définir l'application $\widetilde{f}\colon H \to D, z \mapsto f(z)$ (on restreint f au départ à H, et à l'arrivée à D).

2. Montrer que $\widetilde{f}$ est bijective.

com13 **Exercice 3.11** (solution). On dit d'un entier naturel n qu'il est somme de deux carrés s'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n = a^2 + b^2$.
1. Soient n et p deux entiers naturels. Montrer que si n et p sont somme de deux carrés, alors le produit np l'est aussi.
2. Donner une décomposition en somme de deux carrés de 1394.

com12 **Exercice 3.12** (solution). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

com14 **Exercice 3.13** (solution). On pose $\omega = e^{2i\pi/7}$. Soient $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$. Calculer A et B.

com04 **Exercice 3.14** (solution). Résoudre l'équation $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z^2+z+1}\right) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{j, j^2\}$.

com02 **Exercice 3.15** (solution). Soient a, b, c des nombres complexes deux à deux distincts. On note $j = \exp(2i\pi/3)$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) Dans le plan, les points A, B, C d'affixes respectives a, b, c forment un triangle équilatéral,

(ii) $j^2a + jb + c = 0$ ou $ja + j^2b + c = 0$,

(iii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$,

(iv) $\dfrac{1}{b-a} + \dfrac{1}{c-b} + \dfrac{1}{a-c} = 0$.

com17 **Exercice 3.16** (solution). Le but de l'exercice est de montrer que le réel $\alpha = \arccos(1/3)/\pi$ est irrationnel.

1. Calculer $\exp(i\alpha\pi)$.
2. Montrer que α est rationnel si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + 2\sqrt{2}i)^n = 3^n$.
3. Montrer qu'il existe des entiers a_n, b_n tels que $(1 + 2\sqrt{2}i)^n = a_n + i\sqrt{2}b_n$ et $a_n \not\equiv b_n \pmod 3$.
4. Conclure.

4 Équations différentielles

ed01 **Exercice 4.1** (solution). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$xy'(x) - \alpha y(x) = 0. \tag{4.1}$$ ed01:1

ed02 **Exercice 4.2** (solution). On considère l'équation fonctionnelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = xf(y) + yf(x), \tag{4.2}$$ ed02:eqf

où l'inconnue est une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit f une solution de l'équation (4.2) que l'on suppose dérivable sur $]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe une constante k dépendant de f, telle que f vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) - f(x) = kx. \tag{4.3}$$ ed02:eqd

2. En déduire les solutions de (4.2) dérivables sur $]0, +\infty[$.
3. Soit f une solution de (4.2) et soit F la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x). \tag{4.4}$$ ed02:eqp

4. En déduire les solutions de (4.2).

ed03 **Exercice 4.3** (solution)**.** On considère l'équation non linéaire

$$y' = 1 + y^2. \tag{4.5}$$ ed03:1

1. Donner une solution de (4.5) définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. On fixe $a < b$ des réels. Soit $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ une solution de (4.5). Déterminer f. On pourra poser $g = \arctan f$.
3. Résoudre l'équation (4.5) en fonction de a et b.

ed04 **Exercice 4.4** (solution)**.** Résoudre l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) + \sin(x) = 0 \tag{4.6}$$ ed04:1

sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}$.

ed05 **Exercice 4.5** (solution)**.** Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $T > 0$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue et T-périodique. Déterminer (en fonction de a) le nombre de solutions T-périodiques de l'équation

$$y' - ay = f. \tag{4.7}$$ ed05:1

ed06 **Exercice 4.6** (solution)**.** Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de l'équation

$$y'' + ay' + by = 0$$

soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.

ed07 **Exercice 4.7** (solution)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 1$.

ed08 **Exercice 4.8** (solution)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(x^2 + 1)y'(x) - xy(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$.

ed09 **Exercice 4.9** (solution)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(e^x - 1)y'(x) + e^x y(x) = 1$.

5 Arithmétique des entiers

ent01 **Exercice 5.1** (solution)**.** Calculer le chiffre des unités de $7^{7^{7^7}}$. On rappelle que par convention, a^{b^c} désigne $a^{(b^c)}$ et non $(a^b)^c$.

ent02 **Exercice 5.2** (solution)**.** Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une injection telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(n) \leqslant n.$$

Que dire de φ ?

ent03 **Exercice 5.3** (solution)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang.

ent04 **Exercice 5.4** (solution)**.**

1. Soit $a \geqslant 1$ un entier. Montrer qu'il existe $x \neq y$ des entiers tels que $x, y > a$ et

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

2. Soit $n \geqslant 3$. Montrer qu'il existe $u_1 < \cdots < u_n$ des entiers positifs tels que
$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}.$$

3. Soit $n \geqslant 3$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de n-uplets $(u_1, \dots, u_n)$ d'entiers positifs tels que $u_1 < \cdots < u_n$ et
$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}.$$

ent05 **Exercice 5.5** (solution)**.** Montrer que si $a \equiv b \pmod n$, alors $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$.

ent06 **Exercice 5.6** (solution)**.** Résoudre l'équation $n^2 + n + 7 \equiv 0 \pmod{13}$.

ent07 **Exercice 5.7** (solution)**.** Résoudre l'équation $m^n = n^m$, avec m et n deux entiers strictement positifs.

ent08 **Exercice 5.8** (solution)**.** Soit $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une injection. Montrer que l'ensemble
$$A = \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) \geqslant n\}$$
est infini.

6 Dénombrement

den08 **Exercice 6.1** (solution)**.** Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

1. $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\}$
2. $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$

den09 **Exercice 6.2** (solution)**.** Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$. On se donne un élément $a \in E$.

1. Montrer qu'il y a autant de parties de E contenant a que de parties ne contenant pas a.
2. Montrer qu'il y a autant de parties de E de cardinal pair ne contenant pas a que de parties de cardinal impair contenant a.
3. En déduire qu'il existe autant de parties de E de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
4. Calculer $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$.
5. Retrouver ce résultat en utilisant l'expression $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

den07 **Exercice 6.3** (solution)**.** Soit E un ensemble à n éléments et $X \subset E$ une partie de E à $p \leqslant n$ éléments.

1. Combien y a-t-il de parties $Y \subset E$ disjointes de X ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E disjointes ?

den03 **Exercice 6.4** (solution)**.** Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le cardinal de
$$\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}.$$

den04 **Exercice 6.5** (solution). On veut aller de $(0,0)$ à $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ en se déplaçant toujours d'une unité vers le haut ou vers la droite. Déterminer le nombre de chemins possibles.

den05 **Exercice 6.6** (solution). Soit $S(n,p)$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$.

1. Calculer $S(n,n)$, $S(n,1)$, $S(n,p)$ si $p > n$.
2. Calculer $S(n,2)$, $S(n,n-1)$.
3. Montrer que pour $n,p > 1$,
$$S(n,p) = p(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)).$$
4. Montrer que
$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

den01 **Exercice 6.7** (solution). Pour $n \geqslant 1$, calculer
$$\sum_{X \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} \sum_{k \in X} k.$$

den02 **Exercice 6.8** (solution). Soit E un ensemble à n éléments. On dit que $f\colon E \to E$ est une involution si $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Notons u_n le nombre d'involutions de E. Calculer u_1, u_2, u_3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n.$$

den06 **Exercice 6.9** (solution). Pour $n,p \in \mathbb{N}$ on définit $f(n,p)$ comme le nombre de n-uplets $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = p$. Montrer que $f(n+1,p) = f(n,0) + f(n,1) + \dots + f(n,p)$ puis déterminer $f(n,p)$.

7 Nombres réels

nre01 **Exercice 7.1** (solution). Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Montrer qu'elle admet un point fixe (autrement dit, $\exists x \in [0,1] / f(x) = x$).

nre02 **Exercice 7.2** (solution).

1. Énoncer et démontrer un analogue du théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

nre03 **Exercice 7.3** (solution). Soit $a \in \mathbb{Q}_+$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

1. On pose
$$X = \left\{ \left| \frac{p}{q} - \sqrt{a} \right|, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1 \right\}.$$
Montrer que X admet une borne inf et la calculer.
2. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $p \wedge q = 1$,
$$\left| \frac{p^2}{q^2} - a \right| \geqslant \frac{C_1}{q^2}.$$

3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $p \wedge q = 1$,
$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{a}\right| \geqslant \frac{C}{q^2}.$$

nre04 **Exercice 7.4** (solution). Montrer que $\{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

8 Suites

sui09 **Exercice 8.1** (solution).

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite convergeant vers $a > 0$. Montrer que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
2. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites convergeant respectivement vers a et b, avec $a < b$. Montrer que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

sui11 **Exercice 8.2** (solution). Déterminer la limite, si elle existe, des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$,
2. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$,
3. $u_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2-1}}$,
4. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$,
5. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$,
6. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$,
7. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

sui01 **Exercice 8.3** (solution).

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout n. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n - \lambda)$ est une suite géométrique. Déterminer explicitement u_n en fonction de n.
2. Plus généralement, si (u_n) est définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout n, déterminer explicitement u_n en fonction de n. On séparera les cas $a = 1$ et $a \neq 1$. Quelle est la limite de (u_n) ?

sui14 **Exercice 8.4** (solution). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = u_1 + \cdots + u_n$.

1. Montrer que si (u_n) converge vers 0, alors (S_n/n) converge vers 0.
2. Montrer que si (u_n) converge vers $a \in \mathbb{C}$, alors (S_n/n) converge vers a.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose que (u_n) est une suite rélle. Montrer que si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (S_n/n) aussi. La réciproque est-elle vraie ?

sui08 **Exercice 8.5** (solution). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs entières convergente. Montrer que (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

sui10 **Exercice 8.6** (solution). Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $0 \leq u_n \leq 1$, $0 \leq v_n \leq 1$ et $u_n v_n \to 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

sui04 **Exercice 8.7** (solution). Déterminer une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergente, telle que $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas.

sui12 **Exercice 8.8** (solution). Pour $m, n \geq 1$ on pose

$$u_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} u_{m,n}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} u_{m,n}$.

sui13 **Exercice 8.9** (solution). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.

1. Montrer que si (u_n) converge, alors la suite extraite (u_{2n}) converge vers la même limite.
2. Montrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite a, alors (u_n) converge vers a.
3. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante [1]. Montrer que si (u_n) converge, alors $(u_{\varphi(n)})$ converge vers la même limite.
4. Trouver un exemple de suite (u_n) telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, mais (u_n) diverge.
5. Montrer que si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

sui15 **Exercice 8.10** (solution). Pour tout $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une suite (e_n) convergeant vers 0 tels que [2] pour tout $n \geq 1$, $H_n = \ln n + \gamma + e_n$.
4. Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $\sum_{k=n+1}^{2n} 1/k$.

sui16 **Exercice 8.11** (solution). Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissant vers 0. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$. Montrer que S_n converge.

sui17 **Exercice 8.12** (solution). Déterminer la limite, si elle existe, des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$,
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,
4. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, où $x \in \mathbb{R}$.

sui03 **Exercice 8.13** (solution). Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que pour tout couple (k, n) d'entiers strictement positifs,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

sui06 **Exercice 8.14** (solution). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite (z_n) par la relation :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Déterminer la limite de $(z_n)_{n\geqslant 0}$.

1. On dit que φ est une *extraction*.
2. $\gamma \approx 0,577$ est appelée la *constante d'Euler-Mascheroni*.

sui07 **Exercice 8.15** (solution)**.** Montrer que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

sui02 **Exercice 8.16** (solution)**.**

1. Soit α un nombre irrationnel et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $k, l \in [\![0, n]\!]$ distincts tels que $|k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor - l\alpha + \lfloor l\alpha \rfloor| \leq 1/n$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $|\alpha - p/q| \leq 1/q^2$.
3. (facultatif) Montrer que pour tous x, y réels, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.
4. (facultatif) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{1}{n \sin n}\right)_{n\geqslant 1}$.

sui05 **Exercice 8.17** (solution)**.** Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. On suppose que la suite $\left(\dfrac{f(n)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers l. Montrer que $l = 1$.

9 Continuité

cont10 **Exercice 9.1** (solution)**.** (Caractérisation séquentielle) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a. Montrer que si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers a, alors $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.

cont12 **Exercice 9.2** (solution)**.**

1. Soient $k > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (on dit que f est k-*lipschitzienne*). Montrer que f est continue.
2. Montrer que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0, 1]$ est continue mais pas lipschitzienne.

cont06 **Exercice 9.3** (solution)**.** Soit P un polynôme réel de degré 3. Montrer que P s'annule sur $\mathbb{R}$. On commencera par montrer que P prend une valeur positive et une valeur négative.

cont16 **Exercice 9.4** (solution)**.** Un marcheur parcourt 12 kilomètres en 2 heures. Montrer qu'il y a un intervalle de 1 heure pendant lequel il parcourt exactement 6 kilomètres.

cont09 **Exercice 9.5** (solution)**.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x + 1)}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x + 1)}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$, $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x + \sin x$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} (\ln x)(\ln \ln x)$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$,

cont15 **Exercice 9.6** (solution)**.** Étudier le domaine de définition et la continuité des fonctions suivantes, ainsi que leurs éventuels prolongement par continuité aux bornes :

1. $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$,
2. $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$,
3. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\arcsin x}{x}}$,
4. $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x - 1}$,
5. $x \mapsto (x(\ln x)^2 + 1)^{1/\ln x}$,

cont11 **Exercice 9.7** (solution). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = qf(1)$.
4. Dans cette question, on suppose que f est croissante. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$. On pourra utiliser le fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux rationnels q_1, q_2 tels que $x - \varepsilon \leq q_1 \leq x \leq q_2 \leq x + \varepsilon$.
5. Dans cette question, on suppose que f est continue. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$.

cont14 **Exercice 9.8** (solution). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f possède un minimum.

cont08 **Exercice 9.9** (solution). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

cont13 **Exercice 9.10** (solution). Soient f et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

cont07 **Exercice 9.11** (solution). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction continue. Montrer que f est constante.

cont03 **Exercice 9.12** (solution). Montrer qu'il n'existe pas d'application $f\colon [0,1] \to]0,1[$ continue et surjective. Montrer en revanche qu'il existe une application $g\colon]0,1[\to [0,1]$ continue surjective.

cont04 **Exercice 9.13** (solution).

1. Trouver une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est continue en aucun point.
2. Trouver une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue en 0 et discontinue partout ailleurs.

cont05 **Exercice 9.14** (solution). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 1-périodique. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\left[a, a + \frac{1}{2}\right]\right).$$

cont01 **Exercice 9.15** (solution). Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'application $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante. Montrer que f est continue.

cont02 **Exercice 9.16** (solution). Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sup_{[0,x]} f = \sup\{f(t), t \in [0,x]\}.$$

Montrer que g est continue.

10 Structures algébriques

alg01 **Exercice 10.1** (solution). Soit $n \geqslant 2$ un entier, G un groupe de cardinal $2n$ et A, B deux sous-groupes de G de cardinal n tels que $A \cap B = \{1_G\}$. Montrer que $n \leqslant 2$.

11 Matrices

mat01 **Exercice 11.1** (solution). Soit $n \geqslant 2$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

et $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$. Calculer A^2 et en déduire A^{-1}.

mat02 **Exercice 11.2** (solution). Soit $n \geqslant 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & \ddots & (1) & \\ & (1) & \ddots & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des 2 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Calculer A^k pour $k \geqslant 0$.

mat03 **Exercice 11.3** (solution). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^k pour $k \geqslant 0$.

mat04 **Exercice 11.4** (solution). On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'*idéal annulateur* de A, c'est-à-dire

$$I_A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \; P(A) = 0\}.$$

On rappelle que si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme, la matrice $P(A)$ est définie par $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k$. Calculer de même l'idéal annulateur de B.
2. Montrer que A et B ne sont pas semblables.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'idéal annulateur de A est de la forme

$$I_A = \{PQ \mid Q \in \mathbb{R}[X]\},$$

où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme unitaire appelé le *polynôme minimal* de A.

mat05 **Exercice 11.5** (solution). Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice n, c'est-à-dire que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

mat06 **Exercice 11.6** (solution). Soit $n \geqslant 1$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice à coefficients réels telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

mat07 **Exercice 11.7** (solution). Soit $n \geqslant 1$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & 0 & 1 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse. On pourra voir A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.

On dit d'une permutation de $[\![1, n]\!]$ que c'est un *dérangement* si elle n'a pas de point fixe. On note u_n le nombre de dérangements.

2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

mat08 **Exercice 11.8** (solution). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que AM soit la matrice d'un projecteur.

mat09 **Exercice 11.9** (solution). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est non inversible si et seulement si il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que AM soit une matrice nilpotente.

mat10 **Exercice 11.10** (solution). Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la *trace* de A par :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,i}.$$

1. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Vect}(x)$. Montrer que u est une homothétie.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$ si et seulement si A est semblable à une matrice à diagonale nulle.
4. Montrer le même résultat dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

mat11 **Exercice 11.11** (solution).

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec un 1 à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, et des 0 partout ailleurs. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

mat13 **Exercice 11.12** (solution). On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $P(A) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^n par P. Déterminer le reste.
3. En déduire A^n.

mat12 **Exercice 11.13** (solution)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base et des équations de $\mathrm{Im}(A)$ dans $\mathbb{R}^4$.

12 Déterminants

det01 **Exercice 12.1** (solution)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $A_{i,j} = |i - j|$. Calculer son déterminant.

det02 **Exercice 12.2** (solution)**.** Soient $f_1, \dots, f_n$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $a_1, \dots, a_n$ des réels tels que la matrice $M = (f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible.

det03 **Exercice 12.3** (solution)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $A_{i,j} = 0$ si $i = j$, $A_{i,j} = 1$ si $i \neq j$. Calculer son déterminant.

det04 **Exercice 12.4** (solution)**.** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application non constante telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(I_n)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $f(A) \neq 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non inversible. Montrer que $f(A) = 0$.
4. (facultatif) Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que M^2 est semblable à M. En déduire que $f(M) = 1$.
5. (facultatif) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une transvection. Montrer que $f(T) = 1$.
6. (facultatif) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$f(A) = f\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & \det(A) \end{pmatrix}.$$

det05 **Exercice 12.5** (solution)**.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

det06 **Exercice 12.6** (solution)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad A + xB \in GL_n(\mathbb{R}).$$

det07 **Exercice 12.7** (solution). Lorsque $v = (x, y)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note

$$\|v\|_\infty = \max(|x|, |y|)$$

la *norme infini* de v.

1. Soient v_1, v_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires. Donner un équivalent, lorsque $r \to +\infty$, de
$$\mathrm{Card}\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \|mv_1 + nv_2\|_\infty \leqslant r\}.$$
2. Soit T un triangle du plan à coordonnées entières. On note b le nombre de points entiers sur le bord de T et a le nombre de points entiers à l'intérieur strict (donc sans compter les points sur le bord) de T. Montrer que l'aire de T est égale à
$$a + \frac{b}{2} - 1.$$

det08 **Exercice 12.8** (solution). Soient $n \geqslant 1$ et $V = \{f : x \mapsto P(x)e^x, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
2. Soit $\varphi : f \mapsto f'$. Montrer que c'est un endomorphisme de V et calculer son déterminant.

det09 **Exercice 12.9** (solution).

1. Pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$
2. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice $(a_{\min(i,j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
3. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice $(a_{\max(i,j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

det10 **Exercice 12.10** (solution). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, avec $a \neq b$. Pour $x \in \mathbb{C}$, on note

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (b) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (a) & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

et

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & & & (b+x) \\ & \lambda_2 + x & & \\ & & \ddots & \\ (a+x) & & & \lambda_n + x \end{vmatrix} = \det \left[A + x \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Montrer que Δ est une application affine. En déduire $\det A$.

13 Développements limités

dl05 **Exercice 13.1** (solution). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On se place au voisinage de 0.

1. On suppose que $f(0) = 0$ et $f'(x) = o(x^2)$. Montrer que $f(x) = o(x^3)$. On se donnera $\varepsilon > 0$ et on montrera qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [-\delta, \delta], |f(x)/x^3| \leq \varepsilon$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

2. On suppose maintenant que $f'(x) = a+bx+cx^2+o(x^2)$. Donner le développement limité de f à l'ordre 3. Attention : on peut intégrer un DL, mais on ne peut pas le dériver !
3. Généraliser ce résultat à l'ordre n.
4. En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, obtenir un développement limité de tan successivement à l'ordre 1, 3, 5.
5. Montrer que si f est deux fois dérivable en x alors $f(x+h) = f(x)+hf'(x)+h^2/2f''(x)+o(h^2)$ lorsque h tend vers 0.

dl01 **Exercice 13.2** (solution). Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Le faire à l'ordre 4 si on a du temps à perdre.

dl03 **Exercice 13.3** (solution). Déterminer la limite en 0 de

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2}.$$

dl06 **Exercice 13.4** (solution). Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$ à l'ordre 3 en 0,
2. $\ln(1+\sin x)$ à l'ordre 3 en 0,
3. $\cos(\ln x)$ à l'ordre 3 en 1,
4. $\sqrt{3+\cos x}$ à l'ordre 3 en 0,
5. $(1+x)^{1/x}$ à l'ordre 2 en 0,
6. $\dfrac{\arctan x}{\tan x}$ à l'ordre 2 en 0,
7. $\sin x$ à l'ordre 3 en $\pi/4$,
8. $\ln(x)/x^2$ à l'ordre 4 en 1,

dl07 **Exercice 13.5** (solution). Montrer que $f\colon x \mapsto \cosh(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

dl02 **Exercice 13.6** (solution). On définit la fonction $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (\cos x)^{1/x}.$$

Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

dl04 **Exercice 13.7** (solution).
1. Soit $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer la limite de f en 0.
2. Soit $u_0 \in [0,1]$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

14 Dérivation

der01 **Exercice 14.1** (solution). Soit $f\colon x \mapsto \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que f se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$. Ce prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

der08 **Exercice 14.2** (solution). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f' tend vers 0 en $+\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A$,
$$\left|\frac{f(x) - f(A)}{x - A}\right| \leq \varepsilon.$$
2. Montrer que $\forall x > A, |f(x)| \leq \varepsilon|x| + |f(A)|$.
3. En déduire que $f(x)/x$ tend vers 0 en $+\infty$.

`der09` **Exercice 14.3** (solution)**.** Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est prolongeable par continuité en 0. Si oui, ce prolongement est-il dérivable en 0 ? Si oui, est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

$f_0 \colon x \mapsto \sin(1/x)$, $f_1 \colon x \mapsto x\sin(1/x)$, $f_2 \colon x \mapsto x^2\sin(1/x)$, $f_3 \colon x \mapsto x^3\sin(1/x)$.

`der12` **Exercice 14.4** (solution)**.** Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable admettant des limites finies égales en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule.

`der07` **Exercice 14.5** (solution)**.** Calculer la dérivée n-ième de $f \colon x \mapsto e^x\cos(x)$ pour $n \geq 0$. On pourra utiliser les nombres complexes.

`der11` **Exercice 14.6** (solution)**.** Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. On suppose que a n'est pas sur le bord de I. Montrer que si a est un maximum local de f, alors $f'(a) = 0$. La réciproque est-elle vraie ? Montrer que si f est deux fois dérivable en a, avec $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$ alors a est un maximum local.

`der10` **Exercice 14.7** (solution)**.** Soit $f \colon x \mapsto \exp(-1/x^2)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. Montrer que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Quel est le développement limité à l'ordre n de f en 0 ?

`der03` **Exercice 14.8** (solution)**.** Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que
$$f^2 + (1 + f')^2 \leqslant 1.$$
Montrer que $f = 0$.

`der04` **Exercice 14.9** (solution)**.** Soit $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' \geqslant f$. Montrer que f est négative.

`der02` **Exercice 14.10** (solution)**.**

1. Trouver une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ qui tend vers 0 en $+\infty$, telle que f' diverge en $+\infty$.

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui tend vers 0 en $+\infty$. On suppose de plus que $|f''| \leqslant M$, avec $M > 0$. Le but des questions suivantes est de montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et $h = \varepsilon/M$.

2. Montrer qu'il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$|f((n + 1)h) - f(nh)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{M}.$$
3. Montrer que pour tout $n \geqslant N$, il existe $c \in [nh, (n + 1)h]$ tel que
$$|f'(c)| \leqslant \varepsilon.$$
4. En déduire que pour tout $x \geqslant Nh$,
$$|f'(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

der05 **Exercice 14.11** (solution)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est α-hölderienne s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha.$$

1. On suppose dans cette question que I est un segment. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est 1-hölderienne. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction α-hölderienne avec $\alpha > 1$. Montrer que f est constante.
3. Soit $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\ln x$. Déterminer l'ensemble des $\alpha > 0$ tels que f est α-hölderienne.

der06 **Exercice 14.12** (solution)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$, on a (lorsque $h \to 0$) :
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2).$$
2. On suppose de plus que $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

15 Polynômes

pol01 **Exercice 15.1** (solution)**.** 1. Déterminer les polynômes complexes irréductibles sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les polynômes réels irréductibles sur $\mathbb{R}$.

pol02 **Exercice 15.2** (solution)**.** Montrer que le polynôme

$$1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} \cdots + \frac{X^{2n}}{(2n)!}$$

n'a pas de racine réelle.

pol03 **Exercice 15.3** (solution)**.** Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

pol04 **Exercice 15.4** (solution)**.** Montrer que $\cos(\pi/9)$ est irrationnel.

pol05 **Exercice 15.5** (solution)**.** Soit E l'ensemble des solutions (pour $x \in \mathbb{R}$) de l'inéquation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x-k} \geqslant 1.$$

Montrer que E est la réunion de n intervalles disjoints, et calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

pol06 **Exercice 15.6** (solution)**.** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. On pose

$$P = \prod_{k=1}^{n} (\cos(a_k) + X\sin(a_k)).$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par X^2+1.

pol07 **Exercice 15.7** (solution)**.** Soit $n \geqslant 1$.

1. Factoriser le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

pol08 **Exercice 15.8** (solution)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n.$$

pol09 **Exercice 15.9** (solution)**.** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

pol10 **Exercice 15.10** (solution)**.** Démontrer le théorème d'interpolation de Lagrange : étant donnés $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels (et on suppose de plus que les x_i sont deux à deux distincts), montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

— $\deg P \leqslant n - 1$,

— $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(x_i) = y_i$.

pol11 **Exercice 15.11** (solution)**.** On considère l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0. \tag{15.1}$$ pol11:1

Dans la suite, on se fixe une solution $P \neq 0$.

1. Soit a une racine de P. Montrer que a^2 et $(a-1)^2$ sont également racines de P.
2. Soit a une racine de P. Montrer que $a \in \{0, 1, -j, -j^2\}$ avec $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.
3. Résoudre l'équation (15.1).

16 Espaces vectoriels

ev04 **Exercice 16.1** (solution)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels et $f\colon E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que f est injective si et seulement si l'image de toute famille libre de E est une famille libre de F.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si il existe une famille génératrice de E dont l'image est une famille génératrice de F.

ev10 **Exercice 16.2** (solution)**.** On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs sin et cos. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et que F et G sont supplémentaires dans E.

ev11 **Exercice 16.3** (solution)**.** Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Soit également H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que $F + G = F \oplus H$.

ev01 **Exercice 16.4** (solution)**.** Notons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'endomorphisme $\varphi\colon E \to E$ par

$$\varphi(f) = f'.$$

Existe-t-il ψ un endomorphisme de E tel que $\varphi \circ \psi = Id_E$? tel que $\psi \circ \varphi = Id_E$?

ev14 **Exercice 16.5** (solution)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f^2) = \ker(f)$.

ev02 **Exercice 16.6** (solution)**.** Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$. Montrer que f est inversible, puis que $\ker(f - 2Id)$ et $\ker(f - Id)$ sont supplémentaires dans E.

ev03 **Exercice 16.7** (solution)**.** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs de même image. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est un projecteur de même image que p et q.

ev05 **Exercice 16.8** (solution)**.** Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Pour tout i, on note $e_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application

$$x \mapsto \exp(\lambda_i x).$$

Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

ev06 **Exercice 16.9** (solution)**.** Montrer que les $\mathbb{R}$-endomorphismes de $\mathbb{C}$ sont les applications de la forme

$$z \mapsto az + b\bar{z},$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$. À quelle condition sur a et b cette application est-elle inversible ?

ev07 **Exercice 16.10** (solution)**.** Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que f et p commutent si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par f.

ev12 **Exercice 16.11** (solution)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g$ est bijective et $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim E$.

ev13 **Exercice 16.12** (solution)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\ker(f) = \mathrm{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad f^2 = 0 \text{ et } n = 2\,\mathrm{rg}(f).$$

ev15 **Exercice 16.13** (solution)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g \circ f = 0$ et $f = f \circ g$.

ev16 **Exercice 16.14** (solution)**.** Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. F est-il un hyperplan de E ?

ev08 **Exercice 16.15** (solution)**.** Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F un sous-espace vectoriel de E ne contenant que des fonctions de signe constant sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est de dimension au plus 1.

ev09 **Exercice 16.16** (solution)**.** Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la dimension de E ?

On note $F = \mathrm{Vect}\{f \in E / f \text{ est croissante}\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $x \mapsto x^2$ est un élément de F.
3. Montrer que $x \mapsto \sin(x)$ est un élément de F.
4. Montrer que $F = E$.

Désormais, on ne se limite plus aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $E' = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F' = \mathrm{Vect}\{f \in E' / f \text{ est croissante}\}$.

5. Montrer que $F' \neq E'$.

ev18 **Exercice 16.17** (solution)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{tr}(u) = 1$. Montrer que u est un projecteur.

17 Espaces euclidiens

euc01 **Exercice 17.1** (solution). On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$. Montrer que c'est un produit scalaire.

euc02 **Exercice 17.2** (solution). Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$ on définit $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

euc03 **Exercice 17.3** (solution). Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$ on définit $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

euc04 **Exercice 17.4** (solution). Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

euc05 **Exercice 17.5** (solution). Soit E un espace vectoriel euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|.$$

euc06 **Exercice 17.6** (solution). Montrer que $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18 Intégration

int05 **Exercice 18.1** (solution). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ (c'est le *cosinus hyperbolique* de x).

1. Pour $y \geq 1$, résoudre l'équation $\cosh x = y$ d'inconnue x. On posera $X = e^x$.
2. Montrer que $\cosh\colon [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est inversible et déterminer explicitement son inverse.
3. Calculer la dérivée de $\cosh^{-1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.
4. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cosh x}$.

int07 **Exercice 18.2** (solution). Pour chaque fonction, déterminer une primitive sur l'intervalle considéré :

1. $x \mapsto 1/(x^2 + a^2)$ sur $\mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$),
2. $x \mapsto \tan(x)$ sur $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$),
3. $x \mapsto 1/(x(\ln x)^4)$ sur $]1, +\infty[$,
4. $x \mapsto \ln(\ln x)/x$ sur $]1, +\infty[$,
5. $x \mapsto 1/(\cos^2(x)\sqrt{\tan x})$ sur $]k\pi, \pi/2 + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$),
6. $x \mapsto 1/(x + \sqrt{x})$ sur $]0, +\infty[$,
7. $x \mapsto 1/(x\sqrt{1 + \ln x})$ sur $]e^{-1}, +\infty[$,

8. $x \mapsto \arctan x$ sur $\mathbb{R}$,
9. $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$,
10. $x \mapsto 1/\sqrt{e^x-1}$ sur $]0,+\infty[$ à l'aide du changement de variable $t=\sqrt{e^x-1}$,
11. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ à l'aide du changement de variable $x=\sin t$,
12. $x \mapsto 1/(x\sqrt{x+1})$ sur $]0,+\infty[$ à l'aide du changement de variable $t=\sqrt{x+1}$,
13. $x \mapsto 1/(x^2+x+1)$ sur $\mathbb{R}$ en mettant le trinôme sous forme canonique,
14. $x \mapsto 1/(x^2+1)^2$ sur $\mathbb{R}$ à l'aide du changement de variable $x=\tan t$.

int08 **Exercice 18.3** (solution)**.** 1. Déterminer une primitive de $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$. Préciser les intervalles sur lesquels on la calcule.

2. Calculer une primitive de $g(x)=\dfrac{2x+5}{(x-1)^2(x+2)}$. Préciser les intervalles sur lesquels on la calcule.

int09 **Exercice 18.4** (solution)**.** Soient $S=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$ et $C=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $S=C$. Calculer $S+C$ et en déduire S et C. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

int10 **Exercice 18.5** (solution)**.** Soient $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que l'application $\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \lambda\mapsto\int_a^b(f+\lambda g)^2$ est un polynôme de degré au plus 2 dont le discriminant est négatif ou nul. En déduire l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|\leq\sqrt{\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t}.$$

int04 **Exercice 18.6** (solution)**.** Soit $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=1/2$. Montrer que f admet un point fixe.

int06 **Exercice 18.7** (solution)**.** 1. Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose $t=\tan(x/2)$. Montrer que $\sin x=2t/(1+t^2)$ et $\cos x=(1-t^2)/(1+t^2)$.

2. Déterminer une primitive de $x\mapsto 1/\sin x$ sur l'intervalle $]0,\pi[$. On utilisera le changement de variable $t=\tan(x/2)$.

int01 **Exercice 18.8** (solution)**.** Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n}.$$

int02 **Exercice 18.9** (solution)**.** Soit $A_0\cdots A_{n-1}$ le polynôme régulier inscrit dans le cercle unité tel que $A_0=(1,0)$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}A_0A_k.$$

int11 **Exercice 18.10** (solution)**.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a\in I$ et $f\colon I\to\mathbb{C}$ une fonction ne s'annulant pas.

1. Pour tout $x\in I$, on pose $g(x)=\displaystyle\int_a^x\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t$. Montrer que fe^{-g} est une fonction constante.

2. Montrer que si $f(a) = f(b)$, alors $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t$ est un entier relatif.

int03 **Exercice 18.11** (solution)**.** Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f(t)^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n}.$$

int12 **Exercice 18.12** (solution)**.** Soient $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0, f(1) = 0 \text{ et } f'(0) = 1\}$ et $f \in E$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (t-1)f''(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\displaystyle\int_0^1 f''(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 3$.
3. Trouver une fonction $f \in E$ qui satisfait l'égalité.

19 Convexité

conv01 **Exercice 19.1** (solution)**.**

1. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :
$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$
2. Quel est le volume maximal d'un parallélépipède rectangle à surface donnée ? On pourra appliquer l'inégalité précédente à $(1/a, 1/b, 1/c)$ où a, b, c sont les longueurs des côtés.

conv04 **Exercice 19.2** (solution)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $a \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi_a\colon \mathbb{R}\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ par $\varphi_a(x) = (f(x) - f(a))/(x-a)$.

1. (croissance des cordes) On veut montrer que φ_a est croissante.
   (a) Soient x, y deux réels tels que $a < x < y$. Trouver $t \in]0,1[$ tel que $x = ta+(1-t)y$. En déduire que $\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y)$.
   (b) Montrer de même que si $x < y < a$, alors $\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y)$.
   (c) Montrer que si $x < a < y$, alors $\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y)$. On pourra utiliser les fonctions φ_x et φ_y.
2. En déduire que f est dérivable à gauche et à droite en a.
3. Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \geq \lambda x + \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f(a) = \lambda a + \mu$.
4. Que dire si f est bornée sur $\mathbb{R}$?

conv03 **Exercice 19.3** (solution)**.** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ concave. Montrer que pour tous $x, y \geq 0$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

conv05 **Exercice 19.4** (solution)**.** Soient $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convexe. On pose $x_0 = \int_0^1 f(t)\,dt$ et on admet qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x) \geq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\varphi(x_0) = ax_0 + b$ (voir l'exercice 19.2). Montrer l'inégalité de Jensen intégrale :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

conv02 **Exercice 19.5** (solution)**.**

1. Montrer que si α, β, γ sont les angles (dans $]0, \pi/2[$) d'un triangle alors $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma)$.
2. Soient $a, b, c > 0$ tels que $a+b+c = abc$. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq 3/2$.

20 Séries

ser05 **Exercice 20.1** (solution). Montrer qu'une série absolument convergente est convergente.

ser06 **Exercice 20.2** (solution). Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

ser07 **Exercice 20.3** (solution). Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série $\sum_n 1/n^\alpha$.

ser01 **Exercice 20.4** (solution). Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \left(a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2}\right)$$

converge. Dans ce cas, donner la somme de la série.

ser02 **Exercice 20.5** (solution). Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}.$$

ser03 **Exercice 20.6** (solution). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. Montrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

ser04 **Exercice 20.7** (solution). Montrer que la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(\ln n)}{n}$$

est divergente.

21 Probabilités

pro01 **Exercice 21.1** (solution). Soit $0 \leqslant p \leqslant 1$ un taux d'erreur. Une série d'ordinateurs se transmet une information binaire (« vrai » ou « faux ») à la chaine. L'ordinateur 0 envoie « vrai » à l'ordinateur 1, qui transmet ensuite à l'ordinateur 2, etc. À chaque étape, il peut y avoir une erreur dans la transmission — avec probabilité p — et l'ordinateur $k+1$ reçoit l'opposé de ce qu'avait envoyé l'ordinateur k. Sinon (avec probabilité $1-p$), l'ordinateur $k+1$ reçoit la même information que l'ordinateur k. Calculer la probabilité p_n que l'ordinateur n reçoive l'information « vrai » (on a $p_0 = 1$).

pro02 **Exercice 21.2** (solution). Le cruel Dr. No a capturé un mathématicien paresseux et lui administre un poison mortel. Il place N coffres devant lui, et lui dit qu'avec probabilité p, il a placé l'antidote dans un des coffres de manière équiprobable, et avec probabilité $1-p$, il n'y a pas d'antidote du tout. Après avoir ouvert $N-1$ coffres, le mathématicien paresseux se demande si c'est bien la peine d'ouvrir le dernier coffre — c'est assez fatigant. Calculer la probabilité que l'antidote se trouve dans le dernier coffre, sachant qu'il ne se trouvait pas dans l'un des $N-1$ premiers.

pro03 **Exercice 21.3** (solution). On se donne $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne de numéro k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Puis on tire des boules avec remise, toutes dans l'urne choisie au début. On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
2. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $N \to +\infty$.

22 Variables aléatoires

va01 **Exercice 22.1** (solution). Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité fini (Ω, P). On suppose qu'il existe une application f définie sur $X(\Omega)$ telle que X et $f(X)$ sont indépendantes. Que dire de f ?

va02 **Exercice 22.2** (solution). Un homme trop alcoolisé titube dans une rue. Il fait des pas en avant ou en arrière, de manière aléatoire. Sa position au temps n est représentée par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_0 = 0$.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n = 0)$: c'est la probabilité que l'homme soit retourné là où il était au temps n.
2. On donne la formule de Stirling : lorsque $n \to +\infty$,
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

va03 **Exercice 22.3** (solution). Soit $p \in]0, 1[$. On lance une pièce de monnaie truquée (qui tombe sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1-p$). On note N le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un pile (on a donc $N \geqslant 1$). On relance ensuite la pièce N fois, et on note X le nombre de piles obtenus. Déterminer la loi de N, la loi de X et l'espérance de X.

va04 **Exercice 22.4** (solution). On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On en tire simultanément k (avec $1 \leqslant k \leqslant n$) et on note N le numéro le plus grand qu'on a tiré. Déterminer la loi de N et son espérance.

va05 **Exercice 22.5** (solution). Est-il possible de piper deux dés à 6 faces de telle sorte que la somme des deux dés suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$?

va06 **Exercice 22.6** (solution). Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[\![1, n]\!]$. On pose $I = \min(U, V)$ et $S = \max(U, V)$.

1. I et S suivent-elles la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$?
2. I et S sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de I.
4. Déterminer l'espérance de I.

5. Déterminer la loi de S.
6. Déterminer la loi du couple (I, S).

va07 **Exercice 22.7** (solution)**.** Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire simultanément n boules dans l'urne, sans remise, et on note X le nombre de boules blanches qu'on obtient. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Deuxième partie
Solutions

1 Logique et applications

log15_s **Solution 1.1** (énoncé). 1. n est divisible par 3 donc il existe un entier k tel que

$$n = 3k.$$

Si k est impair, alors $3k = n$ est encore impair ; d'où une contradiction. Ainsi k est pair, donc n est divisible par 6.

2. La proposition est fausse : il suffit de prendre $a = 2$, $b = 2$ et $n = 2$. En revanche, la proposition suivante est vraie :

$$\forall (a, b, n) \in \mathbb{N}^3, (n \text{ est divisible par } a \text{ et } b \implies n \text{ est divisible par } \operatorname{ppcm}(ab)).$$

3. D'après ce qu'on a vu, il suffit de montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 2 et par 3.

Divisible par 2. Comme p est un nombre premier différent de 2, il est impair. Donc $p - 1$ est pair ; et $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ est encore pair.

Divisible par 3. Comme p est un nombre premier différent de 3, il n'est pas divisible par 3. Il y a alors deux possibilités :
- Si $p \equiv 1 \pmod 3$, $p - 1$ est divisible par 3 ; et donc aussi $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.
- Si $p \equiv 2 \pmod 3$, $p + 1$ est divisible par 3 ; et donc aussi $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

4. Comme on l'a vu, p est impair, donc $p - 1$ et $p + 1$ sont tous les deux pairs. Il y a deux cas :
- Soit $(p - 1)/2$ est impair (et alors $(p + 1)/2$ est pair),
- Soit $(p - 1)/2$ est pair.

Dans les deux cas, le produit

$$\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2} = \frac{p^2-1}{4}$$

est pair, donc $p^2 - 1$ est divisible par 8. En utilisant par exemple le lemme de Gauss, on en déduit que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

log16_s **Solution 1.2** (énoncé). On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^3 = \overline{z}$. En prenant les modules, cela donne

$$|z|^3 = |z|,$$

soit

$$|z|(|z|^2 - 1) = 0.$$

Comme $|z|$ est un réel positif, z est de module 0 ou 1. Le seul complexe de module 0 étant 0, on suppose maintenant que z est de module 1. En multipliant l'équation des deux côtés par z, on obtient
$$z^4 = |z|^2 = 1.$$
Notons alors $z = \exp(i\theta)$, où θ est un réel. Cela permet d'écrire
$$e^{4i\theta} = 1,$$
donc $4\theta = 0 \pmod{2\pi}$, soit encore $\theta = 0 \pmod{\pi/2}$. Modulo 2π, θ est donc égal à 0, $\pi/2$, π ou $3\pi/2$. Conclusion : z appartient à l'ensemble $\{0, 1, i, -1, -i\}$.

Synthèse. Les cinq complexes 0, 1, i, -1, $-i$ sont bien des solutions de l'équation.

log17_s **Solution 1.3** (énoncé)**.** On utilise la relation $(k+1)! = (k+1)k!$ et un changement d'indice pour obtenir une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kk! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} k! - \sum_{k=1}^{n} k! \\ &= (n+1)! - 1.\end{aligned}$$

log01_s **Solution 1.4** (énoncé)**.**

1. Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \in A$ donc $f(x) \in f(A)$, et de même $f(x) \in f(B)$. Donc $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$. On a montré que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'égalité n'est pas vraie en général.
2. On raisonne par double implication.
   - Supposons f injective, et soient A et B deux parties de X. Comme on a déjà une inclusion, il ne reste plus qu'à montrer que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit donc $y \in f(A) \cap f(B)$, il existe alors $a \in A$ et $b \in B$ tels que $y = f(a) = f(b)$. Par injectivité de f, $a = b$ donc $a \in A \cap B$, et ainsi $y = f(a) \in f(A \cap B)$.
   - Supposons que $\forall A, B \subset X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Prenons $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$ et montrons que $x = y$. Pour cela, on pose $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. On a $f(A) = \{f(x)\}$ et $f(B) = \{f(y)\} = \{f(x)\}$, donc $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\}$. D'autre part, si $x \neq y$, alors $A \cap B = \varnothing$ donc $f(A \cap B) = \varnothing$. Cela contredit l'hypothèse, et finalement $x = y$. Cela montre que f est injective.

log02_s **Solution 1.5** (énoncé)**.**

1. On raisonne par double implication.
   - Supposons f surjective, et soit A une partie de X. Soit $y \in \overline{f(A)}$. Par surjectivité de f, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Par l'absurde, si $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$, ce qui est faux. Donc $x \notin A$, autrement dit $x \in \overline{A}$, d'où $y = f(x) \in f(\overline{A})$.
   - Supposons que $\forall A \subset X$, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. En prenant $A = X$, on obtient $\overline{f(X)} \subset f(\overline{X})$. Mais $\overline{X} = \varnothing$, donc $\overline{f(X)} \subset \varnothing$, d'où $\overline{f(X)} = \varnothing$, et en passant aux complémentaires on obtient $f(X) = Y$, ce qui veut précisément dire que f est surjective (pourquoi ?).

2. • Supposons f injective, et soit A une partie de X. Soit $y \in f(\overline{A})$, par définition il existe alors $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Par l'absurde, supposons que $y \in f(A)$. Alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. On a donc $y = f(a) = f(x)$, et par injectivité de f, $a = x$ donc $x \in A$ ce qui est faux. Conclusion : $y \in \overline{f(A)}$, c'est ce qu'on voulait démontrer.
   • Supposons que $\forall A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Soient $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$ et montrons que $x = y$. Prenons $A = \{x\}$, en appliquant l'hypothèse on obtient $f(\overline{\{x\}}) \subset \overline{f(\{x\})} = \overline{\{f(x)\}} = \overline{\{f(y)\}}$. Supposons que $x \neq y$. Alors $y \in \overline{\{x\}}$, donc $f(y) \in f(\overline{\{x\}}) \subset \overline{\{f(y)\}}$. C'est absurde. Finalement f est injective.

log03_s **Solution 1.6** (énoncé)**.** On raisonne par double implication.

- Supposons f injective, et soit A une partie de X. Montrons que $f^{-1}(f(A)) = A$.
  — Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
  — Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition, $f(x) \in f(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité de f, on a $x = a$ donc $x \in A$.
- Supposons que $\forall A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$. Soient $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$: on veut montrer que $x = y$. Pour cela, on pose $A = \{x\}$. Alors $f(A) = \{f(x)\} = \{f(y)\}$. En particulier, $f(y) \in f(A)$, donc $y \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}$. Finalement $x = y$.

log14_s **Solution 1.7** (énoncé)**.** On fait le calcul de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant le changement de variable $j = k + 1$. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \\ &= \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

log10_s **Solution 1.8** (énoncé)**.** Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ un couple d'entiers premiers entre eux tel que $\sqrt{2} = p/q$, soit en passant au carré

$$2q^2 = p^2.$$

Si p est impair, p^2 l'est aussi, mais c'est en contradiction avec l'égalité précédente. Donc p est pair, et p^2 est un multiple de 4, donc $q^2 = p^2/2$ est pair, donc q est pair. Ainsi p et q sont tous les deux pairs, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux.

log11_s **Solution 1.9** (énoncé)**.** On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe a et b deux entiers tels que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}.$$

En passant l'égalité au carré, on obtient

$$5 + \sqrt{6} = \frac{a^2}{b^2},$$

soit

$$\sqrt{6} = \frac{a^2 - 5b^2}{b^2}.$$

Comme $a^2 - 5b^2$ et b^2 sont des entiers, on a montré que $\sqrt{6}$ est rationnel. Soit p/q sa forme réduite (p et q sont des entiers premiers entre eux) :

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q}.$$

En passant de nouveau au carré, on se ramène a une égalité sur des entiers :

$$6q^2 = p^2.$$

Si p est impair, alors p^2 est encore impair, ce qui est impossible car $p^2 = 2(3q^2)$. Par l'absurde, on en déduit que p est pair. Ainsi p^2 est divisible par 4, et $3q^2 = p^2/2$ est divisible par 2. De la même manière qu'avant, si q est impair, alors $3q^2$ l'est aussi ; c'est absurde donc q est pair.

Conclusion : p et q sont tous les deux pairs, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. Finalement $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

log04_s **Solution 1.10** (énoncé).

1. L'application $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, n \mapsto n + 1$ est bijective.
2. **Injectivité.** Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $f(a) = f(b)$. Supposons que a et b sont de parités différentes : quitte à les échanger, on peut supposer que a est pair et b est impair. On a alors $a/2 = -(b+1)/2$, donc $a+b = -1$. C'est absurde car a et b sont positifs. Ainsi a et b ont la même paritéé, et on a soit $a/2 = f(a) = f(b) = b/2$, soit $-(a + 1)/2 = f(a) = f(b) = -(b + 1)/2$, ce qui amène dans les deux cas à $a = b$.

   Surjectivité. Soit $y \in \mathbb{Z}$. Si $y \geqslant 0$, on pose $x = 2y$. Si $y < 0$, on pose $x = -2y - 1$. x est alors un entier naturel, et c'est un antécédent de y par f.
3. La table 1 donne les premières valeurs de f.

   Injectivité. Soient (p, q) et $(p', q') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $f(p, q) = f(p', q')$. Quitte à inverser les deux couples, on peut supposer que $p \geqslant p'$. On a $2^{p-p'}(2q+1) = 2q'+1$ donc $2^{p-p'}(2q + 1)$ est impair. Or si un produit de deux entiers est impair, les deux entiers sont impairs. Donc $2^{p-p'}$ est impair, et ce n'est possible que si $p - p' = 0$. Ainsi $p = p'$, et on en déduit que $q = q'$. Cela montre que f est injective.

   Surjectivité. On procède par récurrence forte : Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « n admet un antécédent par f » pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie. De plus, si l'on prend $n \in \mathbb{N}$ quelconque et que l'on suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k \in \{0, \ldots, n - 1\}$, alors

   — Si n est impair, on pose $p = 0$ et $q = (n - 1)/2$. On a alors $f(p, q) = n$.

   — Si n est pair, on applique la propriété $\mathcal{P}(k)$ pour $k = n/2$: il existe $(p, q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $2^p(2q + 1) = n/2$. On a alors $f(p + 1, q) = n$.

   Dans les deux cas, on a trouvé un antécédent à n, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Par le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui revient exactement à dire que f est surjective.

log06_s **Solution 1.11** (énoncé). Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $f(a, b) = f(c, d)$. Alors $a - c = \sqrt{2}(d - b)$. Si $d - b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$ ce qui est impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Donc $d = b$. Comme $a - c = \sqrt{2}(d - b)$, on a de plus $a = c$, et finalement f est injective.

		p				
		0	1	2	3	4
	0	1	2	4	8	16
	1	3	6	12	24	48
q	2	5	10	20	40	80
	3	7	14	28	56	112
	4	9	18	36	72	144

og04:tab TABLE 1 – Valeurs de $f(p,q)$ pour $p,q \leqslant 4$

log12_s **Solution 1.12** (énoncé)**.**

1. D'une part, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = n(x+1)^{n-1}.$$
D'autre part, en développant avec la formule du binôme, on obtient pour tout x
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$
donc
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$
2. On peut calculer $f'(1)$ de deux manières différentes : cela donne
$$S = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$
3. Pour faire apparaitre un k^2 dans la somme, on dérive deux fois. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'une part
$$f''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2},$$
et d'autre part
$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}.$$
On regarde $f''(1)$, ce qui donne
$$T - S = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$
Et finalement $T = n(n+1)2^{n-2}$.

log13_s **Solution 1.13** (énoncé)**.** Montrons que f est injective. Soient (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2)$. Alors
$$p_2 - p_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}.$$
Or q_1 et q_2 sont supérieurs ou égaux à 1 donc
$$0 < \frac{1}{q_1} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{q_2} \leqslant 1.$$

On en déduit que
$$-1 < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < 1.$$
Donc $1/q_1 - 1/q_2 = p_2 - p_1$ est un entier relatif compris strictement entre -1 et 1 : ce ne peut être que 0. Ainsi $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$, ce qui montre que f est injective.

En revanche, f n'est pas surjective. Pour voir cela, raisonnons par l'absurde en supposant que $2/3$ admet un antécédent $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On a alors
$$p + \frac{1}{q} = \frac{2}{3},$$
or
$$0 < \frac{1}{q} \leqslant 1$$
d'où
$$-1 < -\frac{2}{3} < \frac{1}{q} - \frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{3} < 1.$$
L'entier $-p = 1/q - 2/3$ est compris strictement entre -1 et 1, donc $p = 0$. Ainsi $1/q = 2/3$, ce qui est impossible car q est entier. Finalement f n'est pas surjective.

`log05_s` **Solution 1.14** (énoncé)**.** On fait une récurrence à deux pas (une récurrence forte marche aussi). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ ».

— $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

— Soit $n \geqslant 2$, on suppose que $\mathcal{P}(n-2)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies. On a
$$\begin{aligned} x^n + \frac{1}{x^n} &= x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} - x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}} \\ &= \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)}_{\in\mathbb{Z}} - \underbrace{\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)}_{\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$
Donc $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$, et $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée. Par le principe de récurrence à deux pas, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

`log07_s` **Solution 1.15** (énoncé)**.**

1. Soit la fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ par :
$$f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
On vérifie facilement que f est une bijection.

2. Il y a plusieurs solutions. Pour créer une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^2$, on peut numéroter les éléments de $\mathbb{Z}^2$ en suivant une spirale. On peut aussi créer une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ en suivant les antidiagonales. Une troisième solution consiste à définir l'application $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ par :
$$g(a, b) = 2^a(2b+1) - 1.$$
Si a_1, b_1, a_2, b_2 sont des entiers naturels tels que $g(a_1, b_1) = g(a_2, b_2)$, alors quitte à supposer que $a_1 \leqslant a_2$, on a
$$2^{a_2 - a_1}(2b_1 + 1) = 2b_2 + 1.$$

Or le membre de droite est impair, tandis que le membre de gauche est pair si $a_2 > a_1$ et impair si $a_1 = a_2$. Cela montre que $a_1 = a_2$, et on en déduit aussi $b_1 = b_2$. Finalement g est injective. Pour montrer que g est surjective, on peut par exemple démontrer par récurrence forte sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$: « n admet un antécédent par g ».
Si l'on veut une bijection $\tilde{g}\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, il suffit de poser

$$\tilde{g}(a,b) = f(g(f^{-1}(a), f^{-1}(b))).$$

3. Un élément de $\mathbb{Q}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme p/q, où $q > 0$ et p est premier avec q. Cela nous donne une injection $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^2$:

$$h\colon p/q, \text{ avec } q > 0 \text{ et } p \text{ premier avec } q \mapsto (p,q).$$

Attention : si on ne précise pas que la fraction doit être sous forme irréductible, la fonction h est mal définie : par exemple, on ne sait pas si $f(1/2)$ vaut $(1,2)$ ou $(2,4)$.

4. Les questions précédentes nous donnent une injection $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ définie par composition :

$$\varphi = f^{-1} \circ \tilde{g} \circ h.$$

D'autre part, comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, l'application suivante $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ est une injection :

$$\psi\colon n \mapsto n.$$

Le théorème de Cantor-Bernstein permet de conclure qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

5. Si u est un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$, on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on lui associe

$$\lambda(u) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 1\}.$$

Alors λ est une bijection de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

log08_s **Solution 1.16** (énoncé)**.** On commence par le sens indirect, et on raisonne par contraposée. Supposons donc que E est un ensemble fini, que l'on peut donc noter

$$E = \{x_1, \dots, x_n\}$$

où n est le cardinal de E et $x_1, \dots, x_n$ sont les éléments de E deux à deux distincts. Soit $f\colon E \to E$ l'application définie par

$$\begin{aligned} f(x_i) &= x_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1,\\ f(x_n) &= x_1. \end{aligned}$$

Soit $A \subset E$ non vide et tel que $f(A) \subset A$. Il nous suffit alors de montrer que A est égal à E tout entier. Comme A est non vide, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_i \in A$. On a alors

$$f(x_i) \in f(A) = A,$$

et donc

$$f(f(x_i)) \in A,$$

etc. Comme $f(x_i) = x_{i+1}$, $f(f(x_i)) = x_{i+2}$, et ainsi de suite, en fait A contient tous les x_i donc $A = E$.

Montrons à présent le sens direct. On suppose que E est infini, et on prend une fonction $f\colon E \to E$ quelconque. On fixe aussi x un élément quelconque de E et on pose :

$$A = \{f(x), f(f(x)), \dots\} = \{f^n(x), n \geqslant 1\},$$

où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ désigne la composée n-ième de f. On a

$$f(A) = \{f^2(x), f^3(x), \dots\} \subset A,$$

et A est clairement non vide. Il reste à vérifier que $A \neq E$. On raisonne par l'absurde : si $A = E$, en particulier on a

$$x \in A,$$

et donc il existe un $n \geqslant 1$ tel que

$$f^n(x) = x.$$

Mais alors A peut se réécrire comme un ensemble fini

$$A = \{f(x), \dots, f^{n-1}(x), x\},$$

ce qui est absurde car $A = E$ est infini.

log09_s **Solution 1.17** (énoncé).

1. Ce qu'on attend ici est la démonstration par récurrence sur $n \geqslant 0$ de la propriété

$$\mathcal{P}(n)\colon \text{« } f(n) \text{ est bien défini et appartient à } \mathbb{Q}_+ \text{ ».}$$

On utilise une récurrence forte sur n. L'initialisation ne pose pas de problème. Ensuite, si on fixe $n \geqslant 1$ quelconque et qu'on suppose $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ vraies, alors

- si $n+1$ est pair, $f(n+1) = \dfrac{1}{f((n+1)/2)+1}$ est bien défini et appartient à $\mathbb{Q}_+$ d'après $\mathcal{P}((n+1)/2)$,
- si $n+1$ est impair, $f(n+1) = f(n/2)+1$ est bien défini et appartient à $\mathbb{Q}_+$ d'après $\mathcal{P}(n/2)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2. Pour n allant de 0 à 8, les valeurs de $f(n)$ sont :

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{5}{3}.$$

3. On montre par récurrence forte sur $n \geqslant 0$ la propriété

$$\mathcal{P}(n)\colon \text{« pour tout } m \neq n,\ f(m) \neq f(n) \text{ ».}$$

L'initialisation est facile. Soit $n \geqslant 1$, et supposons $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n-1)$ vraies. Soit $m \in \mathbb{N} \subset \{n\}$, il reste à montrer que $f(m) \neq f(n)$.

- Si m et n sont pairs, $f(n) = \dfrac{1}{f(n/2)+1} \neq \dfrac{1}{f(m/2)+1} = f(m)$ d'après $\mathcal{P}(n/2)$.
- Si m et n sont impairs, $f(n) = f((n-1)/2)+1 \neq f((m-1)/2)+1 = f(m)$ d'après $\mathcal{P}((n-1)/2)$.

- Si n est pair et m est impair, on a

$$f(n)=\frac{1}{f(n/2)+1}<1 \quad\text{et}\quad f(m)=f((m-1)/2)+1\geqslant 1,$$

ce qui suffit à montrer que $f(n)\neq f(m)$.

Finalement $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Par récurrence, f est injective.

4. On utilise l'algorithme d'Euclide pour $14/5$:

$$\begin{aligned}14&=2\times 5+4\\ 5&=1\times 4+1\\ 4&=4\times 1.\end{aligned}$$

Ensuite, on remonte. On a

$$\begin{aligned}f(1)&=1,\\ f(3)&=2,\\ f(7)&=3,\\ f(14)&=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4},\\ f(28)&=\frac{1}{1+1/4}=\frac{4}{5},\\ f(57)&=\frac{9}{5},\\ f(105)&=\frac{14}{5}.\end{aligned}$$

5. Démontrons par récurrence sur $q>0$ la propriété

$$\mathcal{P}(q)\colon \text{« pour tout } p\geqslant 0,\ p/q \text{ admet un antécédent par } f \text{ ».}$$

L'initialisation ne pose pas de problème car pour tout $p\geqslant 0$,

$$f(2^p-1)=p.$$

Soit maintenant $q>1$. Supposons $\mathcal{P}(1),\dots,\mathcal{P}(q-1)$ vraies, et soit $p\geqslant 0$. Il reste à démontrer que p/q admet un antécédent par f.

- Si $p=q$, $p/q=1$ admet 1 pour antécédent.
- Si $p<q$, alors
$$\frac{p}{q}=\frac{1}{1+(q-p)/p}.$$
Or d'après $\mathcal{P}(p)$, $(q-p)/p$ admet un antécédent (disons x) par f. On a alors $f(2x)=p/q$.
- Si $p>q$, alors on pose la division euclidienne de p par q : il existe $b\geqslant 1$ et $r\in\{0,\dots,q-1\}$ tels que
$$p=bq+r.$$
Alors
$$\frac{p}{q}=b+\frac{r}{q}=b+\frac{1}{1+(q-r)/r}.$$

On utilise $\mathcal{P}(r)$, qui nous dit que $(q-r)/r$ admet un antécédent x par f. On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{q-r}{r}, \\ f(2x) &= \frac{r}{q}, \\ f(4x+1) &= 1+\frac{r}{q}, \\ f(8x+3) &= 2+\frac{r}{q}, \\ &\vdots \\ f(2^b(2x+1)-1) &= b+\frac{r}{q} = \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{P}(q)$ est vraie. Par récurrence, f est surjective.

2 Fonctions usuelles

fon01_s **Solution 2.1** (énoncé). 1. Dans la suite, on utilisera la formule suivante :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

On part de $\tan(\theta) = 1/5$ pour calculer $\tan(4\theta - \pi/4)$. D'abord

$$\begin{aligned} \tan(2\theta) &= \tan(\theta+\theta) \\ &= \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan(\theta)^2} \\ &= \frac{2/5}{1-1/25} \\ &= 5/12, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \tan(4\theta) &= \tan(2\theta+2\theta) \\ &= \frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan(2\theta)^2} \\ &= \frac{10/12}{1-25/144} \\ &= 120/119, \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \tan(4\theta-\pi/4) &= \frac{\tan(4\theta)+\tan(-\pi/4)}{1-\tan(4\theta)\tan(-\pi/4)} \\ &= \frac{120/119-1}{1+120/119} \\ &= 1/239. \end{aligned}$$

2. On a l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant \frac{1}{5} = \tan(\theta) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

La fonction tangente étant croissante sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, on a donc

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6},$$

soit encore

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant 4\theta - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{5\pi}{12},$$

et a fortiori

$$-\frac{\pi}{2} < 4\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

La fonction $\tan\colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ étant bijective d'inverse arctan, on a pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$: $\arctan(\tan x) = x$ (attention, ce n'est vrai que sur $]-\pi/2, \pi/2[$). Ainsi

$$\arctan\left(\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\theta - \frac{\pi}{4}.$$

Mais d'après la question précédente, $\tan(4\theta - \pi/4) = 1/239$. Conclusion : on a obtenu la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

fon02_s **Solution 2.2** (énoncé). 1. On utilise la formule de duplication de la tangente :

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan(n+1) - \arctan(n)\right) &= \frac{\tan(\arctan(n+1)) + \tan(\arctan(-n))}{1 - \tan(\arctan(n+1))\tan(\arctan(-n))} \\ &= \frac{1}{1+n+n^2}.\end{aligned}$$

La fonction $\tan\colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est bijective d'inverse arctan, donc pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ on a $\arctan(\tan(x)) = x$ (ce n'est pas vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$!). Ici, comme

$$0 < \arctan(n+1) < \frac{\pi}{2}$$

et

$$0 < \arctan(n) < \frac{\pi}{2},$$

on a l'encadrement

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(n+1) - \arctan(n) < \frac{\pi}{2},$$

ce qui permet de voir que

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

2. On a une somme télescopique : pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N} (\arctan(n+1) - \arctan(n)) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \arctan(n+1) - \sum_{n=0}^{N} \arctan(n) \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \arctan(n) - \sum_{n=0}^{N} \arctan(n) \\
&= \arctan(N+1) - \arctan(0) \\
&= \arctan(N+1).
\end{aligned}$$

Conclusion : S_N converge vers $\pi/2$. On peut écrire

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

fon03_s **Solution 2.3** (énoncé)**.** La fonction f est représentée à la figure 1.

1. Définissons l'application $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 < 1 + x^2,$$

donc en passant à la racine carrée

$$|x| < \sqrt{1+x^2},$$

soit encore

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1.$$

La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$. Or la fonction arcsin est définie et dérivable sur $]-1,1[$. Par composition, $f = \arcsin \circ g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons maintenant la dérivée de g, avant de composer avec arcsin. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = x\left(1+x^2\right)^{-1/2}$$

et

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(1+x^2\right)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}\right)2x\left(1+x^2\right)^{-3/2} \\
&= \left(1+x^2\right)^{-1/2}\left(1 - x^2\left(1+x^2\right)^{-1}\right) \\
&= \left(1+x^2\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right) \\
&= \left(1+x^2\right)^{-1/2}\frac{1}{1+x^2} \\
&= \left(1+x^2\right)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

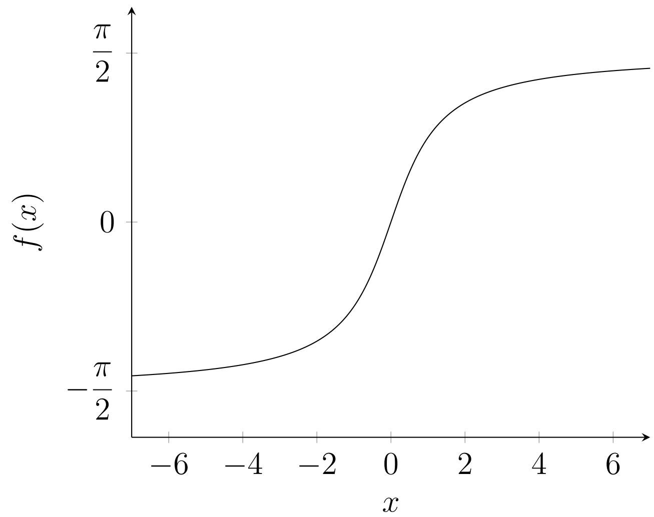
On passe maintenant à f : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= g'(x) \arcsin'(g(x)) \\
&= \left(1+x^2\right)^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \\
&= \left(1+x^2\right)^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \\
&= \left(1+x^2\right)^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} \\
&= \left(1+x^2\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

2. Les fonctions f et arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont la même dérivée. Il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \arctan(x) + C.$$

Il suffit alors d'évaluer en 0 pour obtenir $C = 0$, de sorte que f est la fonction arctan.



on03:fig FIGURE 1 – Graphe de la fonction $f\colon x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

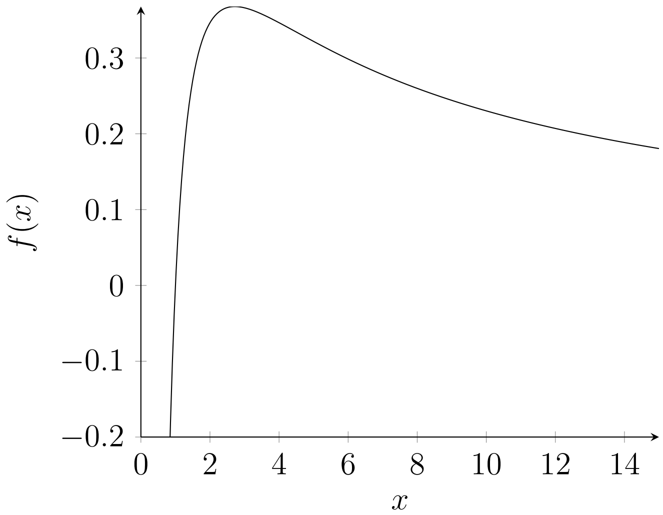
fon04_s **Solution 2.4** (énoncé)**.** Comme les deux quantités sont positives, on peut passer au log qui est croissant : on a

$$\begin{aligned}
e^\pi < \pi^e &\iff \ln(e^\pi) < \ln(\pi^e) \\
&\iff \pi < e \ln(\pi) \\
&\iff \frac{1}{e} < \frac{\ln(\pi)}{\pi}.
\end{aligned}$$

On étudie alors la fonction $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)/x$ (voir figure 2). Elle est dérivable sur son intervalle de définition et sa dérivée vaut $f'(x) = (1-\ln(x))/x^2$. On en déduit que f est croissante sur l'intervalle $]0, e]$ et décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$. Le maximum de f est donc atteint en e, donc en particulier $f(\pi) \leqslant f(e)$, autrement dit

$$\frac{\ln(\pi)}{\pi} \leqslant \frac{1}{e}.$$

Finalement $e^\pi \geqslant \pi^e$.



on04:fig FIGURE 2 – Graphe de la fonction $f \colon x \mapsto \dfrac{\log x}{x}$

fon05_s **Solution 2.5** (énoncé). Pour $n = 2$, on doit montrer l'inégalité suivante (avec $a, b \in [0, \pi]$) :

$$\sin(a) + \sin(b) \leqslant 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Or $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$. Comme le cosinus est inférieur à 1, l'inégalité en découle.

On en déduit l'inégalité pour $n = 4$: en effet, si a, b, c, d sont des éléments de $[0, \pi]$, on a

$$\begin{aligned} & \sin(a) + \sin(b) \leqslant 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \text{et} \quad & \sin(c) + \sin(d) \leqslant 2 \sin\left(\frac{c+d}{2}\right), \end{aligned}$$

donc en sommant et en réutilisant l'inégalité encore une fois :

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) &\leqslant 2\left(\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin\left(\frac{c+d}{2}\right)\right) \\ &\leqslant 4 \sin\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right). \end{aligned}$$

En prenant $d = (a+b+c)/3$ dans l'inégalité précédente, on en déduit l'inégalité pour $n = 3$.

Généralisons : par récurrence, on peut montrer que pour tout $p \geqslant 0$ on a

$$\sum_{k=1}^{2^p} \sin(a_k) \leqslant 2^p \sin\left(\frac{\sum_{k=1}^{2^p} a_k}{2^p}\right).$$

Alors, si $n \geqslant 1$ et $a_1, \dots, a_n \in [0, \pi]$, on prend un p tel que $n \leqslant 2^p$ et on pose

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2^p} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

En remplaçant dans l'inégalité, cela donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin(a_k) = \sum_{k=1}^{2^p} \sin(a_k) - \sum_{k=n+1}^{2^p} \sin(a_k) \\
&\leqslant 2^p \sin\left(\frac{\sum_{k=1}^{2^p} a_k}{2^p}\right) - (2^p - n)\sin\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \\
&= 2^p \sin\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) - (2^p - n)\sin\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \\
&= n \sin\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right).
\end{aligned}$$

fon06_s **Solution 2.6** (énoncé). f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$ on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\cos(x)\sin(x)\sin(2x) + 2\sin^2(x)\cos(2x) \\
&= 4\cos^2(x)\sin^2(x) + 2\sin^2(x)(2\cos^2(x) - 1) \\
&= 2\sin^2(x)(4\cos^2(x) - 1).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f'(x) \leqslant 0 &\iff 4\cos^2(x) - 1 \leqslant 0 \\
&\iff \cos^2(x) \leqslant \frac{1}{4} \\
&\iff \cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\
&\iff x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].
\end{aligned}$$

Cela nous permet de tracer le tableau de variations de f (voir figure 3).

Le maximum de f sur $x \in [0, \pi]$ est donc $3\sqrt{3}/8$. Or on peut étendre f à tout $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x + \pi) &= \sin^2(x + \pi)\sin(2(x + \pi)) \\
&= (-\sin(x))^2 \sin(2x + 2\pi) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

f est π-périodique, donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est toujours $3\sqrt{3}/8$. De même, le minimum de f est $-3\sqrt{3}/8$. En fait, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

x	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/8$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}/8$	$\nearrow$	0

om04:tab

FIGURE 3 – Variations de f

Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x)\right|^3 &= \left|(\sin(x))^3(\sin(2x))^3 \cdots (\sin(2^n x))^3\right| \\
&= \left|\sin(x) \times \sin^2(x)\sin(2x) \times \cdots \times \sin^2((n-1)x)\sin(nx) \times \sin(nx)^2\right| \\
&= \left|\sin(x) f(x) f(2x) \cdots f(nx) \sin(nx)^2\right| \\
&\leqslant \left|\sin(x)\sin(nx)^2\right| \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n \\
&\leqslant \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}.
\end{aligned}$$

En passant à la racine cubique, on obtient le résultat.

fon07_s **Solution 2.7** (énoncé)**.** La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x-1)^2 \geq 0 \text{ et } (x+1)^2 \geq 0.$$

En développant les carrés, on obtient

$$-(1+x^2) \leq 2x \leq 1 + x^2.$$

Ainsi

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

L'inégalité est stricte sauf lorsque $x = 1$ ou $x = -1$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable (a priori) sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour tout x différent de -1 et de 1 on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

On raisonne intervalle par intervalle : il existe trois constantes réelles A, B, C telles que :

$$f(x) = \begin{cases} -2\arctan(x) + A & \text{si } x < -1, \\ 2\arctan(x) + B & \text{si } -1 < x < 1, \\ -2\arctan(x) + C & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Comme f tend vers 0 en $\pm\infty$, on a $A = -\pi$ et $C = \pi$. De plus, $f(0) = 0$ donc $B = 0$. Ainsi

$$f(x) = \begin{cases} -2\arctan(x) - \pi & \text{si } x \leq -1, \\ 2\arctan(x) & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ -2\arctan(x) + \pi & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

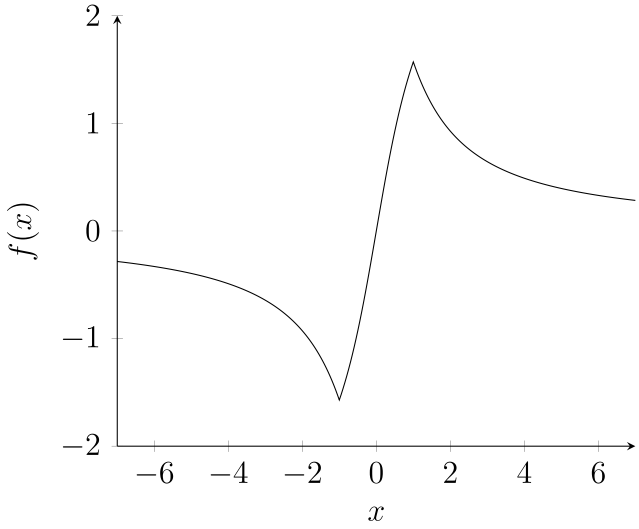
Voir figure 4 pour le graphe de f.

3 Nombres complexes

com07_s **Solution 3.1** (énoncé)**.** On développe :

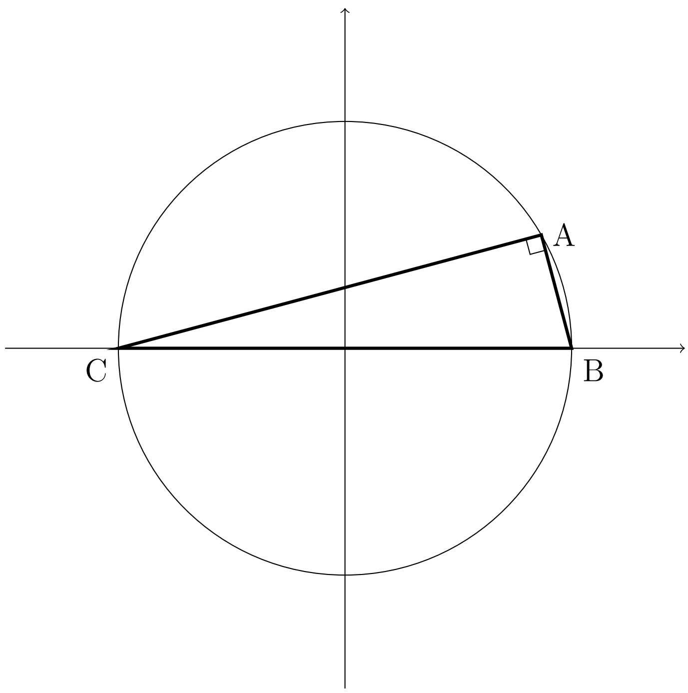
$$\begin{aligned}
|1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)(1+\overline{z}) + (1-z)(1-\overline{z}) \\
&= 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} + 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} \\
&= 2 + 2|z|^2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Plaçons dans le plan complexe les trois points A, B, et C d'affixes respectives z, 1, et -1 (voir figure 5). Le calcul plus haut revient à dire que $AC^2 + AB^2 = BC^2$, autrement dit le triangle ABC est rectangle en A d'après le théorème de Pythagore.



on07:fig

Figure 4 – Graphe de la fonction $f\colon x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$



om07:fig

Figure 5 – Triangle ABC

com16_s **Solution 3.2** (énoncé). 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\exp(i5x) &= (\exp(ix))^5 \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))^5 \\ &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cos^k(x)(i\sin(x))^{5-k} \\ &= \cos^5(x) + 5i\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) - 10i\cos^2(x)\sin^3(x) \\ &\quad + 5\cos(x)\sin^4(x) + i\sin^5(x).\end{aligned}$$

En prenant les parties réelles et en utilisant la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) \\ &= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)(1-\cos^2(x)) + 5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2 \\ &= 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x).\end{aligned}$$

2. Notons $X = \cos^2(\pi/10)$. La relation précédente appliquée à $x = \pi/10$ donne

$$\cos(\pi/2) = 16\cos^5(\pi/10) - 20\cos^3(\pi/10) + 5\cos(\pi/10),$$

soit

$$16X^2 - 20X + 5 = 0.$$

C'est une équation du second degré, ses solutions sont

$$X_1, X_2 = \frac{20 \pm \sqrt{80}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

Il reste à savoir à laquelle des deux solution X est égal. Comme cos est décroissante sur $[0, \pi]$, on a

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \geq \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}.$$

Comme

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8} \leq \frac{3}{4} \leq \frac{5+\sqrt{5}}{8},$$

on obtient finalement

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

3. La relation $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ appliquée en $x = \pi/10$ donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2X - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

com15_s **Solution 3.3** (énoncé). Rappel de la méthode pour résoudre les équations du second degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$: on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et on cherche $\delta \in \mathbb{C}$ tel que[3] $\delta^2 = \Delta$. Les solutions sont alors $z_1, z_2 = (-b \pm \delta)/(2a)$.

3. δ est une *racine carrée complexe* de Δ.

1. On a $\Delta = 16(5+12i)$. Pour simplifier les calculs, on cherche $x+iy$ un complexe tel que $(x+iy)^2 = 5+12i$ (où x et y sont des réels). En prenant les parties réelles, on obtient l'égalité $x^2 - y^2 = 5$. En prenant le module, on obtient $x^2+y^2 = \sqrt{5^2+12^2} = 13$. On en déduit que $x^2 = 9$, et $y^2 = 4$. On vérifie sans problème que $(3+2i)^2 = 5+12i$, ce qui permet d'écrire les solutions sous la forme
$$z_1, z_2 = \frac{16 \pm 4(3+2i)}{8} = \frac{1}{2} - i, \frac{7}{2} + i.$$
2. On a $\Delta = 9 - 40i$. On cherche un complexe $x+iy$, avec x et y deux réels, tel que $(x+iy)^2 = 9-40i$. En prenant les parties réelles, on obtient $x^2-y^2 = 9$. En prenant le module, on obtient $x^2+y^2 = \sqrt{9^2+40^2} = 41$. On en déduit que $x^2 = 25$ et $y^2 = 16$. On vérifie que $(5-4i)^2 = 9-40i$. Ainsi les solutions sont
$$z_1, z_2 = \frac{5 \pm (5-4i)}{2} = 2i, 5-2i.$$
3. On a $\Delta = 15+8i$. On cherche un complexe $x+iy$, avec x et y deux réels, tel que $(x+iy)^2 = 15+8i$. En prenant les parties réelles, on obtient $x^2-y^2 = 15$. En prenant le module, on obtient $x^2+y^2 = \sqrt{15^2+8^2} = 17$. On en déduit que $x^2 = 16$ et $y^2 = 1$. On vérifie que $(4+i)^2 = 15+8i$. Ainsi les solutions sont
$$z_1, z_2 = \frac{-4+3i \pm (4+i)}{2} = 2i, -4+i.$$
4. On a $\Delta = -3+4i$. On cherche un complexe $x+iy$, avec x et y deux réels, tel que $(x+iy)^2 = -3+4i$. En prenant les parties réelles, on obtient $x^2-y^2 = -3$. En prenant le module, on obtient $x^2+y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. On en déduit que $x^2 = 1$ et $y^2 = 4$. On vérifie que $(1+2i)^2 = -3+4i$. Ainsi les solutions sont
$$z_1, z_2 = \frac{-5 \pm (1+2i)}{2} = -2+i, -3-i.$$
5. **Analyse.** Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $z^n = \overline{z}$. En prenant les modules, on obtient $|z|^n = |z|$, donc $|z|$ vaut 0 ou 1. Si on suppose z non nul, z est de module 1. En multipliant l'équation par z, on obtient
$$z^{n+1} = z\overline{z} = |z|^2 = 1,$$
donc z est une racine $(n+1)$-ième de l'unité.

Synthèse. Soit z une racine $(n+1)$-ième de l'unité. Alors $z^{n+1} = 1$ et z est de module 1, donc
$$z^n = z^{n+1}\frac{1}{z} = \frac{1}{z} = \overline{z}.$$
Donc z est solution de l'équation. Par ailleurs, $z = 0$ est également une solution.

Conclusion. Les solutions sont 0 et les racines $n+1$-ièmes de l'unité. Ces dernières peuvent s'écrire explicitement sous la forme $\exp(2ik\pi/(n+1))$, avec $0 \leq k \leq n$.
6. **Analyse.** Soit z une solution de l'équation. En notant $Z = z^3$, on a
$$Z^2 - 2Z\cos(\varphi) + 1 = 0.$$

C'est une équation du second degré (à coefficients réels) de discriminant $\Delta = 4(\cos^2(\varphi) - 1) \leq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2\cos(\varphi) \pm 2i\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}{2} \\ &= \cos(\varphi) \pm i|\sin(\varphi)| \\ &= \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi) \\ &= \exp(i\varphi) \text{ ou } \exp(-i\varphi). \end{aligned}$$

Comme $z^3 = Z$, on a

$$z \in \left\{ \exp\left(\frac{\pm i\varphi}{3}\right), \exp\left(\frac{\pm i\varphi + 2i\pi}{3}\right), \exp\left(\frac{\pm i\varphi + 4i\pi}{3}\right) \right\}.$$

Synthèse. Soit $z = \exp((\pm i\varphi + 2k\pi)/3)$, avec $k = 0, 1, 2$. On vérifie facilement que z est solution de l'équation $z^6 - 2z^3\cos(\varphi) + 1 = 0$.

7. On a $\Delta = 4\cos^4(\varphi) - 4\cos^2(\varphi) = -4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)$. Les solutions sont donc

$$\begin{aligned} z_1, z_2 &= \frac{2\cos^2(\varphi) \pm 2i|\cos(\varphi)\sin(\varphi)|}{2\cos^2(\varphi)} \\ &= 1 \pm i|\tan(\varphi)| \\ &= 1 \pm i\tan(\varphi). \end{aligned}$$

Si $\varphi = \pi/2 \pmod{\pi}$, $\cos(\varphi) = 0$ et l'équation n'a pas de solution.

8. **Analyse.** Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{Im}(z^3) = \mathrm{Re}(z^3)$. Alors z^3 est de la forme $z^3 = x + ix = \sqrt{2}x\exp(i\pi/4)$, où x est un réel. Donc $\arg(z^3) = \pi/4 \pmod{\pi}$, d'où

$$\arg(z) = \frac{\pi}{12} \pmod{\frac{\pi}{3}}.$$

Synthèse. Si z est de la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta = \pi/12 \pmod{\pi/3}$, alors z est bien solution de l'équation.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont 0 et les complexes d'argument $\pi/12$, $5\pi/12$, $9\pi/12$, $13\pi/12$, $17\pi/12$ ou $21\pi/12 \pmod{2\pi}$.

9. **Analyse.** Soit z un complexe tel que $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z} - 1)$. En prenant les modules, on obtient $|z||z-1| = |z|^2|z-1|$. Si z est différent de 0 et de 1, il est donc de module 1. En multipliant l'équation par z, on obtient

$$|z|^2(z-1) = z^2(|z|^2 - z),$$

soit

$$z - 1 = z^2(1-z),$$

ou encore

$$(z-1)(1+z^2) = 0.$$

Donc $z \in \{0, 1, i, -i\}$.

Synthèse Les complexes 0, 1, i, $-i$ sont des solutions de l'équation.

com05_s **Solution 3.4** (énoncé). 1. Soient z et z' deux complexes. On met au carré et on développe :

$$\begin{aligned} |z+z'| \leq |z|+|z'| &\iff |z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2 \\ &\iff (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) \leq |z|^2+|z'|^2+2|zz'| \\ &\iff |z|^2+|z'|^2+z'\overline{z}+z\overline{z'} \leq |z|^2+|z'|^2+2|zz'| \\ &\iff z'\overline{z}+\overline{z'\overline{z}} \leq 2|zz'| \\ &\iff \operatorname{Re}(z'\overline{z}) \leq |zz'| \\ &\iff \operatorname{Re}(z'\overline{z}) \leq |z'\overline{z}|. \end{aligned}$$

Notons $y = z'\overline{z} \in \mathbb{C}$. Alors on peut écrire $y = a+ib$, avec a et b deux réels. Dès lors, $\operatorname{Re}(y)^2 = a^2 \leq a^2+b^2 = |y|^2$. Ainsi, $\operatorname{Re}(y) \leq |y|$. En remontant les équivalences, on a démontré l'inégalité triangulaire.

2. Soient z et z' tels que $|z+z'| = |z|+|z'|$. Écrivons de nouveau $y = z'\overline{z} = a+ib$. On fait la même chose que dans la question précédente, en remplaçant les $\leq$ par des $=$. On obtient $\operatorname{Re}(z'\overline{z}) = |z'\overline{z}|$, soit $a = \sqrt{a^2+b^2}$. Ainsi $b = 0$ et $a \geqslant 0$. Donc $y = z'\overline{z} \in \mathbb{R}_+$, autrement dit l'argument de y vaut 0 modulo 2π. Mais $\arg(y) = \arg(z') - \arg(z) \pmod{2\pi}$, donc z et z' ont même argument modulo 2π. Finalement z et z' sont positivement liés.

com09_s **Solution 3.5** (énoncé). On factorise par l'angle moitié : cela fait apparaître un cosinus.

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')/2}\left(e^{i(\theta-\theta')/2}+e^{i(\theta'-\theta)/2}\right) \\ &= e^{i(\theta+\theta')/2}\left(2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}\right). \end{aligned}$$

com06_s **Solution 3.6** (énoncé). 1. Comme x est de module 1, on a $1/x = \overline{x}$ (et de même respectivement pour y et z). Il ne reste plus qu'à factoriser l'expression par xyz :

$$\begin{aligned} xy+yz+xz &= xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \\ &= xyz\left(\overline{x+y+z}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. On a $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+xz) = 0$.

com01_s **Solution 3.7** (énoncé). Soit $z \neq 2$. On a

$$\begin{aligned} h(z) = 1 &\iff |z+1| = |z-2| \\ &\iff |z+1|^2 = |z-2|^2 \\ &\iff |z|^2+1+2\operatorname{Re}(z) = |z|^2+4-4\operatorname{Re}(z) \\ &\iff \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est la droite verticale d'abscisse 1/2. C'est la médiatrice des points d'affixes respectives -1 et 2.

On multiplie par la quantité conjuguée : pour tout $z \neq 2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} h(z) = 0 &\iff \operatorname{Re} \frac{z+1}{z-2} = 0 \\
&\iff \operatorname{Re} \frac{(z+1)(\overline{z}-2)}{|z-2|^2} = 0 \\
&\iff \operatorname{Re}(|z|^2 - 2z + \overline{z} - 2) = 0 \\
&\iff |z|^2 - 2 - \operatorname{Re}(z) = 0 \\
&\iff \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est le cercle centré en $1/2$ et de rayon $3/2$.

com03_s **Solution 3.8** (énoncé)**.** todo

com10_s **Solution 3.9** (énoncé)**.** On multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}
\frac{z+z'}{1+zz'} &= \frac{z+z'}{1+zz'} \times \frac{1+\overline{zz'}}{1+\overline{zz'}} \\
&= \frac{(z+z')(1+\overline{zz'})}{|1+zz'|^2} \\
&= \frac{z+z'+|z'|^2\overline{z}+|z|^2\overline{z'}}{|1+zz'|^2} \\
&= \frac{z+z'+\overline{z}+\overline{z'}}{|1+zz'|^2} \\
&= 2\frac{\operatorname{Re}(z+z')}{|1+zz'|^2}.
\end{aligned}$$

On obtient bien un réel.

com08_s **Solution 3.10** (énoncé)**.**

1. Soit $z \in H$. On veut montrer que $|f(z)| < 1$, ou encore $|z-i| < |z-(-i)|$. Géométriquement, cela revient à dire que z est plus proche de i que de $-i$ dans le plan complexe. Mais z est par hypothèse de partie imaginaire strictement positive, donc au-dessus de la médiatrice entre i et $-i$ (cette médiatrice est l'axe des abscisses). Donc z est plus proche de i, ce qu'on voulait démontrer.

   Autre solution, par le calcul : on écrit $z = x + iy$, où x et y sont les parties réelle et imaginaire de z. Alors

$$\begin{aligned}
|f(z)| < 1 &\iff |z-i| < |z+i| \\
&\iff |z-i|^2 < |z+i|^2 \\
&\iff x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 \\
&\iff y^2 - 2y + 1 < y^2 + 2y + 1 \\
&\iff y > 0,
\end{aligned}$$

   ce qui est vrai par hypothèse.

2. Pour montrer que $\widetilde{f}$ est bijective, on va trouver explicitement son inverse. Étant donnés $a \in H$ et $b \in D$, on résout l'équation $\widetilde{f}(a) = b$:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(a) = b &\iff f(a) = b \\ &\iff \frac{a-i}{a+i} = b \\ &\iff a - i = b(a+i) \\ &\iff a(1-b) = i(b+1) \\ &\iff a = i\frac{1+b}{1-b}. \end{aligned}$$

Définissons l'application $g\colon D \to H$ par

$$g(z) = i\frac{1+z}{1-z}.$$

Elle est bien définie car pour tout $|z| < 1$,

$$\begin{aligned} g(z) &= i\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} \\ &= i\frac{1 - 2\operatorname{Re}(z) + |z|^2}{|1-z|^2} \\ &= i\frac{(1-\operatorname{Re}(z))^2 + \operatorname{Im}(z)^2}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

est de partie imaginaire strictement positive. Les équivalences ci-dessus montrent que g est l'inverse de f, donc f est bijective.

com13_s **Solution 3.11** (énoncé). 1. Si n et p sont somme de deux carrés, il existe quatre entiers a, b, c, d tels que $n = a^2 + b^2$ et $p = c^2 + d^2$. Posons $z_n = a + ib$ et $z_p = c + id$, de sorte que $|z_n|^2 = n$ et $|z_p|^2 = p$. Alors

$$\begin{aligned} np &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= |z_n|^2 |z_p|^2 \\ &= |z_n z_p|^2 \\ &= |ac - bd + i(ad+bc)|^2 \\ &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2. \end{aligned}$$

Comme $ac - bd$ et $ad + bc$ sont des entiers, on a bien montré que np est somme de deux carrés.

2. On remarque que $1394 = 41 \times 34$, et que $41 = 5^2 + 4^2$, et $34 = 5^2 + 3^2$. Donc (on fait comme avant, mais on peut aussi directement appliquer la formule $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$:

$$\begin{aligned} 1394 &= (5^2+4^2)(5^2+3^2) \\ &= |(5+4i)(5+3i)|^2 \\ &= |13+35i|^2 \\ &= 13^2 + 35^2. \end{aligned}$$

com12_s **Solution 3.12** (énoncé)**.** On passe en complexes, puis on utilise la formule du binôme :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left((1+e^{i\theta})^n\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise la technique de l'angle moitié : plus précisément, on factorise dans la parenthèse par $e^{i\theta/2}$, ce qui fait apparaître du cosinus :

$$\begin{aligned} C_n &= \operatorname{Re}\left(e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})\right)^n \\ &= (2\cos(\theta/2))^n \operatorname{Re}\left(e^{in\theta/2}\right) \\ &= (2\cos(\theta/2))^n \cos(n\theta/2). \end{aligned}$$

com14_s **Solution 3.13** (énoncé)**.** On calcule la somme et le produit de A et B :

Somme. D'une part :

$$A+B = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6.$$

En ajoutant 1, on reconnaît la somme des racines septièmes de l'unité. Or cette somme est nulle. Donc $A+B=-1$.

Produit. D'autre part :

$$\begin{aligned} AB &= (\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6) \\ &= \omega^4(1+\omega+\omega^3)(1+\omega^2+\omega^3) \\ &= \omega^4(1+\omega+\omega^2+3\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6) \\ &= \omega^4(2\omega^3) \\ &= 2\omega^7 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc A et B sont les racines du polynôme $(X-A)(X-B) = X^2-(A+B)X+AB = X^2+X+2$: on a

$$A, B = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Comme A est de partie imaginaire strictement positive, on a

$$A = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$

com04_s **Solution 3.14** (énoncé)**.** todo

com02_s **Solution 3.15** (énoncé)**.** On montre (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv).

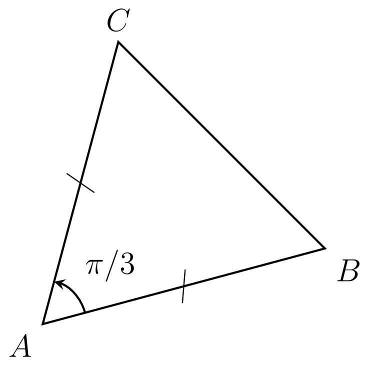
(i) $\iff$ (ii). Supposons que le triangle ABC est orienté dans le sens trigonométrique (voir figure 6). Il est équilatéral si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$. En termes complexes, c'est équivalent à :

$$\begin{aligned} c - a &= e^{i\pi/3}(b-a) \\ &= -j^2(b-a), \end{aligned}$$

ou encore à

$$c + j^2 b + ja = (1 + j^2 + j)a = 0.$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé la relation $1 + j + j^2 = 0$ (somme des racines troisièmes de l'unité). Si le triangle est orienté dans l'autre sens (A, C, B dans le sens trigonométrique), alors il est équilatéral si et seulement si $j^2 a + jb + c = 0$.



triangle FIGURE 6 – Triangle ABC

(ii) $\iff$ (iii). On multiplie les deux expressions :

$$\begin{aligned} (aj^2 + bj + c)(aj + bj^2 + c) &= a^2 + b^2 + c^2 + abj + abj^2 + acj^2 + acj + bcj + bcj^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc). \end{aligned}$$

La conclusion est immédiate.

(iii) $\iff$ (iv). On met tout au même dénominateur et on développe :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-b} + \frac{1}{a-c} = 0 &\iff (c-b)(a-c) + (a-c)(b-a) + (b-a)(c-b) = 0 \\ &\iff ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2 = 0 \\ &\iff ab + ac + bc = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

com17_s **Solution 3.16** (énoncé)**.** todo

4 Équations différentielles

ed01_s **Solution 4.1** (énoncé)**.** Ici, on a envie de diviser par x : le problème est que l'équation $y'(x) - \alpha y(x)/x = 0$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, mais sur $\mathbb{R}^*$ seulement. Il faut donc découper le problème en deux, résoudre l'équation sur chacun des deux intervalles et recoller.

On raisonne par analyse-synthèse. Soit f une solution de l'équation $xf'(x) - \alpha f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est solution de cette équation sur les deux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

- Sur $\mathbb{R}_-^*$, l'application $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$. Il existe donc une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x < 0, \quad f(x) = A\exp(\alpha \ln|x|) = A|x|^\alpha.$$

- De même, il existe une constante $B \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = Bx^\alpha.$$

Il est important de noter qu'a priori, les deux constantes A et B sont distinctes. L'analyse n'est pas finie, il reste des solutions à exclure, selon la valeur de α.

- Supposons que $\alpha < 0$. Comme f est continue en 0, en faisant tendre x vers 0 par valeurs positives, on en déduit que $B = 0$. De même, $A = 0$. Donc f est nulle sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que f est la fonction nulle, à nouveau par continuité en 0.
- Supposons que $\alpha = 0$. Alors f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, et par continuité en 0 on en déduit que f est une fonction constante.
- Supposons que $0 < \alpha < 1$. Alors f est continue en 0, donc $f(0) = 0$. Mais f est aussi dérivable en 0. Calculons la limite du taux d'accroissement à droite :

$$\begin{aligned}\frac{f(h) - f(0)}{h} &= \frac{Bh^\alpha}{h} \\ &= Bh^{\alpha - 1} \\ &\xrightarrow[h \to 0^+]{} f'(0),\end{aligned}$$

  ce qui implique $B = 0$, car $\alpha - 1 < 0$. De même, $A = 0$ et par continuité en 0, f est la fonction nulle.
- Supposons qur $\alpha = 1$. On a comme avant $f(0) = 0$. Calculons le taux d'accroissement à droite :

$$\begin{aligned}\frac{f(h) - f(0)}{h} &= \frac{Bh}{h} \\ &= B \\ &\xrightarrow[h \to 0^+]{} f'(0),\end{aligned}$$

  donc $f'(0) = B$. De même à gauche, $f'(0) = -A$. Donc $B = -A$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Bx$.
- Supposons que $\alpha > 1$. Par continuité en 0, $f(0) = 0$ et il n'y a rien de plus à dire.

Il reste à faire la synthèse, c'est-à-dire vérifier que toutes les fonctions qu'on a trouvées sont bien des solutions.

— Lorsque $\alpha < 0$, on vérifie que la fonction nulle est solution de (4.1).

— Lorsque $\alpha = 0$, on vérifie que les fonctions constantes sont solutions de (4.1).

— Lorsque $0 < \alpha < 1$, on vérifie que la fonction nulle est solution de (4.1).

— Lorsque $\alpha = 1$, on vérifie que les fonctions de la forme $(x \mapsto Bx)$ pour $B \in \mathbb{R}$ sont solutions de (4.1).

— Lorsque $\alpha > 1$, on prend $A, B \in \mathbb{R}$ et on définit f la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x < 0, f(x) = A|x|^\alpha$, $\forall x > 0, f(x) = Bx^\alpha$ et $f(0) = 0$. Alors f est continue et f vérifie l'équation différentielle (4.1) sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à montrer qu'elle vérifie (4.1) en 0. Pour cela, on calcule le taux d'accroissement à droite :

$$\begin{aligned}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \frac{Bh^\alpha}{h} \\ &= Bh^{\alpha-1} \\ &\xrightarrow[h\to 0^+]{} 0.\end{aligned}$$

De même à gauche, cela montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Conclusion : f est bien solution.

ed02_s **Solution 4.2** (énoncé). 1. Soit $y \in \,]0, +\infty[$. Dérivons la relation (4.2) par rapport à x. On obtient

$$\forall x, y \in \,]0, +\infty[, \quad yf'(xy) = f(y) + yf'(x).$$

Ce qui donne, en prenant $x = 1$:

$$\forall y \in \,]0, +\infty[, \quad yf'(y) = f(y) + yf'(1).$$

En posant $k = f'(1)$, on obtient l'équation différentielle (4.3).

2. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : soit f une solution de (4.2) dérivable sur $]0, +\infty[$. D'après la question précédente, f vérifie alors l'équation différentielle (4.3) sur $]0, +\infty[$. On peut la réécrire en

$$\forall y \in \,]0, +\infty[, \quad f'(y) = \frac{f(y)}{y} + k. \tag{4.1}$$ ed02:eqd

On résout cette équation différentielle : les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y \mapsto A\exp(\ln y) = Ay$, où $A \in \mathbb{R}$ est une constante. Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de variation des constantes. Soit $A \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application dérivable, et $\varphi(y) = A(y)y$ définie sur $]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}\varphi \text{ est solution de l'équation (4.1)} &\iff \forall y \in \,]0, +\infty[, \quad \varphi'(y) = \frac{\varphi(y)}{y} + k \\ &\iff \forall y \in \,]0, +\infty[, \quad A'(y)y + A(y) = A(y) + k \\ &\iff \forall y \in \,]0, +\infty[, \quad A'(y) = \frac{k}{y}.\end{aligned}$$

En prenant $A(y) = k\ln(y)$, on obtient une solution particulière de (4.1) : $\varphi(y) = ky\ln(y)$. Conclusion : f est de la forme $f(y) = Ay + ky\ln(y)$, où $A \in \mathbb{R}$ est une constante, et pour $y \in \,]0, +\infty[$.

Prenons $x = y = 1$ dans l'équation fonctionnelle (4.2) :

$$f(1) = 2f(1),$$

donc $f(1) = 0$. Mais d'après ce qu'on a vu, on a aussi $f(1) = A + k\ln(1) = A$. Donc $A = 0$. Il reste à regarder ce qui se passe pour y strictement négatif. Pour cela, prenons $x = y$ dans l'équation fonctionnelle (4.2) :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y^2) = 2yf(y).$$

Or $y^2 > 0$, donc $2yf(y) = f(y^2) = ky^2 \ln(y^2)$, autrement dit

$$\forall y < 0, \quad f(y) = ky \ln |y|.$$

Conclusion : il existe une constante k telle que $\forall y \neq 0,\ f(y) = ky \ln |y|$, et $f(0) = 0$.
Il reste à faire la synthèse : toutes les fonctions décrites ci-dessus vérifient bien l'équation fonctionnelle (4.2) et sont dérivables sur $]0, +\infty[$, donc on a terminé.

3. On fait un changement de variable en posant $u = t/x$: si $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} F(xy) &= \int_0^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{y} f(xu)x\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{y} (xf(u) + uf(x))x\,\mathrm{d}u \\ &= x^2 \int_0^{y} f(u)\,\mathrm{d}u + xf(x) \int_0^{y} u\,\mathrm{d}u \\ &= x^2 F(y) + xf(x)\frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

4. Si f est une solution de (4.2), alors pour $x > 0$ on a (en prenant $y = 1$ dans (4.4)) :

$$f(x) = \frac{2}{x}(F(x) - x^2 F(1)).$$

Comme F est dérivable sur $]0, +\infty[$, f l'est aussi. Finalement, les solutions de (4.2) sont les $y \mapsto ky \ln |y|$, pour $k \in \mathbb{R}$.

ed03_s **Solution 4.3** (énoncé).

1. La fonction tan est solution.
2. Soit $g = \arctan f$. C'est une fonction dérivable sur $]a, b[$ et

$$\begin{aligned} g' &= f' \frac{1}{1 + f^2} \\ &= \frac{1 + f^2}{1 + f^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in\,]a, b[, \quad g(x) = x + \lambda,$$

ce qui donne en repassant à f :

$$\forall x \in\,]a, b[, \quad f(x) = \tan(x + \lambda).$$

3. Les solutions de (4.5) sont les $x \mapsto \tan(x + \lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que :

$$\forall x \in\,]a, b[, \quad x + \lambda \notin \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Les λ vérifiant cette condition forment une réunion infinie de segments de longueur $\pi - (b - a)$ (faire un dessin). En particulier, si $b - a > \pi$, l'équation n'admet pas de solution. Si $b - a = \pi$, l'équation admet une seule solution, qui est une translation de la fonction tan.

ed04_s **Solution 4.4** (énoncé)**.** On commence par résoudre l'équation (4.6) sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est équivalente à

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -\frac{\sin(x)}{x}, \tag{4.2}$$ ed04:2

ce qui permet de donner la forme des solutions de l'équation homogène :

$$x \mapsto \frac{k}{x},$$

avec $k \in \mathbb{R}$. On applique ensuite la méthode de variation de la constante : si l'on prend $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $y\colon x \mapsto k(x)/x$, alors

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de l'équation (4.2)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{xk'(x) - k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x^2} = -\frac{\sin(x)}{x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad k'(x) = -\sin(x).
\end{aligned}$$

La fonction $k\colon x \mapsto \cos(x)$ étant une primitive de $-\sin$, cela nous donne une solution particulière de (4.2), à savoir $x \mapsto \cos(x)/x$. Les solutions de ((4.2)) sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{k + \cos(x)}{x}.$$

Passons maintenant à la résolution sur $\mathbb{R}$. On raisonne par analyse-synthèse. Soit y une solution de (4.6) sur $\mathbb{R}$. En particulier, y est solution de (4.2) sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe donc une constante L telle que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = \frac{L + \cos(x)}{x}.$$

De la même manière, y est solution de (4.2) sur $\mathbb{R}_-^*$. On peut vérifier qu'il existe une constante K telle que

$$\forall x < 0, \quad y(x) = \frac{K + \cos(x)}{x}.$$

D'autre part, l'équation (4.6) évaluée en 0 nous indique que $y(0) = 0$. Or la fonction y est nécessairement continue en 0, ce qui montre que (par exemple)

$$\frac{K + \cos(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x) - 1}{x} &= \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x} \\
&\xrightarrow[x \to 0^+]{} \cos'(0) = 0.
\end{aligned}$$

En faisant la différence, on obtient

$$\frac{1 + K}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0,$$

ce qui implique que $K = -1$. De même, on trouve $L = -1$ et cela nous donne l'expression de la fonction y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il reste à faire la synthèse, c'est-à-dire vérifier que la fonction y trouvée plus haut est bien solution de l'équation (4.6). Sur $\mathbb{R}^*$, il n'y a pas de problème. Il faut par contre vérifier que y est dérivable en 0. Calculons le taux d'accroissement : si $x \neq 0$, alors

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{\cos(x) - 1}{x^2}.$$

Cette limite peut se calculer en effectuant le changement de variable $\theta = x/2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \frac{\cos(2\theta) - 1}{(2\theta)^2} \\
&= \frac{1 - 2\sin^2(\theta) - 1}{4\theta^2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\theta) - \sin(0)}{\theta}\right)^2 \\
&\xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}(\cos'(0))^2 = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion : y est dérivable en 0 et $y'(0) = -1/2$. Cela permet de vérifier que (4.6) est bien vérifiée en 0, et finalement y est l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

ed05_s **Solution 4.5** (énoncé)**.** Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$x \mapsto ke^{ax},$$

où $k \in \mathbb{C}$. On applique ensuite la méthode de variation de la constante : si l'on prend $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et $y\colon x \mapsto k(x)e^{ax}$, alors

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de l'équation (4.7)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - ay(x) = f(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (k'(x) + ak(x))e^{ax} - ak(x)e^{ax} = f(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad k'(x) = f(x)e^{-ax}.
\end{aligned}$$

La fonction

$$k\colon x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t$$

satisfait à la condition ci-dessus (remarque : la borne inférieure est prise arbitrairement égale à 0), ce qui nous donne la forme générale des solution de l'équation (4.7) :

$$y_k\colon x \mapsto \left(k + \int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t\right)e^{ax},$$

où $k \in \mathbb{C}$.

Soit $y_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une solution de (4.7). Posons

$$g\colon x \mapsto (y_k(x+T) - y_k(x))e^{-ax},$$

de sorte que y_k est T-périodique si et seulement si g est identiquement nulle. On peut écrire g sous forme intégrale : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \left(k + \int_0^{x+T} f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t\right)e^{aT} - \left(k + \int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(e^{aT} - 1\right)k + e^{aT}\int_0^{x+T} f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{aT} f(x+T) e^{-a(x+T)} - f(x) e^{-ax} \\ &= (f(x+T) - f(x)) e^{-ax} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, g est une fonction constante. Donc y_k est T-périodique si et seulement si $g(0) = 0$, soit encore

$$y_k(0) = y_k(T).$$

Or

$$\begin{aligned} y(T) = y(0) &\iff \left(k + \int_0^T f(t) e^{-at} \, \mathrm{d}t\right) e^{aT} = k \\ &\iff \left(e^{aT} - 1\right) k + e^{aT} \int_0^T f(t) e^{-at} \, \mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

On peut donc conclure :

- Si $e^{aT} = 1$, il y a
  - — 0 solution T-périodique si $\int_0^T f(t) \exp(-at) \, \mathrm{d}t \neq 0$
  - — une infinité de solutions T-périodiques si $\int_0^T f(t) \exp(-at) \, \mathrm{d}t = 0$ (en fait, toutes les solutions sont T-périodiques)
- Si $e^{aT} \neq 1$, on a

  $$\begin{aligned} y(T) = y(0) &\iff \left(e^{aT} - 1\right) k + e^{aT} \int_0^T f(t) e^{-at} \, \mathrm{d}t = 0 \\ &\iff k = \frac{e^{aT}}{1 - e^{aT}} \int_0^T f(t) e^{-at} \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

  et il y a donc exactement une solution T-périodique.

Remarque : $e^{aT} = 1$ si et seulement si $a \in \dfrac{2i\pi}{T}\mathbb{Z} = \left\{\dots, -\dfrac{2i\pi}{T}, 0, \dfrac{2i\pi}{T}, \dfrac{4i\pi}{T}, \dots\right\}$.

ed06_s **Solution 4.6** (énoncé)**.** On définit l'équation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{4.3}$$ ed06:1

- Supposons que $a^2 - 4b > 0$. Alors l'équation (4.3) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, qui valent respectivement $(-a - \sqrt{a^2 - 4b})/2$ et $(-a + \sqrt{a^2 - 4b})/2$. L'équation différentielle admet donc pour solutions les fonctions de la forme

  $$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},$$

  où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Or l'application $x \mapsto e^{rx}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $r \leqslant 0$. Ainsi, toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si

  $$r_1 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad r_2 \leqslant 0.$$

Pour repasser à une condition sur (a, b), il suffit de remarquer que $r_1 < r_2$, et donc

$$\begin{aligned}\begin{cases} r_1 \leqslant 0 \\ r_2 \leqslant 0 \end{cases} &\iff r_2 \leqslant 0 \\ &\iff \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \leqslant 0 \\ &\iff \sqrt{a^2-4b} \leqslant a \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{a^2-4b} \leqslant a \\ a \geqslant 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2-4b \leqslant a^2 \\ a \geqslant 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

- Supposons que $a^2 - 4b = 0$. Alors l'équation (4.3) a une unique solution $r = -a/2$. L'équation différentielle admet donc pour solutions les fonctions de la forme

$$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour que toutes ces fonctions soient bornées, il faut et il suffit que $r < 0$, autrement dit $a > 0$.
- Supposons que $a^2 - 4b < 0$. Alors l'équation (4.3) a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$, avec $u \in \mathbb{R}$ et $v > 0$. L'équation différentielle admet donc pour solutions les fonctions de la forme

$$x \mapsto e^{ux}(\lambda \cos(vx) + \mu \sin(vx)),$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Toutes ces solutions sont bornées si et seulement si $u \leqslant 0$. Or

$$u = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{a}{2},$$

donc il faut et il suffit que $a \geqslant 0$.

Finalement, les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

ed07_s **Solution 4.7** (énoncé)**.** L'équation est équivalente à

$$y'(x) + \frac{x}{x^2+1} y(x) = \frac{1}{x^2+1}. \tag{4.4}$$ ed07:1

On résout l'équation homogène : les solutions de $y'(x) + \dfrac{x}{x^2+1} y(x) = 0$ sont de la forme

$$x \mapsto A \exp\left(-\frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right)\right) = A\left(x^2+1\right)^{-1/2}.$$

Pour trouver une solution particulière à l'équation (4.4), on utilise la méthode de variation des constantes : soit $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable, et $y(x) = A(x)\,(x^2+1)^{-1/2}$ définie sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de l'équation (4.4)} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + \frac{x}{x^2+1} y(x) = \frac{1}{x^2+1} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad A'(x)\left(x^2+1\right)^{-1/2} - A(x)\frac{1}{2}2x\left(x^2+1\right)^{-3/2} \\
& \qquad\qquad + \frac{x}{x^2+1}A(x)\left(x^2+1\right)^{-1/2} = \frac{1}{x^2+1} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad A'(x)\left(x^2+1\right)^{-1/2} = \frac{1}{x^2+1} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad A'(x) = \left(x^2+1\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

Or la fonction argsh est une primitive de $x \mapsto 1/\sqrt{x^2+1}$. D'après les équivalences ci-dessus, l'application $x \mapsto \operatorname{argsh}(x)\,(x^2+1)^{-1/2}$ est donc une solution particulière de (4.7). Conclusion : les solutions de (4.4) sont de la forme

$$x \mapsto \frac{\operatorname{argsh}(x) + A}{\sqrt{x^2+1}},$$

où $A \in \mathbb{R}$ est une constante.

ed08_s **Solution 4.8** (énoncé)**.** L'équation est équivalente à

$$y'(x) - \frac{x}{x^2+1}y(x) = \left(x^2+1\right)^{1/2}. \tag{4.5}$$ ed08:1

On résout l'équation homogène : les solutions de $y'(x) - \dfrac{x}{x^2+1}y(x) = 0$ sont de la forme

$$x \mapsto A\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right) = A\left(x^2+1\right)^{1/2}.$$

Pour trouver une solution particulière à l'équation (4.5), on utilise la méthode de variation des constantes : soit $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable, et $y(x) = A(x)\,(x^2+1)^{1/2}$ définie sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de l'équation (4.5)} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - \frac{x}{x^2+1} y(x) = \left(x^2+1\right)^{1/2} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad A'(x)\left(x^2+1\right)^{1/2} + A(x)\frac{1}{2}2x\left(x^2+1\right)^{-1/2} \\
& \qquad\qquad - \frac{x}{x^2+1}A(x)\left(x^2+1\right)^{1/2} = \left(x^2+1\right)^{1/2} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad A'(x)\left(x^2+1\right)^{1/2} = \left(x^2+1\right)^{1/2} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad A'(x) = 1.
\end{aligned}$$

En particulier, l'application $A(x) = x$ convient. D'après les équivalences ci-dessus, l'application $x \mapsto x\,(x^2+1)^{1/2}$ est donc une solution particulière de (4.5). Conclusion : les solutions de (4.5) sont de la forme

$$x \mapsto (x+A)\sqrt{x^2+1},$$

où $A \in \mathbb{R}$ est une constante.

ed09_s **Solution 4.9** (énoncé)**.** On considère l'équation sur $\mathbb{R}$

$$(e^x - 1)y'(x) + e^x y(x) = 1. \tag{4.6}$$ ed09:1

On a envie de diviser par $e^x - 1$ pour obtenir l'équation

$$y'(x) + \frac{e^x}{e^x-1}y(x) = \frac{1}{e^x-1}, \tag{4.7}$$ ed09:2

mais cette équation n'est pas définie en 0. Comme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas un intervalle, il faut raisonner par analyse-synthèse.

Analyse Soit y une solution de l'équation (4.6) sur $\mathbb{R}$. Alors en particulier, y vérifie l'équation différentielle (4.7) sur $]-\infty, 0[$. Résolvons l'équation homogène (on se place ici sur $]-\infty, 0[$) : $x \mapsto -\ln|e^x - 1|$ est une primitive de $x \mapsto -e^x/(e^x-1)$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto A\exp(-\ln|e^x-1|) = A/(1-e^x)$, où A est une constante. Pour trouver une solution particulière à l'équation (4.7), on utilise la méthode de variation des constantes : soit $A\colon]-\infty,0[\to \mathbb{R}$ une application dérivable, et $g(x) = A(x)/(1-e^x)$ définie elle aussi sur $]-\infty, 0[$. Alors

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution de (4.7)} &\iff \forall x<0,\quad g'(x) + \frac{e^x}{e^x-1}g(x) = \frac{1}{e^x-1}\\
&\iff \forall x<0,\quad A'(x)\frac{1}{1-e^x} + A(x)\frac{e^x}{(1-e^x)^2}\\
&\qquad\qquad + \frac{e^x}{e^x-1}A(x)\frac{1}{1-e^x} = \frac{1}{e^x-1}\\
&\iff \forall x<0,\ A'(x)\frac{1}{1-e^x} = \frac{1}{e^x-1}\\
&\iff \forall x<0,\ A'(x) = -1.
\end{aligned}$$

L'application $A(x) = -x$ convient, ce qui nous donne une solution particulière de (4.7) : $g(x) = -x/(1-e^x)$. Ainsi, il existe une constante A telle que

$$\forall x<0,\quad y(x) = \frac{A}{1-e^x} + \frac{-x}{1-e^x} = \frac{A-x}{1-e^x}.$$

On fait la même chose sur $]0, +\infty[$: il existe une constante B telle que

$$\forall x>0,\quad y(x) = \frac{B-x}{1-e^x}.$$

Il est important de noter qu'a priori, les deux constantes A et B sont distinctes. L'équation (4.6) évaluée en 0 donne $y(0) = 1$. Comme $(e^x-1)/x \to 1$ lorsque x tend vers 0, et que y est continue en 0, on a nécessairement $A = B = 0$. Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0\\ 1 & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Synthèse Il suffit de vérifier que la fonction définie au-dessus est dérivable en 0 et vérifie l'équation différentielle (4.6) en $x = 0$. Pour cela, on calcule la limite du taux d'accroissement en 0 : lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}\frac{y(x)-y(0)}{x} &= \frac{x+1-e^x}{x(e^x-1)} \\ &= \frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

donc y est dérivable en 0 et c'est bien une solution de (4.6).

5 Arithmétique des entiers

ent01_s **Solution 5.1** (énoncé)**.** Notons $x = 7^{7^7}$. On cherche alors le résidu de 7^x modulo 10. Remarquons que $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$, d'où $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Il nous suffit donc de connaître le résidu de x modulo 4. On recommence : $7 \equiv -1 \pmod 4$ donne $7^2 \equiv 1 \pmod 4$, et il suffit alors de connaître le résidu de 7^7 modulo 2. Mais ça, c'est facile, parce que 7^7 est impair. Ainsi

$$7^{7^7} \equiv 7^{2k+1} \equiv 7 \equiv 3 \pmod 4,$$

et donc

$$7^x \equiv 7^{4k'+3} \equiv 7^3 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}.$$

ent02_s **Solution 5.2** (énoncé)**.** On démontre par récurrence forte sur n la propriété

$$\mathcal{P}(n) \colon \text{« } \varphi(n) = n \text{ ».}$$

L'initialisation ne pose pas de problème. Soit maintenant $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n-1)$ sont vraies. On a donc

$$\varphi(k) = k$$

pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Comme φ est injective, $\varphi(n)$ est différent de tous les $\varphi(k)$ pour $k \leqslant n-1$. Autrement dit,

$$\varphi(n) > n-1.$$

Comme de plus $\varphi(n) \leqslant n$, cela montre que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

ent03_s **Solution 5.3** (énoncé)**.** On commence par le sens indirect. Notons k le rang à partir duquel les décimales de x sont périodiques et $u_1, u_2, \dots, u_p$ les décimales formant une période. Autrement dit, on a

$$10^k x = n + 0{,}\overline{u_1u_2u_3\dots u_p}$$

où n est un entier relatif, et $u_i \in \{0, \dots, 9\}$. Notons

$$\alpha = 0{,}\overline{u_1u_2u_3\dots u_p},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}10^p\alpha &= u_1u_2\dots u_p{,}\overline{u_1u_2u_3\dots u_p} \\ &= u_1u_2\dots u_p + \alpha,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\alpha = \frac{u_1 u_2 \dots u_p}{10^p - 1}.$$

Cela suffit pour montrer que x est rationnel. Par exemple, $0{,}127272727\dots = \frac{7}{55}$.

Passons à présent au sens direct. Si $x \in \mathbb{Q}$, on peut écrire $x = n + \frac{a}{b}$ où n est un entier relatif et $0 \leqslant a < b$ sont des entiers. Essayons de formaliser l'algorithme de division qu'on connait depuis longtemps. On effectue la division euclidienne de $10a$ par b : il existe $u_1 \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r_1 \leqslant b-1$ tels que

$$10a = u_1 b + r_1.$$

Au passage, remarquons que $u_1 = \dfrac{10a - r_1}{b} \leqslant \dfrac{10a}{b} < 10$, donc u_1 est un entier compris entre 0 et 9. On recommence en effectuant la division euclidienne de $10r_1$ par b : il existe $u_2 \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r_2 \leqslant b-1$ tels que

$$10r_1 = u_2 b + r_2.$$

Ainsi de suite, on définit deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(r_n)_{n\geq 1}$, avec pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&10r_n = u_{n+1} b + r_{n+1},\\
&u_n \in \{0, \dots, 9\},\\
&r_n \in \{0, \dots, b-1\}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{u_1 b + r_1}{10b}\\
&= \frac{u_1}{10} + \frac{r_1}{10b}\\
&= \frac{u_1}{10} + \frac{u_2 b + r_2}{100b}\\
&= \frac{u_1}{10} + \frac{u_2}{100} + \frac{r_2}{100b},\\
&\vdots\\
&= \frac{u_1}{10} + \frac{u_2}{100} + \dots + \frac{u_n}{10^n} + \frac{r_n}{10^n b},
\end{aligned}$$

etc. On reconnaît l'écriture décimale de a/b :

$$\frac{a}{b} = 0, u_1 u_2 u_3 \dots.$$

Il reste à expliquer pourquoi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang. $(r_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite à valeurs dans $\{0, \dots, b-1\}$ qui est un ensemble fini. Il existe donc $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ tels que

$$r_n = r_{n+p}.$$

Mais la division euclidienne de $10r_n$ par b définit un couple (u_{n+1}, r_{n+1}) qui est unique : en particulier, $r_{n+1} = r_{n+p+1}$. On réitère le procédé : par récurrence, on obtient

$$\forall k \geqslant 0, \quad r_{n+k} = r_{n+p+k}$$

ce qui montre que la suite $(r_{n+k})_{n\leqslant 1}$ est p-périodique. On en déduit que u_{n+k} est p-périodique grâce à la relation $10r_n = u_{n+1} b + r_{n+1}$.

ent04_s **Solution 5.4** (énoncé). 1. On raisonne par analyse-synthèse (bien que seule la synthèse soit utile ici : on ne demande pas de trouver toutes les solutions). Supposons que $x \neq y$ sont des entiers tels que $x, y > a$ et

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Alors $y = xa/(x-a)$. En particulier, comme y est un entier, $x - a$ divise xa. On peut maintenant procéder à la synthèse : on cherche un x entier (strictement supérieur à a) tel que $x - a$ divise xa. Il faut penser à $x = a + 1$. Cela donne $y = a(a+1)$ et il suffit à présent de vérifier que

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$$

et que $a + 1 \neq a(a+1)$, ce qui est vrai.

2. On montre cette propriété par récurrence. L'initialisation est vérifiée car

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Supposons qu'il existe $u_1 < \cdots < u_n$ tels que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}.$$

On pose alors

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, \\ v_2 &= u_2, \\ &\vdots \\ v_{n-1} &= u_{n-1}, \\ v_n &= u_n + 1, \\ v_{n+1} &= u_n(u_n+1), \end{aligned}$$

de sorte que

$$1 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{v_k}.$$

Par récurrence sur n, on a bien ce qu'on voulait.

3. On démontre par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$: « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il n'existe qu'un nombre fini de n-uplets $(u_1, \ldots, u_n)$ d'entiers positifs tels que $u_1 < \cdots < u_n$ et $x = \sum_{k=1}^{n} 1/u_k$ ». L'initialisation à $\mathcal{P}(1)$ ne pose pas de problème. Soit maintenant $n \geqslant 1$; on suppose $\mathcal{P}(n-1)$ vraie. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et notons

$$X = \left\{ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n / u_1 < \cdots < u_n \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = x \right\}.$$

On veut montrer que X est fini. Remarquons d'abord que si $(u_1, \ldots, u_n) \in X$, on a

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_1} \\ &= \frac{n}{u_1}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $u_1 \leqslant n/x$. Fixons alors un entier N vérifiant $N \geqslant n/x$ et définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n / u_1 = 1, u_1 < \cdots < u_n \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = x\right\}, \\ X_2 &= \left\{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n / u_1 = 2, u_1 < \cdots < u_n \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = x\right\}, \\ &\vdots \\ X_N &= \left\{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n / u_1 = N, u_1 < \cdots < u_n \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = x\right\}, \end{aligned}$$

D'après la remarque précédente,

$$X = \bigcup_{i=1}^N X_i.$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, chaque ensemble X_i est fini. Par réunion finie, X est également fini ce qui achève la démonstration.

ent05_s **Solution 5.5** (énoncé)**.** On a

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-1}).$$

Supposons que $a \equiv b \pmod n$. Alors pour tout $k \geqslant 1$,

$$a^k \equiv b^k \pmod n,$$

d'où

$$a^k b^{n-k} \equiv b^n \pmod n.$$

On a alors

$$a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-1} \equiv nb^{n-1} \equiv 0 \pmod n,$$

ce qui permet de conclure que

$$a^n - b^n \equiv 0 \pmod{n^2}.$$

ent06_s **Solution 5.6** (énoncé)**.** Mettons le trinôme sous forme canonique. On a

$$n^2 + n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Évidemment, on fait de l'arithmétique, ce qui veut dire qu'on s'interdit d'écrire des fractions. $1/2$ désigne en fait un entier y tel que $2y = 1 \pmod{13}$ (on dit que y est un inverse de 2 modulo 13). Comme $y = 7$ convient, on peut réécrire l'équation :

$$\begin{aligned} & n^2 + n + 7 \equiv 0 \pmod{13} \\ \iff \quad & (n+7)^2 - 49 + 7 \equiv 0 \pmod{13} \\ \iff \quad & (n+7)^2 - 3 \equiv 0 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Or

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

De la même manière, $\sqrt{3}$ désigne ici un entier y tel que $y^2 \equiv 3 \pmod{13}$. Ici, $y = 4$ convient, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
& (n+7)^2 - 3 \equiv 0 \pmod{13} \\
\iff\quad & (n+7)^2 - 4^2 \equiv 0 \pmod{13} \\
\iff\quad & (n+3)(n+11) \equiv 0 \pmod{13} \\
\iff\quad & (n+3)(n+11) \equiv 0 \pmod{13} \\
\iff\quad & n+3 \equiv 0 \pmod{13} \quad \text{ou} \quad n+11 \equiv 0 \pmod{13} \\
\iff\quad & n \equiv 10 \pmod{13} \quad \text{ou} \quad n \equiv 2 \pmod{13}.
\end{aligned}
$$

Bien sûr, on pouvait aussi calculer tous les résidus de $n^2 + n + 7$ modulo 13, pour n allant de 0 à 12.

ent07_s **Solution 5.7** (énoncé)**.** En prenant les logarithmes, on obtient

$$m^n = n^m \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}.$$

L'application $f\colon x \mapsto \ln x/x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et sur cet intervalle sa dérivée est $f'\colon x \mapsto (1 - \ln x)/x^2$. Cela nous permet de tracer le tableau de variations de f (voir figure 7).

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

nt07:var FIGURE 7 – Variations de f

Soient m et n deux entiers tels que $f(m) = f(n)$. On procède par cas :

- Si $m \geqslant 3$ et $n \geqslant 3$, alors $m = n$ (car f est strictement monotone, donc injective sur $[e, +\infty[$).
- Si $m = 1$, alors $1^n = n^1$ donc $n = 1$.
- Si $m = 2$, alors $f(n) = f(2) = \ln 2/2$, et il y a exactement deux solutions à cette équation (voir le tableau de variations). Comme 2 et 4 sont solutions, on en déduit que ce sont les seules : n vaut 2 ou 4.
- Si $n = 1$ ou 2, c'est la même chose par symétrie.

Les solutions sont donc des éléments de

$$\{(2,4), (4,2)\} \cup \{(n,n) : n \geqslant 1\}.$$

Comme les éléments de cet ensemble sont tous solutions, on a résolu l'équation.

ent08_s **Solution 5.8** (énoncé). On raisonne par l'absurde et on suppose que A est un ensemble fini. On définit

$$c = \sup(A \cup \sigma(A))$$

et $f\colon [\![0, c]\!] \to [\![0, c]\!]$ l'application

$$f : n \mapsto \sigma(n).$$

Alors

- f est bien définie.
  Preuve : soit $n \in [\![0, c]\!]$. Si $n \in A$, alors $\sigma(n) \leqslant \sup(\sigma(A)) \leqslant c$. Si $n \notin A$, alors $\sigma(n) < n \leqslant c$ par définition. Cela montre bien que $\sigma(n) \in [\![0, c]\!]$.
- f est bijective.
  Preuve : f est injective car c'est la restriction d'une fonction injective. Or une application d'un ensemble fini dans lui-même est injective si et seulement si elle est surjective. Cela montre que f est bijective.

À présent, on regarde $\sigma(c+1)$: comme $c + 1 > \sup(A)$, $c + 1 \notin A$ donc $\sigma(c+1) < c+1$, ou encore

$$\sigma(c+1) \in [\![0, c]\!].$$

Par surjectivité de f, il existe $n \in [\![0, c]\!]$ tel que

$$f(n) = \sigma(c+1),$$

ce qui est impossible car $f(n) = \sigma(n)$.

6 Dénombrement

den08_s **Solution 6.1** (énoncé). 1. Notons

$$\begin{aligned} A &= \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}, \\ B &= \{(i,j) \mid 1 \leq i = j \leq n\}, \\ C &= \{(i,j) \mid 1 \leq j < i \leq n\}. \end{aligned}$$

Il est clair que A et C ont le même cardinal, et que B est de cardinal n. De plus, A, B et C forment une partition de

$$\{(i,j) \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n\}$$

qui est de cardinal n^2. On en déduit que

$$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) = n^2,$$

soit encore

$$2\,\mathrm{Card}(A) + n = n^2.$$

Finalement A est de cardinal $(n(n-1))/2$.

2. Avec les mêmes notations, le cardinal de $\{(i,j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\} = A \cup B$ vaut

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

den09_s **Solution 6.2** (énoncé). 1. Notons $\Delta \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E ne contenant pas a, et Γ l'ensemble des parties contenant a. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Delta &\to \Gamma \\ X &\mapsto X \cup \{a\} \end{aligned}$$

est bijective (son inverse est l'application $X \mapsto X \setminus \{a\}$). Il y a donc autant de parties contenant a que de parties ne contenant pas a.

2. On note Δ_p (resp. Δ_i) l'ensemble des parties de E ne contenant pas a et de cardinal pair (resp. impair). De même pour Γ_p et Γ_i. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Delta_p &\to \Gamma_i \\ X &\mapsto X \cup \{a\} \end{aligned}$$

est une bijection d'inverse $X \mapsto X \setminus \{a\}$. Donc Δ_p et Γ_i ont même cardinal.

3. Comme Δ_p, Δ_i, Γ_p et Γ_i sont disjoints, on peut écrire

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}(\Gamma_p \cup \Delta_p) &= \operatorname{Card} \Gamma_p + \operatorname{Card} \Delta_p \\ &= \operatorname{Card} \Delta_i + \operatorname{Card} \Delta_p \\ &= \operatorname{Card} \Delta. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}(\Gamma_i \cup \Delta_i) &= \operatorname{Card} \Gamma_i + \operatorname{Card} \Delta_i \\ &= \operatorname{Card} \Gamma_i + \operatorname{Card} \Gamma_p \\ &= \operatorname{Card} \Gamma. \end{aligned}$$

Or on sait d'après la première question que Γ et Δ ont le même cardinal. Donc $\Gamma_p \cup \Delta_p$ et $\Gamma_i \cup \Delta_i$ ont le même cardinal, autrement dit il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair (donc 2^{n-1} car il y a 2^n parties en tout).

4. L'ensemble des parties de cardinal pair est la réunion disjointe pour k pair allant de 0 à n de l'ensemble des parties de cardinal k. En prenant les cardinaux, on obtient

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

5. On remarque que pour k compris entre 0 et n,

$$\binom{n}{k} + (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 2\binom{n}{k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Par ailleurs, d'après la formule du binome,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

On retrouve bien l'égalité

$$\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

den07_s **Solution 6.3** (énoncé). 1. Une partie $Y \subset E$ disjointe de X est exactement une partie de $E \setminus X$. On cherche donc le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus X)$ qui vaut 2^{n-p}, car $E \setminus X$ est de cardinal $n-p$.

2. Le cardinal qu'on cherche est égal à

$$\sum_{X \subset E} \operatorname{Card}\{Y \subset E \mid X \cap Y = \varnothing\},$$

soit, d'après la question précédente,

$$\sum_{X \subset E} 2^{n-\operatorname{Card}(X)}.$$

Or il y a $\binom{n}{k}$ parties de E de cardinal k. On sépare la somme selon le cardinal de X, puis on utilise la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\sum_{X \subset E} 2^{n-\operatorname{Card}(X)} &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \subset E\\ \operatorname{Card} X = k}} 2^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\\ &= (1+2)^n\\ &= 3^n.\end{aligned}$$

den03_s **Solution 6.4** (énoncé). On utilise des partitions naturelles et la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\} &= \sum_{B \subset E} \operatorname{Card}\{A \in \mathcal{P}(E) / A \subset B\}\\ &= \sum_{B \subset E} \operatorname{Card}(\mathcal{P}(B))\\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{B \subset E\\ \operatorname{Card} B = k}} \operatorname{Card}(\mathcal{P}(B))\\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{B \subset E\\ \operatorname{Card} B = k}} 2^k\\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{Card}\{B \subset E / \operatorname{Card} B = k\}\\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}\\ &= 3^n.\end{aligned}$$

den04_s **Solution 6.5** (énoncé)**.** Définissons les vecteurs $D = \binom{1}{0}$ (droite) et $H = \binom{1}{0}$ (haut). Un chemin de $(0,0)$ vers (p,q) est un $(p+q)$-uplet d'éléments de $\{D,H\}$ qui contient p fois l'élément D et q fois l'élément H. Choisir un tel $(p+q)$-uplet revient à choisir un sous-ensemble à p éléments dans un ensemble à $p+q$ éléments : autrement dit, le nombre de chemins est

$$\binom{p+q}{p}.$$

den05_s **Solution 6.6** (énoncé)**.**

1. - Une application de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même est surjective si et seulement si elle est bijective. Donc $S(n,n) = n!$.
   - $S(n,1) = 1$.
   - Si $p > n$, $S(n,p) = 0$.
2. Il y a 2^n applications de $[\![1,n]\!]$ vers $\{1,2\}$. Parmi celles-ci, seulement 2 ne sont pas surjectives (les applications constantes respectivement égales à 1 et 2). Donc

   $$S(n,2) = 2^n - 2.$$

   Si f est une surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$, chaque élément de $[\![1,n-1]\!]$ admet un antécédent par f, sauf un élément qui en admet deux. Choisir une surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$ revient donc à choisir un élément de $[\![1,n-1]\!]$, deux éléments de $[\![1,n]\!]$ et une bijection sur un ensemble à $n-2$ éléments. Donc

   $$S(n,n-1) = (n-1)\frac{n(n-1)}{2}(n-2)! = \frac{n!(n-1)}{2}.$$

3. Si X et Y sont deux ensembles, on note $\mathrm{Sur}(X,Y)$ l'ensemble des surjections de X vers Y. Son cardinal ne dépend que du cardinal de X et de Y. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, notons

   $$A_k = \{f \in \mathrm{Sur}([\![1,n]\!],[\![1,p]\!]) \ / \ f(1) = k \text{ et } f(i) \neq k \text{ pour tout } i \neq 1\}$$

   et

   $$B_k = \{f \in \mathrm{Sur}([\![1,n]\!],[\![1,p]\!]) \ / \ f(1) = k \text{ et } \exists i \neq 1 \text{ tel que } f(i) = k\}.$$

   Il est assez clair qu'on a la partition suivante :

   $$\mathrm{Sur}([\![1,n]\!],[\![1,p]\!]) = \left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{p} B_k\right),$$

   et donc, en prenant les cardinaux :

   $$S(n,p) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k) + \mathrm{Card}(B_k).$$

   - Pour tout k, définissons l'application $\varphi_k \colon A_k \to \mathrm{Sur}([\![2,n]\!],[\![1,p]\!] \setminus \{k\})$ par :

     $$\varphi_k(f) = f\Big|_{[\![2,n]\!]}^{[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}.$$

     Alors φ_k est bien définie et elle est bijective (quel est son inverse ?) . On en déduit que

     $$\mathrm{Card}(A_k) = S(n-1,p-1).$$

- Pour tout k, définissons l'application $\psi_k\colon B_k \to \mathrm{Sur}([\![2,n]\!],[\![1,p]\!])$ par :

$$\psi_k(f) = f|_{[\![2,n]\!]}.$$

Alors ψ_k est bien définie et elle est bijective (quel est son inverse ?) . On en déduit que

$$\mathrm{Card}(B_k) = S(n-1,p).$$

Finalement on obtient bien

$$S(n,p) = p(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)).$$

4. On raisonne par récurrence sur n. Définissons la propriété

$$\mathcal{P}(n)\colon \text{« Pour tout } p \geqslant 1,\ S(n,p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n \text{ ».}$$

On initialise au rang $n = 0$: comme $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k} = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons maintenant la propriété $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour un certain n. On utilise alors la formule de récurrence :

$$\begin{aligned}
S(n,p) &= p(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)) \\
&= p\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^{n-1} + p\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k-1}\binom{p-1}{k}k^{n-1} \\
&= p^n + \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k}p\binom{p}{k}k^{n-1} - \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k}p\binom{p-1}{k}k^{n-1} \\
&= p^n + \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k}p\left(\frac{p!}{k!(p-k)!} - \frac{(p-1)!}{k!(p-k-1)!}\right)k^{n-1} \\
&= p^n + \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k}\frac{p!(p-(p-k))}{k!(p-k)!}k^{n-1} \\
&= p^n + \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n.
\end{aligned}$$

den01_s **Solution 6.7** (énoncé)**.** On introduit pour $k \in [\![1,n]\!]$ et $X \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$ la quantité

$$\mathbb{1}_X(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette notation va nous permettre d'intervertir les sommes. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)}\sum_{k\in X} k &= \sum_{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{1}_X(k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)} k\mathbb{1}_X(k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\sum_{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)} \mathbb{1}_X(k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{Card}\{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket) : k\in X\}.
\end{aligned}$$

Or, pour k fixé, il y a exactement 2^{n-1} parties de $\llbracket 1,n\rrbracket$ qui contiennent k (et il y en a 2^{n-1} qui ne contiennent pas k). On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)}\sum_{k\in X} k &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{Card}\{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)/k\in X\}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k2^{n-1}\\
&= 2^{n-2}n(n+1).
\end{aligned}$$

den02_s **Solution 6.8** (énoncé).

- $u_1 = 1$ car il y n'y a qu'une fonction de $\{1\}$ dans lui-même, et c'est une involution.
- Une involution est nécessairement une bijection (d'inverse elle-même). Or il y a deux bijections de $\{1,2\}$ dans lui-même : ce sont

$$\begin{cases}1\mapsto 1\\ 2\mapsto 2\end{cases}\quad \text{et}\quad \begin{cases}1\mapsto 2\\ 2\mapsto 1\end{cases},$$

  qu'on note respectivement Id et $(1,2)$. Les deux sont des involutions, donc $u_2 = 2$.
- Il y a $3! = 6$ bijections de $\{1,2,3\}$ dans lui-même. Essayons de les trouver. Il y a

$$\begin{cases}1\mapsto 2\\ 2\mapsto 1\\ 3\mapsto 3\end{cases},\quad \begin{cases}1\mapsto 3\\ 2\mapsto 2\\ 3\mapsto 1\end{cases}\quad \text{et}\quad \begin{cases}1\mapsto 1\\ 2\mapsto 3\\ 3\mapsto 2\end{cases},$$

  qu'on note respectivement $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$ (il faut comprendre ça comme des bijections et non des couples d'entiers !). Ce sont les trois bijections qui laissent un élément fixe et qui permutent les deux autres. Il y a aussi

$$\begin{cases}1\mapsto 2\\ 2\mapsto 3\\ 3\mapsto 1\end{cases}\quad \text{et}\quad \begin{cases}1\mapsto 3\\ 2\mapsto 1\\ 3\mapsto 2\end{cases},$$

  qu'on note respectivement $(1,2,3)$ et $(1,3,2)$. Ce sont les deux cycles. En ajoutant l'identité, on obtient bien 6 bijections. L'identité et les trois permutations sont des involutions tandis que les deux cycles n'en sont pas. Donc $u_3 = 4$.

Passons au cas général. Si X est un ensemble, notons I_X l'ensemble des involutions de X. Remarquons au passage que le cardinal de I_X ne dépend que du cardinal de X. $I_{[\![1,n+2]\!]}$ se partitionne en

$$I_{[\![1,n+2]\!]} = \bigcup_{k=1}^{n+2} \{f \in I_{[\![1,n+2]\!]} / f(1) = k\}.$$

- Pour $k = 1$, on définit la bijection $\varphi_1 \colon \{f \in I_{[\![1,n+2]\!]} / f(1) = 1\} \to I_{[\![2,n+2]\!]}$ par :

$$\varphi_1(f) = f|_{[\![2,n+2]\!]}.$$

  La restriction se fait au départ et à l'arrivée. φ_1 est bien définie et elle est bijective (quel est son inverse ?).

- Pour $k > 1$, on définit la bijection $\varphi_k \colon \{f \in I_{[\![1,n+2]\!]} / f(1) = k\} \to I_{[\![2,n+2]\!] \setminus \{k\}}$ par :

$$\varphi_k(f) = f|_{[\![2,n+2]\!] \setminus \{k\}}.$$

  La restriction se fait au départ et à l'arrivée. De la même manière qu'avant, φ_k est bien définie et bijective.

En prenant les cardinaux dans la partition et en utilisant les bijections, on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \operatorname{Card} I_{[\![1,n+2]\!]} \\ &= \sum_{k=1}^{n+2} \operatorname{Card} \{f \in I_{[\![1,n+2]\!]} / f(1) = k\} \\ &= \operatorname{Card} I_{[\![2,n+2]\!]} + \sum_{k=2}^{n+2} \operatorname{Card} I_{[\![2,n+2]\!] \setminus \{k\}} \\ &= u_{n+1} + (n+1) u_n. \end{aligned}$$

den06_s **Solution 6.9** (énoncé)**.** Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Choisir $n + 1$ entiers de somme p revient à choisir le premier terme $x_1 \in \{0, \dots, p\}$ puis à choisir les n autres entiers $x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{N}$ de somme $p - x_1$. Autrement dit, on a

$$f(n+1, p) = f(n, 0) + f(n, 1) + \cdots + f(n, p). \tag{6.1}$$ den06:1

De manière formelle, notons

$$A_{n,p} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \cdots + x_n = p\}.$$

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon A_{n+1,p} &\to A_{n,0} \cup A_{n,1} \cup \cdots \cup A_{n,p} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Alors φ est une bijection, de bijection réciproque

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \colon A_{n,0} \cup A_{n,1} \cup \cdots \cup A_{n,p} &\to A_{n+1,p} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, p - x_1 - \cdots - x_n). \end{aligned}$$

On a donc égalité des cardinaux :

$$\operatorname{Card}(A_{n+1,p}) = \operatorname{Card}(A_{n,0} \cup A_{n,1} \cup \cdots \cup A_{n,p}).$$

Comme les $A_{n,p}$ sont deux à deux disjoints, on retrouve l'égalité (6.1).

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f(1,p) &= 1, \\ f(2,p) &= f(1,0) + \cdots + f(1,p) \\ &= 1 + \cdots + 1 \\ &= p+1 \\ &= \binom{p+1}{1}, \\ f(3,p) &= f(2,0) + \cdots + f(2,p) \\ &= 1 + 2 + \cdots + (p+1) \\ &= \frac{(p+1)(p+2)}{2} \\ &= \binom{p+2}{2}. \end{aligned}$$

On conjecture l'expression de $f(n,p)$ qu'on peut démontrer par récurrence sur n :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n,p) = \binom{p+n-1}{n-1} = \binom{p+n-1}{p}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \binom{p+n}{p} &= \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n-1}{p-1} \\ &= \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n-2}{p-1} + \binom{p+n-2}{p-2} \\ &\vdots \\ &= \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n-2}{p-1} + \cdots + \binom{n}{0}. \end{aligned}$$

On peut aussi démontrer ce résultat de manière purement combinatoire. En effet, choisir une partition $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'entier p revient à écrire un tableau de $n+p-1$ cases et à en noircir $n-1$ d'entre elles. La partition ensuite définie est la longueur des trous entre les cases noires. De manière formelle, notons $\mathcal{P}_{n-1}(\{1, \ldots, n-p+1\})$ l'ensemble des parties à $n-1$ éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n-p+1\}$. Définissons l'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon A_{n,p} &\to \mathcal{P}_{n-1}(\{1, \ldots, n-p+1\}) \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \{x_1 + 1, x_1 + x_2 + 2, \ldots, x_1 + \cdots + x_{n-1} + n - 1\}. \end{aligned}$$

Alors on peut montrer que c'est une bijection, par exemple en trouvant son application réciproque. Cela donne directement la formule car $\mathcal{P}_{n-1}(\{1, \ldots, n-p+1\})$ est de cardinal $\binom{p+n-1}{n-1}$.

7 Nombres réels

nre01_s **Solution 7.1** (énoncé)**.** On pose

$$X = \{x \in [0,1] : f(x) \leqslant x\}.$$

X est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient 1) et minorée par 0. Elle admet donc un inf que l'on note s.

- Si $x \in X$, alors $f(x) \leqslant x$ d'une part. D'autre part, comme s est un minorant de X, $s \leqslant x$ et donc $f(s) \leqslant f(x)$ par croissance de f. Donc $f(s) \leqslant x$. Comme c'est vrai pour tout $x \in X$, $f(s)$ est un minorant de X. Par définition de l'inf (le plus grand des minorants), $f(s) \leqslant s$.
- Par croissance de f, on en déduit que $f(f(s)) \leqslant f(s)$ et donc $f(s) \in X$. Comme s est un minorant de X, $s \leqslant f(s)$.

Conclusion : $f(s) = s$.

nre02_s **Solution 7.2** (énoncé).

1. On démontre le résultat suivant : si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, b[$ tel que
$$a = bq + r.$$
   - Unicité : si les deux couples (q_1, r_1) et (q_2, r_2) conviennent, alors
$$b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$
Comme $-b < r_2 - r_1 < b$, on a $-1 < q_1 - q_2 < 1$. Mais $q_1 - q_2$ est un entier, il est donc égal à 0. On en déduit facilement que $r_1 = r_2$.
   - Existence : l'ensemble
$$X = \{n \in \mathbb{Z} : bn \leqslant a\}$$
est une partie de $\mathbb{Z}$ majorée (par a/b) et non vide donc elle admet un maximum q. Comme $q \in X$ et $q + 1 \notin X$,
$$qb \leqslant a < (q + 1)b.$$
Il reste à poser $r = a - bq$. L'inégalité ci-dessus montre que $r \in [0, b[$.
2. On effectue la division euclidienne de a par b : il existe $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, b[$ tel que
$$a = bq + r.$$
Posons alors $p = b - \lfloor r \rfloor$. On a les inégalités :
$$\begin{aligned} \lfloor r \rfloor \leqslant r &< \lfloor r \rfloor + 1, \\ -\lfloor r \rfloor - 1 < -r &\leqslant -\lfloor r \rfloor, \\ p - 1 < b - r &\leqslant p, \\ \frac{a + p - 1}{b} < \frac{a + b - r}{b} &\leqslant \frac{a + p}{b}, \end{aligned}$$
et finalement
$$\frac{a + p - 1}{b} < q + 1 \leqslant \frac{a + p}{b}.$$
   - Pour $k \in [\![0, p - 1]\!]$,
$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{a + k}{b} \leqslant \frac{a + p - 1}{b} < q + 1,$$
ce qui donne
$$\left\lfloor \frac{a + k}{b} \right\rfloor = q.$$

- De même, pour $k \in [\![p, b-1]\!]$,

$$\left\lfloor \frac{a+k}{b} \right\rfloor = q+1.$$

Il ne reste plus qu'à séparer la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{a+k}{b} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{p-1} \left\lfloor \frac{a+k}{b} \right\rfloor + \sum_{k=p}^{b-1} \left\lfloor \frac{a+k}{b} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} q + \sum_{k=p}^{b-1} (q+1) \\ &= bq + (b-p) \\ &= bq + \lfloor r \rfloor \\ &= \lfloor bq + r \rfloor \\ &= \lfloor a \rfloor.\end{aligned}$$

nre03_s **Solution 7.3** (énoncé).

1. X est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0 donc elle admet une borne inf. On va montrer que c'est 0. Soit $\varepsilon > 0$; on cherche donc un élément de X compris entre 0 et ε. Autrement dit, on veut montrer qu'il existe un rationnel p/q tel que
$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{a} \right| < \varepsilon,$$
ou encore
$$\sqrt{a} - \varepsilon < \frac{p}{q} < \sqrt{a} + \varepsilon.$$
L'existence d'un tel rationnel est donné par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
2. a étant un rationnel positif, il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $ak \in \mathbb{N}$. En multipliant les deux membres de l'inégalité par kq^2, la condition devient
$$|p^2 k - akq^2| \geqslant kC_1.$$
Or pour tout couple (p, q), $|p^2 k - akq^2|$ est un entier naturel. Il est non nul (car $\sqrt{a}$ est irrationnel) donc il est supérieur ou égal à 1. Posons alors $C_1 = 1/k$, de sorte que pour tout couple (p, q) on a
$$\left| \frac{p^2}{q^2} - a \right| \geqslant \frac{C_1}{q^2}.$$
3. On sépare le problème en deux.
   - Soit un couple (p, q) tel que $p/q \notin [0, 2\sqrt{a}]$. Alors
   $$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{a} \right| \geqslant \sqrt{a} \geqslant \frac{\sqrt{a}}{q^2}.$$
   - Soit un couple (p, q) tel que $p/q \in [0, 2\sqrt{a}]$. Alors
   $$\left| \frac{p}{q} + \sqrt{a} \right| \leqslant 3\sqrt{a},$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{p^2}{q^2}+a\right| &= \left|\frac{p}{q}+\sqrt{a}\right|\left|\frac{p}{q}-\sqrt{a}\right| \\ &\leqslant 3\sqrt{a}\left|\frac{p}{q}-\sqrt{a}\right|,\end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant la question précédente :

$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{a}\right| \geqslant \frac{C_1}{3\sqrt{a}q^2}.$$

Il ne reste plus qu'à poser $C = \min\left(\sqrt{a}, \frac{C_1}{3\sqrt{a}}\right)$ de sorte que pour tout couple (p, q) :

$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{a}\right| \geqslant \frac{C}{q^2}.$$

Autrement dit, l'irrationnel $\sqrt{a}$ est « mal approché » par des rationnels.

nre04_s **Solution 7.4** (énoncé). Soient $a < b$ deux réels. On veut montrer qu'il existe $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$a \leqslant \sqrt{m} - \sqrt{n} \leqslant b.$$

On peut réécrire cette condition en

$$\sqrt{n} + a \leqslant \sqrt{m} \leqslant \sqrt{n} + b.$$

Mais si n est assez grand (disons $n > a^2$, mais cela n'a pas d'importance) on a $\sqrt{n} + a > 0$ donc on peut passer au carré :

$$a \leqslant \sqrt{m} - \sqrt{n} \leqslant b \quad \Longleftrightarrow \quad (\sqrt{n} + a)^2 \leqslant m \leqslant (\sqrt{n} + b)^2.$$

L'intervalle $\left[(\sqrt{n}+a)^2, (\sqrt{n}+b)^2\right]$ est de longueur

$$\lambda_n = (\sqrt{n} + b)^2 - (\sqrt{n} + a)^2 = 2\sqrt{n}(b - a) + b^2 - a^2.$$

On voit que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ donc, pour n assez grand, l'intervalle est de longueur $\lambda_n > 1$. Or un intervalle de longueur strictement supérieure à 1 contient toujours un entier m. Cela nous donne un couple (m, n) qui convient.

8 Suites

sui09_s **Solution 8.1** (énoncé). 1. Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad |u_n - a| < \varepsilon.$$

Posons alors $\varepsilon = a/2$ dans la définition ci-dessus. Cela assure l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - a| < a/2,$$

donc

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq a - |u_n - a| > a/2 > 0.$$

2. La suite de terme général $a_n = v_n - u_n$ converge vers $b - a > 0$. D'après la question précédente, on a $a_n > 0$ à partir d'un certain rang.

sui11_s **Solution 8.2** (énoncé). 1. La suite

$$u_n = \frac{1 - (-2/3)^n}{1 + (-2/3)^n}$$

converge vers 1 car la suite $(-2/3)^n$ tend vers 0.

2. On multiplie par la quantité conjuguée pour se débarrasser des limites indéterminées :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \\ &\to 1. \end{aligned}$$

3. En divisant par n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$$

converge vers 1.

4. On sait calculer u_n explicitement :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n},$$

donc u_n converge vers 1/2.

5. On passe au log :

$$\ln u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

L'application $x \mapsto \ln x$ est dérivable en 1 et son nombre dérivé vaut $\ln'(1) = 1/1 = 1$. Par définition du nombre dérivé,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = 1.$$

Comme la suite $(1/n)$ converge vers 0, on a donc

$$\frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1,$$

autrement dit $\ln u_n \to 1$. En repassant à l'exponentielle, on obtient $u_n \to \exp(1) = e$.

6. On passe au log :
$$\ln u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$
L'application $x \mapsto \ln x$ est dérivable en 1 et son nombre dérivé vaut $\ln'(1) = 1/1 = 1$. Par définition du nombre dérivé,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = 1.$$
Comme la suite $(1/n^2)$ converge vers 0, on a donc
$$\frac{\ln(1+1/n^2)}{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$
autrement dit $n \ln u_n \to 1$, donc $\ln u_n \to 0$. En repassant à l'exponentielle, $u_n \to 1$.
7. Pour tout n, on utilise la majoration grossière
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n} \\ &\leq \frac{1 \times n \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$
Ainsi (u_n) tend vers 0.

sui01_s **Solution 8.3** (énoncé). 1. On cherche λ tel que $(u_n - \lambda)$ soit une suite géométrique. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$, on a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \lambda &= 2u_n + 3 - \lambda \\ &= 2(u_n - \lambda) + 3 + \lambda. \end{aligned}$$
En prenant $\lambda = -3$, on obtient donc
$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} + 3 = 2(u_n + 3).$$
La suite $(u_n + 3)$ est géométrique de raison 2, donc pour tout n on a
$$u_n + 3 = (u_0 + 3)2^n,$$
soit encore $u_n = 4 \times 2^n - 3$ pour tout n.

2. **Cas $a = 1$.** Pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} = u_n + b$: (u_n) est une suite arithmétique. Ainsi on a $u_n = u_0 + nb$ pour tout n, et la suite converge vers $\pm\infty$ suivant le signe de b (et vers u_0 si $b = 0$).

   Cas $a \neq 1$. Soit λ la solution de l'équation $\lambda = a\lambda + b$ (autrement dit, $\lambda = b/(1-a)$). Alors pour tout $n \geq 0$ on a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \lambda &= au_n + b - (a\lambda + b) \\ &= a(u_n - \lambda). \end{aligned}$$

Donc $(u_n - \lambda)$ est une suite géométrique de raison a, et on a pour tout n

$$u_n - \lambda = a^n(u_0 - \lambda),$$

soit encore

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

La limite de la suite dépend des paramètres :

— Si $|a| < 1$, alors (u_n) tend vers $b/(1-a)$.

— Si $a \leq -1$, la suite diverge à moins que $u_0 = b/(1-a)$ (et dans ce cas, elle stationne en u_0).

— Si $a > 1$, la suite diverge vers $\pm\infty$ suivant le signe de $u_0 - b/(1-a)$ (et elle stationne en u_0 si $u_0 = b/(1-a)$).

sui14_s **Solution 8.4** (énoncé). 1. On suppose que $u_n \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dès lors, pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_n}{n} \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} u_k \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N} u_k \right| + \frac{n-N}{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N} u_k \right|. \end{aligned}$$

Or la quantité $\sum_{k=1}^{N} u_k$ ne dépend pas de n : il existe donc $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N', \quad \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N} u_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a

$$\left| \frac{S_n}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la suite (S_n/n) tend vers 0.

2. Si (u_n) converge vers a, la suite $(u_n - a)$ converge vers 0 donc on peut lui appliquer le résultat de la question précédente : (T_n/n) tend vers 0, où

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{n} &= \frac{(u_1 - a) + (u_2 - a) + \cdots + (u_n - a)}{n} \\ &= \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - a \\ &= \frac{S_n}{n} - a. \end{aligned}$$

On en déduit que (S_n/n) converge vers a.

3. La réciproque est fausse. En effet, soit (u_n) la suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout n. Elle ne converge pas, et pourtant la suite (S_n/n) converge vers 0.
4. Soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq 2A.$$

Dès lors, pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k\right) \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} u_k \\ &\geq \frac{n-N}{n} 2A. \end{aligned}$$

Et donc, dès que $n \geq 2N$,

$$\frac{S_n}{n} \geq A.$$

Comme c'est vrai pour tout A, on a démontré que (S_n/n) tend vers $+\infty$.
La réciproque est fausse. En effet, soit (u_n) la suite telle que $u_n = n$ lorsque n est pair et $u_n = 0$ lorsque n est impair. Elle ne tend pas vers $+\infty$, mais (S_n/n) tend vers $+\infty$.

sui08_s **Solution 8.5** (énoncé)**.** Notons l la limite de (u_n). Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Appliquons cette définition à $\varepsilon = 1/3$: il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq 1/3,$$

soit encore

$$\forall n \geq N, \quad u_n \in \left[l - \frac{1}{3}, l + \frac{1}{3}\right].$$

Or cet intervalle est de longueur $2/3$, et donc contient au plus un entier, qu'on appelle p. Pour tout $n \geq N$, on a donc $u_n = p$: autrement dit, (u_n) est constante à partir du rang N.

sui10_s **Solution 8.6** (énoncé)**.** Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $u_n \to 1$ (et de même, $v_n \to 1$).

sui04_s **Solution 8.7** (énoncé)**.** On prend $u_n = (-1)^n/n$ pour $n \geq 1$. Cette suite converge vers 0 mais sa partie entière

$$\lfloor u_n \rfloor = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

est une suite divergente.

sui12_s **Solution 8.8** (énoncé)**.** Soit $m \geq 1$ fixé. Le terme général $u_{m,n}$ vaut 1 lorsque $n \geq m$ donc la suite $(u_{m,n})_{n\geq 1}$ stationne à 1. On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} u_{m,n} = 1,$$

d'où évidemment

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} u_{m,n} = 1.$$

De manière similaire, on fixe $n \geq 1$. Dès que $m > n$, on a $u_{m,n} = 0$ donc la suite $(u_{m,n})_{m\geq 1}$ stationne à 0. Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} u_{m,n} = 0,$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_{m,n} = 0.$$

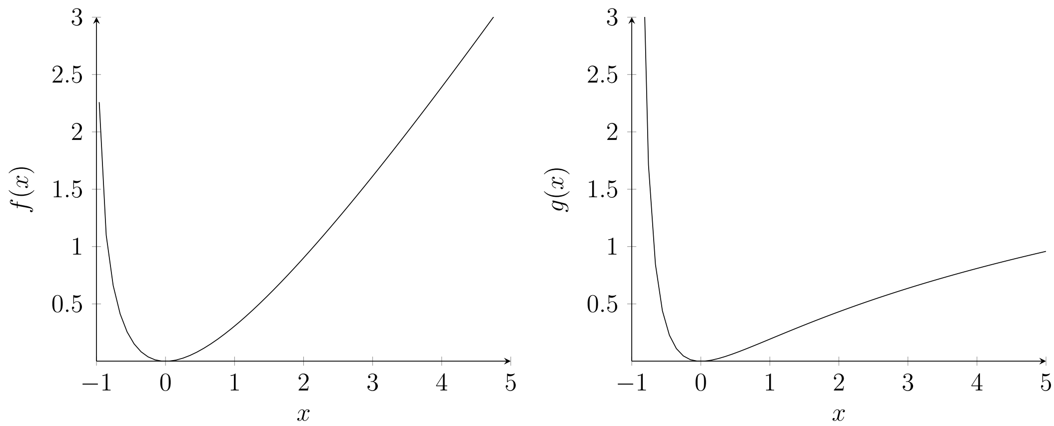
sui13_s **Solution 8.9** (énoncé)**.**

1. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $N \geq 0$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad |u_n - a| \leq \varepsilon.$$
Or pour tout $n \geq N$, on a également $2n \geq N$ d'où :
$$|u_{2n} - a| \leq \varepsilon.$$
Comme c'est vrai pour tout ε, on a montré que $u_{2n} \to a$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On écrit les définitions :
$$\exists N_1 \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \quad |u_{2n} - a| \leq \varepsilon,$$
$$\exists N_2 \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_2, \quad |u_{2n+1} - a| \leq \varepsilon.$$
Soit alors $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Pour tout $n \geq N$, il y a deux cas :
   - Si n est pair, alors $n/2 \geq N_1$ donc $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
   - Si n est impair, alors $(n-1)/2 \geq N_2$ donc $|u_n - a| \leq \varepsilon$.

   Dans les deux cas, on a $|u_n - a| \leq \varepsilon$: on a montré que u_n converge vers a.
3. L'application φ est strictement croissante donc pour tout $n \geq 0$ on a
$$\varphi(n) \geq n,$$
comme on peut le voir par exemple par récurrence.
Soit à présent $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $N \geq 0$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad |u_n - a| \leq \varepsilon,$$
où a est la limite de (u_n). Pour $n \geq N$, on a $\varphi(n) \geq n \geq N$, donc
$$|u_{\varphi(n)} - a| \leq \varepsilon.$$
Cela montre que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a.
4. On pose $u_n = (-1)^n$. La suite $(u_{2n} = 1)$ converge vers 1 et la suite $(u_{2n+1} = -1)$ converge vers -1. Pourtant, (u_n) diverge : si elle convergeait, les deux sous-suites extraites convergeraient toutes les deux vers $\lim u_n$, or elles convergent vers deux limites différentes.

5. Notons respectivement a, b et c les limites de (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}).
La suite (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}) donc elle converge vers a. Mais c'est aussi une suite extraite de (u_{3n}) donc elle converge vers c. Par unicité de la limite, on a $a = c$.
La suite (u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}). Donc elle converge vers b et c, et par unicité de la limite on a $b = c$.
Finalement $a = b$: les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Comme on l'a vu, cela implique que (u_n) converge.

sui15_s **Solution 8.10** (énoncé). 1. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$. Elle est dérivable sur son intervalle de définition et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = x/(1+x) \geq 0$. Donc f est croissante. Comme $f(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$ on a $\ln(1+x) \leq x$.
De la même manière, soit $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(1+x) - x/(1+x)$. Elle est dérivable sur son intervalle de définition et pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = x/(1+x)^2 \geq 0$. Elle est donc croissante. Comme $f(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$ on a $x/(1+x) \leq \ln(1+x)$. Voir figure 8.



ui15:fig FIGURE 8 – Graphe des fonctions $f\colon x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $g\colon x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

En posant $x = 1/n$ dans les inégalités ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= H_n - H_{n-1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc respectivement croissante et décroissante. De plus, lorsque n tend vers $+\infty$

$$u_n - v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \to 0.$$

Conclusion : (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. Notons γ la limite commune de (u_n) et de (v_n). La suite $(u_n - \gamma)$ tend vers 0, et en posant $e_n = u_n - \gamma$ on a pour tout n

$$H_n = \ln n + \gamma + e_n.$$

4. Pour tout n,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} 1/k &= H_{2n} - H_n \\ &= \ln 2n + \gamma + e_{2n} - \ln n - \gamma - e_n \\ &= \ln 2 + e_{2n} - e_n.\end{aligned}$$

Comme $e_{2n} - e_n \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$, la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} 1/k$ converge vers $\ln 2$.

sui16_s **Solution 8.11** (énoncé)**.** On note $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$. Alors pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

car (a_n) est décroissante. De même,

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+3}a_{2n+3} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement décroissante et croissante, et

$$u_n - v_n = a_{2n+1} \to 0.$$

Conclusion : (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite. On en déduit que (S_n) converge.

sui17_s **Solution 8.12** (énoncé)**.**

1. On utilise l'encadrement $n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ valable pour $1 \leq k \leq n$. Cela donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2},$$

soit

$$\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 1.

2. Pour tout n et tout $k \leq 2n+1$, on a $n^2 \leq n^2+k \leq n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Utilisons cet encadrement dans la somme :
$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2}},$$
ou encore
$$\frac{2n+1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n}.$$
D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 2.
3. La majoration $n^2+k \leq 2n^2$ (lorsque $1 \leq k \leq n^2$) permet d'écrire
$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{2n^2}},$$
soit
$$u_n \geq \frac{n}{\sqrt{2}}.$$
On en déduit que (u_n) tend vers $+\infty$.
4. Pour tout entier k compris entre 1 et n,
$$kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx,$$
donc en sommant pour k allant de 1 à n on obtient
$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx.$$
Il ne reste plus qu'à diviser par n^2 pour obtenir :
$$\frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} < u_n \leqslant \frac{n+1}{2n}x.$$
La suite converge donc vers $x/2$ d'après le théorème des gendarmes.

sui03_s **Solution 8.13** (énoncé)**.** Soit $\varepsilon > 0$. On fixe un entier k assez grand pour que
$$\frac{1}{k} \leqslant \varepsilon,$$
puis un entier N assez grand pour que
$$\frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{k}.$$
Il reste à vérifier la fin de la proposition : soit $n \geqslant N$. On a alors
$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n &\leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k} \\ &\leqslant \frac{k}{N} + \frac{1}{k} \\ &\leqslant k\frac{\varepsilon}{k} + \varepsilon \\ &\leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Cela achève la preuve.

Alternativement, on peut prendre $n \in \mathbb{N}^*$ et $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ de sorte que

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}+1}.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure.

sui06_s **Solution 8.14** (énoncé)**.** Posons $z_0 = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. Pour calculer z_1, on utilise la technique de l'angle moitié :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\left(re^{i\theta} + r\right) \\ &= \frac{1}{2}re^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}re^{i\theta/2}\Big(2\cos(\theta/2)\Big) \\ &= r\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}. \end{aligned}$$

En réitérant ce calcul, on obtient

$$z_2 = r\cos(\theta/2)\cos(\theta/4)e^{i\theta/4},$$

etc. de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = r\left(\prod_{k=1}^{n} \cos(\theta/2^k)\right) e^{i\theta/2^n}.$$

Pour calculer le produit des cosinus, on utilise une astuce :

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{n} \cos(\theta/2^k)\right) \sin(\theta/2^n) &= \cos(\theta/2)\cdots\cos(\theta/2^{n-1})(\cos(\theta/2^n)\sin(\theta/2^n)) \\ &= \cos(\theta/2)\cdots\cos(\theta/2^{n-1})\left(\frac{1}{2}\sin(\theta/2^{n-1})\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos(\theta/2)\cdots\cos(\theta/2^{n-1})\sin(\theta/2^{n-1}) \\ &\ \ \vdots \\ &= \frac{1}{2^n}\sin(\theta). \end{aligned}$$

Cela permet d'écrire

$$z_n = r\frac{\sin(\theta)}{2^n\sin(\theta/2^n)}e^{i\theta/2^n}.$$

Or, lorsque x tend vers 0, $\sin(x)/x$ tend vers 1. On obtient que lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{2^n}{\theta}\sin(\theta/2^n) \to 1,$$

ou encore

$$\frac{1}{2^n\sin(\theta/2^n)} \to \frac{1}{\theta}.$$

Comme $\exp(i\theta/2^n)$ tend vers 1, on obtient la limite de (z_n) :

$$z_n \to r\frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

sui07_s **Solution 8.15** (énoncé). On raisonne par l'absurde. Supposons que la suite $(\cos(n))$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Alors la suite $(\cos(n+1))$ converge également vers l. On a

$$\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1),$$

et donc, en passant à la limite :

$$\sin(n) \to \frac{l\cos(1) - l}{\sin(1)}.$$

On refait la même chose avec $\sin(n+1)$:

$$\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \sin(1)\cos(n),$$

donc (en passant à la limite) :

$$\frac{l\cos(1) - l}{\sin(1)} = \frac{l\cos(1) - l}{\sin(1)}\cos(1) + \sin(1)l,$$

soit

$$\frac{\cos(1) - 1}{\sin(1)}(1 - \cos(1)) = \sin(1),$$

donc

$$(\cos(1) - 1)^2 = -\sin^2(1),$$

ce qui est faux, puisque $-\sin^2(1)$ est strictement négatif. On a divisé par l dans une égalité, il faut donc vérifier que $l \neq 0$. Si $l = 0$, alors $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$ tendent tous les deux vers 0, mais c'est impossible car $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$.

sui02_s **Solution 8.16** (énoncé).

1. Les $n+1$ nombres $0, \alpha - \lfloor\alpha\rfloor, \dots, n\alpha - \lfloor n\alpha\rfloor$ sont des éléments de $[0, 1[$. Or on peut partitionner $[0, 1[$ en n intervalles :

$$[0, 1[= \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[.$$

D'après le principe des tiroirs, il y a un intervalle contenant au moins deux de ces nombres. Autrement dit, il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $k \neq l \in [\![0, n]\!]$ tels que

$$k\alpha - \lfloor k\alpha\rfloor \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[\quad \text{et} \quad l\alpha - \lfloor l\alpha\rfloor \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[.$$

Mais alors la différence entre les deux est plus petite que $1/n$:

$$\Big|k\alpha - \lfloor k\alpha\rfloor - l\alpha + \lfloor l\alpha\rfloor\Big| \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le résultat précédent et en divisant par $|l-k|$, on obtient

$$\left|\alpha - \frac{\lfloor l\alpha\rfloor - \lfloor k\alpha\rfloor}{l-k}\right| \leqslant \frac{1}{n|l-k|}.$$

Notons alors $p = \lfloor l\alpha\rfloor - \lfloor k\alpha\rfloor$ et $q = l - k$. On remarque que comme l et k sont compris entre 0 et n, on a $|q| \leqslant n$ et donc

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{n|l-k|} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Le couple (p,q) dépend de l'entier n : notons-le (p_n,q_n). Il reste à expliquer pourquoi $\{(p_n,q_n), n\in\mathbb{N}^*\}$ est infini. Appliquons le théorème des gendarmes à la borne obtenue ci-dessus :

$$0\leqslant\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{1}{n|q_n|}.$$

On obtient que $p_n/q_n\to\alpha$. Si l'ensemble $\{(p_n,q_n), n\in\mathbb{N}^*\}$ était fini, la suite (p_n/q_n) ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs et donc elle stationnerait à α. Cela contredit l'irrationnalité de α.

3. Soient $x\leqslant y$ des réels. On écrit la différence des sinus comme une intégrale et on majore le cosinus par 1 :

$$\begin{aligned}|\sin(y)-\sin(x)| &= \left|\int_x^y \cos t\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_x^y |\cos t|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_x^y 1\,\mathrm{d}t\\ &= y-x.\end{aligned}$$

De même si $x\geqslant y$.

4. Utilisons les résultats précédents avec $\alpha=\pi$. Pour une infinité de couples (p,q) on a

$$\begin{aligned}&& \left|\pi-\frac{p}{q}\right| &\leqslant \frac{1}{q^2},\\ \text{donc} && |q\pi-p| &\leqslant \frac{1}{q},\\ \text{donc} && |\sin(q\pi)-\sin(p)| &\leqslant \frac{1}{q},\\ \text{donc} && |\sin(p)| &\leqslant \frac{1}{q},\\ \text{donc} && |p\sin(p)| &\leqslant \left|\frac{p}{q}\right|,\\ \text{donc} && u_p &\geqslant \left|\frac{q}{p}\right|.\end{aligned}$$

Un tel couple (p,q) vérifie par ailleurs

$$\frac{q}{p}\geqslant\frac{1}{\pi+1/q^2}\geqslant\frac{1}{\pi+1}.$$

Pour chaque p, l'ensemble des q tels que $|\alpha-p/q|\leqslant 1/q^2$ est fini. Cela montre qu'il existe une infinité de p tels que $|\alpha-p/q|\leqslant 1/q^2$ pour au moins un q. Donc il existe une infinité de p tels que

$$|u_p|\geqslant\frac{1}{\pi+1}.$$

Comme la suite $(|u_p|)_{p\in\mathbb{Z}^*}$ est paire, on peut même choisir une infinité de tels p strictement positifs. On en déduit en particulier que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0. Il est alors relativement facile de voir que la suite diverge (par exemple parce qu'elle prend une infinité de valeurs positives et négatives).

sui05_s **Solution 8.17** (énoncé). Supposons que $l < 1$, et prenons $l' \in]l, 1[$ quelconque. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{f(n)}{n} \leqslant l',$$

soit

$$\forall n \geqslant N, \quad f(n) \leqslant l'n.$$

Posons alors $s = \max(f(1), f(2), \dots, f(N-1))$ et $N' = \max(N, s/l')$. Pour $k \in [\![1, N']\!]$, on a

$$\begin{cases} f(k) \leqslant s \leqslant l'N' & \text{si } k \leqslant N-1, \\ f(k) \leqslant l'k \leqslant l'N' & \text{si } k \geqslant N. \end{cases}$$

Ainsi, $f([\![1, N']\!]) \subset [1, l'N']$. Cela contredit l'injectivité de f pour des raisons de cardinal.

Supposons à présent que $l > 1$. Prenons $l' \in]1, l[$ quelconque. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad f(n) > l'n > n.$$

Ainsi, $f^{-1}([\![1, N]\!]) \subset [\![1, N-1]\!]$. Cela n'est pas possible pour des raisons de cardinal.

9 Continuité

cont10_s **Solution 9.1** (énoncé). On se donne $\varepsilon > 0$. Montrons qu'à partir d'un certain rang N, on a $|f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$. On utilise la définition de la continuité en a :

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Or (u_n) converge vers a donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, \quad |u_n - a| \leq \delta.$$

Soit à présent $n \geq N$. En utilisant successivement les deux propriétés ci-dessus, on a $|u_n - a| \leq \delta$ donc $|f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$.

cont12_s **Solution 9.2** (énoncé).

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \varepsilon/k$. Alors pour tout $y \in [x - \delta, x + \delta]$ on a
$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x| \leq k\delta = \varepsilon.$$
Cela montre que f est continue en x. Comme c'est vrai pour tout x, f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Supposons que $x \mapsto \sqrt{x}$ est k-lipschitzienne pour un certain $k > 0$. En prenant $y = 0$ dans la définition, on obtient
$$\forall x \in [0, 1], \quad \sqrt{x} \leq kx,$$
ce qui est absurde (prendre $x = 1/2k^2$ par exemple).

cont06_s **Solution 9.3** (énoncé). Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec $a \neq 0$. Supposons par exemple que $a > 0$. Alors $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Par définition, cela veut dire

$$\forall A \geqslant 0, \exists B \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant B \implies P(x) \geqslant A.$$

En particulier, si on prend $A = 0$, cela garantit l'existence d'un $B \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant B \implies P(x) \geqslant 0,$$

Et en particulier $P(B) \geqslant 0$. On fait de même en $-\infty$: comme $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, il existe un $B' \leqslant 0$ tel que $P(B') \leqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué au segment $[B', B]$ nous assure alors que P s'annule.

cont16_s **Solution 9.4** (énoncé)**.** Pour $0 \leq t \leq 2$, on note $f(t)$ la distance parcourue jusqu'au temps t. On a $f(0) = 0$, $f(2) = 12$, et il est raisonnable de supposer que f est une fonction continue. Notons alors $g(t) = f(t+1) - f(t)$ lorsque $0 \leq t \leq 1$. On a $g(0) + g(1) = f(2) - f(0) = 12$, donc $g(0) \leq 6 \iff g(1) \geq 6$. Autrement dit, $g(0)$ et $g(1)$ sont de part et d'autre de 6. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $g(t) = f(t+1) - f(t) = 6$. Le marcheur a alors parcouru exactement 6 kilomètres dans l'intervalle $[t, t+1]$.

cont09_s **Solution 9.5** (énoncé)**.**

1. Voir figure 9a. Lorsque x tend vers $-\infty$, on a $x^2 \to +\infty$ et $\ln(e^x + 1) \to 0^+$. Donc la limite cherchée est $+\infty$.
   Lorsque x tend vers $+\infty$, on élimine les formes indéterminées :
   $$\frac{x^2}{\ln(e^x+1)} = \frac{x^2}{\ln(e^x) + \ln(1+e^{-x})} = \frac{x}{1 + \ln(1+e^{-x})/x},$$
   de sorte que la limite cherchée est $+\infty$.
2. Voir figure 9b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$
   Lorsque $x > 0$, $1 - x < x\lfloor 1/x \rfloor < 1$. D'après le théorème des gendarmes, la limite à droite en 0 vaut 1. De même, pour $x < 0$ on a $1 < x\lfloor 1/x \rfloor < 1 - x$ donc la limite à gauche vaut 1 également.
   Dès que $x > 1$, on a $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ donc la limite en $+\infty$ vaut 0.
3. Voir figure 9c. On a
   $$\frac{x^a - 1}{x^b - 1} = \frac{(x^a-1)(x-1)}{(x-1)(x^b-1)}.$$
   L'application $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (et donc en particulier en 1) et son nombre dérivé en 1 vaut a. Par définition du nombre dérivé, lorsque x tend vers 1
   $$\frac{x^a - 1}{x - 1} \to a.$$
   De même,
   $$\frac{x - 1}{x^b - 1} \to \frac{1}{b}.$$
   La limite cherchée est donc a/b.
4. Voir figure 9d. Pour tout n, on pose $x_n = 1/(2\pi n)$. Alors
   $$\sin\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \sin(x_n + 2\pi n) = \sin(x_n).$$

Comme x_n tend vers 0 et que sin est continue en 0, $\sin(x_n)$ tend vers $\sin(0) = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. De la même manière, si on pose $y_n = 1/(2\pi n + \pi/2)$ alors

$$\sin\left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(y_n + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \cos(y_n).$$

Comme y_n tend vers 0, $\cos(y_n)$ tend vers 1. Par caractérisation séquentielle de la limite, la fonction n'admet pas de limite en 0.

5. Voir figure 9e. On factorise :

$$\ln x + \sin x = \ln x\left(1 + \frac{\sin x}{\ln x}\right).$$

On utilise la majoration $|\sin x/\ln x| \leq 1/\ln x$. D'après le théorème des gendarmes, $\sin x/\ln x$ tend vers 0 (lorsque x tend vers $+\infty$). La limite cherchée est donc $+\infty$.

6. Voir figure 9f. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) &= \sqrt{x}\frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\end{aligned}$$

En $+\infty$, la limite de cette expression est 1.

7. Voir figure 9g. Soit $f\colon x \mapsto x\ln x$. Elle est définie sur $]0, +\infty[$ et sa limite à droite en 0 vaut 0. Par composition de limites, $f(\ln x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1 (c'est une limite à droite).

8. Voir figure 9h. Soit $x_n = n + 1/2$. On utilise la minoration $x_n^{x_n} \geq n^{x_n} = \sqrt{n}n^n$:

$$\frac{x_n^{x_n}}{\lfloor x_n\rfloor^{\lfloor x_n\rfloor}} \geq \frac{\sqrt{n}n^n}{n^n} = \sqrt{n},$$

donc cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, avec $y_n = n$ on a

$$\frac{y_n^{y_n}}{\lfloor y_n\rfloor^{\lfloor y_n\rfloor}} = 1.$$

Par caractérisation séquentielle, l'expression n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

`cont15_s` **Solution 9.6** (énoncé). 1. Voir figure 10a. L'application $f\colon x \mapsto \lfloor x\rfloor + (x - \lfloor x\rfloor)^2$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur chaque intervalle $]n, n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$). Fixons à présent $n \in \mathbb{Z}$. Pour $n \leq x < n+1$, on a

$$f(x) = n + (x-n)^2,$$

donc f est continue à droite en n. Lorsque $n - 1 \leq x < n$, on a

$$f(x) = n - 1 + (x - n + 1)^2.$$

Lorsque x tend vers n par valeurs inférieures, $f(x)$ tend vers $n = f(n)$. Donc f est continue à gauche en n. Conclusion : f est continue.

2. Voir figure 10b. L'application $f\colon x \mapsto \exp(-1/x^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lorsque x tend vers 0, $-1/x^2$ tend vers $-\infty$ donc $f(x)$ tend vers 0. On peut prolonger f en posant $f(0) = 0$: la fonction obtenue est alors continue.
3. Voir figure 10c. L'application $x \mapsto \arcsin(x)/x$ est définie et continue sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$. De plus, elle est à valeurs positives donc $f\colon x \mapsto \sqrt{\arcsin(x)/x}$ est définie et continue sur le même domaine. Lorsque x tend vers 0, $\sin(x)/x$ tend vers 1 donc $x/\arcsin(x)$ tend vers 1 également. On peut prolonger f en posant $f(0) = 1$: la fonction obtenue est alors continue.
4. Voir figure 10d. L'application $f\colon x \mapsto x \ln x/(x-1)$ est définie et continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Lorsque x tend vers 0 (par valeurs supérieures), $x \ln x$ tend vers 0, et $x - 1$ tend vers -1. Donc $f(x)$ tend vers 0. Lorsque x tend vers 1,
$$f(x) = \frac{x \ln(1 + (x-1))}{x-1}$$
tend vers 1. On peut prolonger f par continuité à $[0, +\infty[$ en posant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
5. Voir figure 10e. On passe à la forme exponentielle :
$$f(x) = (x(\ln x)^2 + 1)^{1/\ln x} = \exp\left(\frac{\ln(x(\ln x)^2 + 1)}{\ln x}\right).$$
f est définie et continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Lorsque x tend vers 0, $x(\ln x)^2$ tend vers 0 donc $\ln(x(\ln(x))^2 + 1)$ tend vers 0 (par valeurs positives). Comme $\ln x$ tend vers $-\infty$, $f(x)$ converge vers 1. Lorsque x tend vers 1, on écrit
$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x(\ln x)^2 + 1)x \ln x}{x(\ln x)^2}\right).$$
Comme $x(\ln x)^2$ tend vers 0, on a
$$\frac{\ln(x(\ln x)^2 + 1)}{x(\ln x)^2} \to 1$$
donc $f(x)$ tend vers 1. On peut prolonger f en une fonction continue sur $[0, +\infty[$ en posant $f(0) = f(1) = 1$.

cont11_s **Solution 9.7** (énoncé). 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On démontre par récurrence sur n la propriété : « $f(nx) = nf(x)$ ».

Initialisation. En prenant $x = y = 0$ dans l'équation, on obtient $f(0)+f(0) = f(0)$, soit $f(0) = 0$. Au passage, comme $f(x) + f(-x) = f(0)$ pour tout x, f est impaire.

Hérédité. Si $f(nx) = nf(x)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x)$.

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Si n est positif, on sait que $f(nx) = nf(x)$. Si n est négatif, alors $-n$ est positif donc $f(-nx) = -nf(x)$. Comme f est impaire, $f(nx) = nf(x)$.
3. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Il existe deux entiers a et b tels que $q = a/b$. On a $bf(a/b) = f(ba/b) = f(a) = af(1)$, de sorte que $f(q) = qf(1)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On se donne $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe deux rationnels q_1, q_2 tels que
$$x - \varepsilon \leq q_1 \leq x \leq q_2 \leq x + \varepsilon.$$
Comme f est croissante, on a
$$f(q_1) \leq f(x) \leq f(q_2),$$
soit
$$q_1 f(1) \leq f(x) \leq q_2 f(1),$$
et donc
$$(x - \varepsilon) f(1) \leq f(x) \leq (x + \varepsilon) f(1).$$
Or cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. En prenant la limite lorsque ε tend vers 0, et d'après le théorème des gendarmes, $f(x) = x f(1)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors une suite $(q_n)_{n \geq 1}$ de rationnels qui converge vers x. Par hypothèse, f est continue en x donc la suite $(f(q_n))$ converge vers $f(x)$. Or pour tout n on a $f(q_n) = q_n f(1)$. Par unicité de la limite, $x f(1) = f(x)$.

cont14_s **Solution 9.8** (énoncé)**.** Comme f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, il existe $A < 0$ tel que
$$\forall x \leq A, f(x) \geq f(0).$$
De même, il existe $B > 0$ tel que
$$\forall x \geq B, f(x) \geq f(0).$$
Sur le segment $[A, B]$, f est une fonction continue donc elle est admet un minimum m. Comme $0 \in [A, B]$, on a $m \leq f(0)$ et donc $f(x) \geq m$ dès que $x \leq A$ ou $x \geq B$. Donc m est bien un minimum de f sur $\mathbb{R}$.

cont08_s **Solution 9.9** (énoncé)**.** Notons $g(x) = f(x) - x$. On veut montrer que g s'annule en un unique point.

Unicité. Si g s'annule en deux points $x \leq y$, on a $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Par décroissance de f,
$$x = f(x) \geq f(y) = y,$$
d'où $x = y$.

Existence. Comme f est décroissante, elle admet une limite l en $+\infty$, avec $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (théorème de la limite monotone). L'application $x \mapsto -x$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, donc
$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty, \qquad (9.1)$$
cont08:1

et de même
$$g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty. \qquad (9.2)$$
cont08:2

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(\mathbb{R})$ est un intervalle. Il contient des valeurs négatives (pour x suffisamment grand, d'après (9.1)) et des valeurs positives (pour x suffisamment petit, d'après (9.2)). Donc il contient 0, autrement dit g s'annule.

cont13_s **Solution 9.10** (énoncé)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(q_n)_{n\geq 0}$ de rationnels qui converge vers x. Comme f et g sont continues en x, on a $f(q_n) \to f(x)$ et $g(q_n) \to g(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Or $f(q_n) = g(q_n)$ pour tout n. Par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$.

cont07_s **Solution 9.11** (énoncé)**.** Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On applique le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b : tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent par f. Or f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est entier. Cela assure que $f(a) = f(b)$. Conclusion : f est constante.

De manière équivalente : comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et f est continue, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle (d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Par ailleurs, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$. Il est facile de voir qu'un intervalle inclus dans $\mathbb{Z}$ est réduit à un point, donc f est constante.

cont03_s **Solution 9.12** (énoncé)**.** Supposons qu'il existe $f\colon [0,1] \to]0,1[$ une application continue et surjective. Comme f est continue, l'image par f du segment $[0,1]$ est un segment (cela revient au même que de dire que sur le segment $[0,1]$, f est bornée et atteint ses bornes). Mais la surjectivité nous dit que $f([0,1]) =]0,1[$. C'est une contradiction.

Pour définir une application $g\colon]0,1[\to [0,1]$ continue surjective, on peut prendre par exemple la fonction affine par morceaux suivante (voir figure 11) :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1/3] \\ 3x-1 & \text{si } x \in [1/3,2/3] \\ 1 & \text{si } x \in [2/3,1[\end{cases}.$$

cont04_s **Solution 9.13** (énoncé)**.**

1. Définissons l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Alors f n'est continue en aucun rationnel (par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) et en aucun irrationnel (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Pour voir cela, le plus simple est d'utiliser la caractérisation séquentielle.

2. Définissons l'application $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = xf(x).$$

   On démontre de même que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, g est discontinue en x. En revanche, prenons une suite de réels (a_n) qui converge vers 0. On a pour tout n

$$\begin{aligned} |g(a_n)| &= |a_n f(a_n)| \\ &\leqslant |a_n|. \end{aligned}$$

   D'après le théorème des gendarmes, $g(a_n) \to g(0) = 0$. Donc g est continue en 0.

cont05_s **Solution 9.14** (énoncé)**.** Sur le segment $[0,1]$, f est continue donc elle admet un minimum $m = f(a)$ et un maximum $M = f(b)$ avec $a, b \in [0,1]$. En fait, ce sont même des extrema globaux, par 1-périodicité de f. Disons, quitte à considérer $-f$, que $a \leqslant b$. Il reste alors deux cas :

- Si $b \in \left[a, a + \frac{1}{2}\right]$, on vérifie grâce au théorème des valeurs intermédiaires que
$$f(\mathbb{R}) = f\left(\left[a, a + \frac{1}{2}\right]\right).$$
En effet, si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [m, M] = [f(a), f(b)] \subset f([a, b]) \subset f\left(\left[a, a + \frac{1}{2}\right]\right)$.
- Sinon, $b - a \geqslant 1/2$ donc $a + 1 \in \left[b, b + \frac{1}{2}\right]$. On procède alors de la même manière en se souvenant que $f(a+1) = f(a) = m$.

cont01_s **Solution 9.15** (énoncé)**.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On veut montrer que f est continue en x. Commençons par la continuité à gauche : il suffit de montrer que pour toute suite (x_n) convergeant vers x par valeurs inférieures (c'est-à-dire $x_n \leqslant x$ pour tout n, et $x_n \to x$), on a $f(x_n) \to f(x)$. Soit donc (x_n) est une telle suite. Alors, pour tout n :
$$\begin{aligned} f(x_n) &\leqslant f(x), \\ \frac{f(x_n)}{x_n} &\geqslant \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$
Ainsi
$$\frac{x_n}{x} f(x) \leqslant f(x_n) \leqslant f(x).$$
D'après le théorème des gendarmes, $f(x_n) \to f(x)$ donc f est continue à gauche.

La continuité à droite se montre de la même manière : si (x_n) est une suite convergeant vers x par valeurs supérieures, on a pour tout n
$$f(x) \leqslant f(x_n) \leqslant \frac{x_n}{x} f(x),$$
et le théorème des gendarmes permet à nouveau de conclure.

cont02_s **Solution 9.16** (énoncé)**.** Montrons d'abord que g est croissante. Si $x \leqslant y$ sont deux réels positifs, on a évidemment
$$\{f(t), t \in [0, x]\} \subset \{f(t), t \in [0, y]\}.$$
Or si A et B sont deux ensembles tels que $A \subset B$, on a $\sup A \leqslant \sup B$. Donc $g(x) \leqslant g(y)$.

Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}_+$, et montrons que g est continue en x. Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité de f en x, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall t \in [x - \alpha, x + \alpha], \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
On va montrer que
$$\forall t \in [x - \alpha, x + \alpha], \quad |g(t) - g(x)| \leq 2\varepsilon. \tag{9.3}$$ cont02:c

Cela suffira pour montrer que g est continue en x.

Remarquons d'abord que
$$g(x) = \max\left(g(x - \alpha), \sup_{[x-\alpha, x]} f\right). \tag{9.4}$$ cont02:m

En effet, si A et B sont deux ensembles, on a $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$. Ici, prendre $A = [0, x - \alpha]$ et $B = [x - \alpha, x]$.

Pour tout $t \in [x-\alpha, x]$,

$$\begin{aligned} f(t) &\leqslant f(x-\alpha) + |f(t) - f(x)| + |f(x-\alpha) - f(x)| \\ &\leqslant f(x-\alpha) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{[x-\alpha,x]} f = \sup\{f(t), t \in [x-\alpha, x]\} \leqslant f(x-\alpha) + 2\varepsilon. \tag{9.5}$$ cont02:s

En combinant (9.4) et (9.5), on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \max\left(g(x-\alpha), \sup_{[x-\alpha,x]} f\right) \\ &\leqslant \max\left(g(x-\alpha), g(x-\alpha) + 2\varepsilon\right) \\ &\leqslant g(x-\alpha) + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{9.6}$$ cont02:i

De même à droite,

$$g(x+\alpha) \leqslant g(x) + 2\varepsilon. \tag{9.7}$$ cont02:i

Il ne reste plus qu'à montrer (9.3). Soit donc $t \in [x-\alpha, x+\alpha]$.

- Si $t \in [x-\alpha, x]$, on utilise la croissance de g et (9.6) :

$$g(x) - 2\varepsilon \leqslant g(x-\alpha) \leqslant g(t) \leqslant g(x).$$

- Si $t \in [x, x+\alpha]$, on utilise la croissance de g et (9.7) :

$$g(x) \leqslant g(t) \leqslant g(x+\alpha) \leqslant g(x) + 2\varepsilon.$$

Finalement g est bien continue en x.

10 Structures algébriques

alg01_s **Solution 10.1** (énoncé)**.** On a $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}(A \cap B) = 2n - 1$. Comme $\mathrm{Card}(G) = 2n$, il existe un unique $x \in G$ tel que

$$G = A \cup B \cup \{x\}.$$

Soit $a \neq 1_G$ un élément de A et $b \neq 1_G$ un élément de B. Si $a \cdot b \in A$, alors

$$a^{-1} \cdot a \cdot b \in A,$$

d'où $b \in A \cap B$, ce qui est impossible. De même, $a \cdot b$ ne peut pas être un élément de B. Il en résulte que $a \cdot b = x$.

Soient à présent a_1, a_2 deux éléments de $A \setminus \{1_G\}$ et b un élément de $B \setminus \{1_G\}$. On a

$$a_1 \cdot b = x = a_2 \cdot b,$$

donc

$$a_1 = a_2.$$

Cela assure que A contient au plus deux éléments. Donc $n \leqslant 2$.

Exemple Donnons un exemple de groupe G à 4 éléments qui vérifie les hypothèses. On pose $G = \{0,1\}^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ muni de la loi additive modulo 2 (par exemple, $(0,1)+(1,1) = (1,0)$). Le neutre de $(G,+)$ est l'élément $(0,0)$. Posons :

— $A = \{(0,0),(1,0)\}$,

— $B = \{(0,0),(0,1)\}$.

On vérifie facilement que A et B sont des sous-groupes de G.

11 Matrices

mat01_s **Solution 11.1** (énoncé). Notons $B = A + I_n$ la matrice dont tous les coefficients sont des 1. Il est facile de vérifier que $B^2 = nB$, de sorte que

$$\begin{aligned} A^2 &= (B - I_n)^2 \\ &= B^2 - 2B + I_n \\ &= (n-2)B + I_n. \end{aligned}$$

On peut dessiner A^2 :

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & & & & \\ & \ddots & & (n-2) & \\ & & \ddots & & \\ & (n-2) & & \ddots & \\ & & & & n-1 \end{pmatrix}.$$

A vérifie en fait la relation

$$\begin{aligned} A^2 &= (n-2)B + I_n \\ &= (n-2)(A + I_n) + I_n \\ &= (n-2)A + (n-1)I_n, \end{aligned}$$

donc

$$A(A - (n-2)I_n) = (n-1)I_n.$$

On en déduit que A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A - (n-2)I_n).$$

mat02_s **Solution 11.2** (énoncé). Notons $B = A - I_n$ la matrice dont tous les coefficients sont des 1. On vérifie facilement que

$$B^2 = nB,$$

d'où

$$B^3 = nB^2 = n^2B,$$

etc. Pour tout $i > 0$, on a

$$B^i = n^{i-1}B.$$

On applique à présent la formule du binôme (B et I_n commutent) :

$$\begin{aligned} A^k &= (B+I_n)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B^i \\ &= I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} B \\ &= I_n + \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i\right] B \\ &= I_n + \frac{1}{n}\left[(1+n)^k - 1\right] B \end{aligned}$$

On peut dessiner A^k :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{(1+n)^k-1}{n} & & & \\ & \ddots & \left(\dfrac{(1+n)^k-1}{n}\right) & \\ & & \ddots & \\ & \left(\dfrac{(1+n)^k-1}{n}\right) & & \ddots \\ & & & 1+\dfrac{(1+n)^k-1}{n} \end{pmatrix}.$$

mat03_s **Solution 11.3** (énoncé)**.** On pose

$$N = A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$N^3 = 0.$$

On utilise la formule du binôme (N et I_n commutent) :

$$\begin{aligned} A^k &= (N+I_3)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i \\ &= I_3 + kN + \binom{k}{2} N^2. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à dessiner A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k(k+1)/2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

mat04_s **Solution 11.4** (énoncé). 1. On remarque que

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de carré nul, donc $(X-1)^2 \in I_A$. Si $P(X)$ est un polynôme multiple de $(X-1)^2$, disons $P(X) = (X-1)^2 Q(X)$, alors $P(A) = 0$. Ainsi

$$\left\{(X-1)^2 Q(X) \mid Q \in \mathbb{R}[X]\right\} \subset I_A.$$

On va montrer l'égalité de ces deux ensembles. Pour cela, prenons $P \in I_A$. On effectue la division euclidienne de P par $(X-1)^2$:

$$P = (X-1)^2 Q + R,$$

avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et R de degré au plus 1. Appliquons cette égalité à A : on obtient $R(A) = 0$. En écrivant $R = aX + b$, on se rend compte que cela implique $R = 0$. Ainsi P est un multiple de $(X-1)^2$.

Les mêmes arguments conduisent à $I_B = I_A$.

2. Si A et B sont semblables, il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P^{-1} B P.$$

Mais alors

$$A - I_4 = P^{-1}(B - I_4) P$$

donc $A - I_4$ et $B - I_4$ sont semblables. Or l'une est de rang 1 et l'autre de rang 2 : c'est une contradiction.

3. On définit P comme un polynôme de I_A de degré minimal (non nul). Il est alors immédiat que

$$\{PQ \mid Q \in \mathbb{R}[X]\} \subset I_A.$$

Réciproquement, si $T \in I_A$, on effectue la division euclidienne de T par P : il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$T = PQ + R,$$

et $\deg(R) < \deg(P)$. En appliquant cette égalité à A, on obtient

$$R(A) = 0,$$

donc $R \in I_A$. Mais comme P est de degré minimal dans I_A, R est le polynôme nul. Donc $T = PQ$.

mat05_s **Solution 11.5** (énoncé). On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Comme $u^{n-1} \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est alors une famille libre. En effet, soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que

$$\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x) = 0.$$

On peut appliquer u^{n-1} à cette égalité pour obtenir $\lambda_0 = 0$, puis on applique u^{n-2}, etc. Comme la famille est de cardinal n, c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Or la matrice de u dans cette base s'écrit précisément

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

mat06_s **Solution 11.6** (énoncé)**.** Il suffit de montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à A est injectif, autrement dit que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$

$$AX = 0 \implies X = 0.$$

Soit donc $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ (qu'on suppose non nul) tel que $AX = 0$. Cette égalité correspond à un système linéaire :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n = 0. \end{cases}$$

Soit i l'indice tel que $|x_i|$ est maximal. La i-ième équation du système s'écrit :

$$\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j = -a_{i,i}x_i,$$

d'où

$$\begin{aligned} |a_{i,i}x_i| &\leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}x_j| \\ &\leqslant |x_i| \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \\ &< |a_{i,i}x_i|. \end{aligned}$$

C'est une contradiction.

mat07_s **Solution 11.7** (énoncé)**.** 1. On associe à A son endomorphisme dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $j \in [\![0, n]\!]$, on pose $P = X^j \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & 0 & 1 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + jX + \binom{j}{2}X^2 + \dots + \binom{j}{n}X^n \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i \\ &= (X+1)^j. \end{aligned}$$

L'endomorphisme canoniquement associé à A et l'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X+1)$ coïncident sur une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc ils sont égaux. On en déduit que A est inversible, et que A^{-1} est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X-1)$. La matrice A^{-1} s'écrit :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \cdots & (-1)^{n+1}n \\ \vdots & 0 & 1 & -3 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left((-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} \right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ et $D_n \subset S_n$ l'ensemble des dérangements. Pour $\sigma \in S_n$, on note $F(\sigma)$ l'ensemble des points fixes de σ : c'est une partie de $[\![1,n]\!]$. S_n se partitionne de la manière suivante :

$$S_n = \bigsqcup_{E \subset [\![1,n]\!]} \{\sigma \in S_n \mid F(\sigma) = E\}. \tag{11.1}$$ mat07:pa

Or, si E est fixé, une permutation σ telle que $F(\sigma) = E$ correspond à un dérangement de $[\![1,n]\!] \setminus E$. Il y a donc $u_{n-|E|}$ telles permutations. En prenant les cardinaux dans (11.1), on obtient

$$\begin{aligned} n! &= \sum_{E \subset [\![1,n]\!]} u_{n-|E|} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{E \subset [\![1,n]\!] \\ |E|=k}} u_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k. \end{aligned}$$

3. Notons

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}.$$

Ce sont deux vecteurs colonne. D'après la question précédente,

$${}^tAU = F.$$

Trouver une expression de u_n revient à inverser ce système : on a

$$U = {}^tA^{-1}F,$$

et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} k! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}. \end{aligned}$$

Remarque : comme $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k/k! = 1/e$, la probabilité d'obtenir un dérangement en tirant une permutation aléatoire avec la loi uniforme sur S_n tend vers $1/e$ lorsque n tend vers $+\infty$.

mat08_s **Solution 11.8** (énoncé)**.** Soit r le rang de A. Par opérations sur les lignes et les colonnes, on peut transformer A en la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

qui est de rang r. Autrement dit, il existe des matrices inversibles P et Q telles que

$$A = PJ_rQ.$$

En posant $M = Q^{-1}P^{-1}$, on obtient

$$(AM)^2 = \left(PJ_rP^{-1}\right)^2 = AM,$$

de sorte que AM est la matrice d'une projection.

mat09_s **Solution 11.9** (énoncé)**.** On commence par le sens réciproque. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que AM soit une matrice nilpotente. En particulier, AM est non inversible donc $A = (AM)M^{-1}$ est non inversible.

Supposons maintenant que A est non inversible. Par opérations sur les lignes et les colonnes, on peut transformer A en la matrice

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \ddots & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

qui est nilpotente (on a $N_r^n = 0$) et de rang $r = \mathrm{rg}(A)$. Autrement dit, il existe des matrices inversibles P et Q telles que

$$A = PN_rQ.$$

En posant $M = Q^{-1}P^{-1}$, on obtient

$$(AM)^n = \left(PN_rP^{-1}\right)^n = PN_r^nP^{-1} = 0,$$

de sorte que AM est nilpotente.

mat10_s **Solution 11.10** (énoncé). 1. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [BA]_{k,k} \\ &= \operatorname{tr}(BA).\end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \lambda_x x.$$

Soit (x, y) une famille libre. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_x x, \\ f(y) &= \lambda_y y, \end{aligned}$$

et

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y).$$

Cela conduit à

$$\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y).$$

Comme la famille (x, y) est libre, on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Il est alors clair que λ_x ne dépend pas de x : autrement dit, pour tout $x \in E$ on a $f(x) = \lambda x$, donc f est une homothétie.

3. On commence par le sens réciproque. Supposons que A est semblable à une matrice M à diagonale nulle : il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P^{-1} M P.$$

En prenant la trace, on obtient

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}M)P\right) = \operatorname{tr}\left(P(P^{-1}M)\right) = \operatorname{tr}(M) = 0.$$

Dans le sens direct, supposons que $\operatorname{tr}(A) = 0$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A, et on cherche une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne les conditions suivantes sur (e_1, e_2) :

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \mu e_2, \\ u(e_2) &= \lambda e_1. \end{aligned}$$

Pour trouver une telle base, on prend un $e_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(e_1) \notin \mathrm{Vect}(e_1)$. L'existence d'un tel vecteur est assurée par la question précédente et le fait que u n'est pas une homothétie (sauf si $u = 0$). On pose alors $e_2 = u(e_1)$ de sorte que (e_1, e_2) est bien une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de u dans cette base s'écrit

$$M = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}.$$

Or comme on l'a vu, la trace est un invariant de similitude : M est donc de trace nulle et s'écrit en fait

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. On procède par récurrence sur n. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. On prend $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $u(e_1) \notin \mathrm{Vect}(e_1)$, on pose $e_2 = u(e_1)$ et on complète la famille (e_1, e_2) en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. La matrice de u dans cette nouvelle base s'écrit alors

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{array}\right).$$

La trace est invariante par similitude, donc M est de trace nulle, et B aussi. Par hypothèse de récurrence, B est semblable à une matrice à diagonale nulle N. Il en résulte que M est semblable à la matrice suivante, qui est à diagonale nulle :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & N & \\ * & & & \end{array}\right).$$

mat11_s **Solution 11.11** (énoncé). 1. Fixons i, j deux entiers. On note

$$C = AE_{i,j} = \left(c_{k,l}\right)_{1 \leqslant k,l \leqslant n}.$$

Pour simplifier, on note aussi

$$E_{i,j} = E = \left(e_{k,l}\right)_{1 \leqslant k,l \leqslant n},$$

avec

$$e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient k, l deux nouveaux indices (désormais, i, j, k, l sont donc tous fixés). On veut calculer $c_{k,l}$. On a

$$c_{k,l} = \sum_{m=1}^{n} a_{k,m} e_{m,l},$$

et presque tous les termes de cette somme sont nuls (si $m \neq i$, alors $e_{m,l} = 0$). Il ne reste que le terme en $m = i$. Donc

$$c_{k,l} = a_{k,i} e_{i,l},$$

ce qui vaut 0 sauf si $l = j$ (si $l \neq j$, alors $e_{i,l} = 0$). Donc

$$c_{k,l} = \begin{cases} a_{k,i} & \text{si } l = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut dessiner la matrice C :

$$C = AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1,i} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,i} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où la colonne non nulle est la } j\text{-ième.}$$

Conclusion : multiplier A par $E_{i,j}$ revient à prendre la i-ième colonne de A et à la mettre à la j-ième colonne, et à mettre des 0 partout ailleurs. De la même manière, faire le produit $E_{i,j}A$ revient à mettre la j-ième ligne de A sur la i-ième ligne, et à mettre des 0 partout ailleurs :

$$E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où la ligne non nulle est la } i\text{-ième.}$$

2. Soient i, j fixés. Par hypothèse, on a :

$$AE_{i,j} = E_{i,j}A,$$

autrement dit

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1,i} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,i} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{i,j}A.$$

On en déduit que pour k différent de i, le coefficient $a_{k,i}$ est nul. Comme c'est vrai pour tout i, la matrice A est diagonale. D'autre part, en regardant le coefficient à l'intersection, on voit que $a_{i,i} = a_{j,j}$. Finalement, en notant $\lambda = a_{1,1}$, on a $A = \lambda I_n$.

mat13_s **Solution 11.12** (énoncé). 1. On cherche P sous la forme $X^2 + bX + c$ (on peut toujours choisir P unitaire, quitte à le diviser par une constante). On a :

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 + bA + cI_2 \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 - b + c & -6 - 2b \\ 9 + 3b & 10 + 4b + c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ convient.

2. La division euclidienne s'écrit

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + R,$$

où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Pour faire disparaître Q, on évalue cette égalité en les racines de $P = X^2 - 3X + 2$, qui sont 1 et 2. Cela donne

$$\begin{cases} 1 = R(1), \\ 2^n = R(2). \end{cases}$$

Comme R est de degré au plus 1, il suffit de connaître sa valeur en 2 points pour le déterminer. On obtient $R = (2^n - 1)X - 2^n + 2$.

3. On évalue la division euclidienne en A :

$$\begin{aligned} A^n &= P(A)Q(A) + R(A) \\ &= R(A) \\ &= (2^n - 1)A - (2^n - 2)I_2 \\ &= \begin{pmatrix} -(2^n - 1) - (2^n - 2) & -2(2^n - 1) \\ 3(2^n - 1) & 4(2^n - 1) - (2^n - 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3 & -2^{n+1} + 2 \\ 3 \cdot 2^n - 3 & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

mat12_s **Solution 11.13** (énoncé). L'image de A est le sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes. Ce qu'on fait ci-dessous revient à effectuer des transvections sur les colonnes de A (pas de dilatation !) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} A &= \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Or ces deux derniers vecteurs forment une famille libre, donc une base de l'image de A. Au passage, on voit que A est de rang 2. Soit à présent $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \in \mathrm{Im}(A) &\iff \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = \mu \\ y - 2z = -\mu \\ z = \lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = \mu \\ y - 2z + x = 0 \\ z - x = \lambda \\ t - x = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} t - x = 0 \\ y - 2z + x = 0 \\ z - x = \lambda \\ x = \mu \end{cases}.
\end{aligned}$$

Le système est à présent échelonné en λ et μ : on a l'équivalence

$$\begin{cases} t - x = 0 \\ y - 2z + x = 0 \end{cases} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} t - x = 0 \\ y - 2z + x = 0 \\ z - x = \lambda \\ x = \mu \end{cases}.$$

Cela nous donne le système d'équations cherché.

12 Déterminants

`det01_s` **Solution 12.1** (énoncé)**.** Pour mieux voir ce qui se passe, on fait les calculs sur la matrice de dimension 5 en parallèle.

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_1$ ($k \geqslant 2$), pour obtenir des lignes (partiellement) constantes :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 2 & 0 & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-3 & \cdots & \cdots & -n+1 \end{vmatrix}.$$

Les opérations $L_k \leftarrow L_k - (k-1)L_2$ ($k \geqslant 3$) permettent d'annuler beaucoup de coefficients :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2n-4 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\Delta_5 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2n-4 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis par rapport à la dernière colonne, et on obtient finalement une matrice diagonale :

$$\Delta_5 = 4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4.2^3, \qquad \Delta_n = -(-1)^n(n-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 2n-4 & \cdots & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

`det02_s` **Solution 12.2** (énoncé)**.** Commençons par le sens indirect. On dispose de $a_1, \dots, a_n$ tels que la matrice M est inversible. Pour montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, on prend des réels λ_i tels que

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0.$$

Appliquée aux a_j, cette relation donne

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} f_1(a_1) \\ \vdots \\ f_1(a_n) \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} f_n(a_1) \\ \vdots \\ f_n(a_n) \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui est une combinaison linéaire nulle des colonnes de M. Comme M est inversible, ses colonnes forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$, et on en déduit que les λ_i sont tous nuls.

On démontre à présent le sens direct par récurrence. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété « Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre, il existe $a_1, \dots, a_n$ des réels tels que la matrice $M = (f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible ». Le cas $n = 1$ ne pose pas de problème. Supposons que la propriété est vraie au rang n, et soit $(f_1, \dots, f_{n+1})$ une famille libre. L'hypothèse de récurrence appliquée à la famille $(f_1, \dots, f_n)$ fournit des réels $a_1, \dots, a_n$ tels que la matrice

$$M_n = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix}$$

est inversible. On veut à présent montrer qu'il existe $x = a_{n+1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_n) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(a_1) & \cdots & f_n(a_n) & f_n(x) \\ f_{n+1}(a_1) & \cdots & f_{n+1}(a_n) & f_{n+1}(x) \end{pmatrix}$$

est inversible. En développant le déterminant de M par rapport à sa dernière colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \det(M_{n+1}) &= \begin{vmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_n) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(a_1) & \cdots & f_n(a_n) & f_n(x) \\ f_{n+1}(a_1) & \cdots & f_{n+1}(a_n) & f_{n+1}(x) \end{vmatrix} \\ &= \Delta_1 f_1(x) + \cdots + \Delta_{n+1} f_{n+1}(x), \end{aligned}$$

où les Δ_k sont les cofacteurs (au signe près). On remarque ici une combinaison linéaire de la famille libre $(f_1, \dots, f_{n+1})$. Or Δ_{n+1} est le déterminant de M_n, et il est supposé non nul. Donc la combinaison linéaire des f_k n'est pas nulle, autrement dit il existe x tel que M_{n+1} est inversible.

det03_s **Solution 12.3** (énoncé)**.** On commence par effectuer les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

On développe ensuite selon la première ligne :

$$\Delta_n = -2\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

Les deux déterminants sont de taille $n-1$. Le premier déterminant vaut Δ_{n-1}, et on développe le deuxième par rapport à sa première colonne :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= -2\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^n \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n-2]} \\ &= -2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.\end{aligned}$$

La suite (Δ_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $(r+1)^2 = 0$. Il existe donc deux constantes λ, μ telles que pour tout n

$$\Delta_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n.$$

Avec les conditions initiales $\Delta_1 = 0$ et $\Delta_2 = -1$, on parvient à

$$\Delta_n = (-1)^{n-1}(n-1).$$

det04_s **Solution 12.4** (énoncé).

1. En prenant $B = 0$, on obtient :

   $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(0) = f(A)f(0).$$

   Si $f(0) \neq 0$, alors f est constante et égale à 1 : contradiction. Donc $f(0) = 0$. En prenant $B = I_n$, on obtient :

   $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = f(A)f(I_n).$$

   Comme f n'est pas constante, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(A) \neq 0$. En divisant par $f(A)$, on obtient alors $f(I_n) = 1$.
2. On a

   $$\begin{aligned} f(A)f(A^{-1}) &= f(AA^{-1}) \\ &= f(I_n) \\ &= 1, \end{aligned}$$

   donc $f(A) \neq 0$.
3. Soit r le rang de A : c'est un entier compris entre 0 et $n-1$. On définit la matrice R par :

   $$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

R est de rang $n-1$, et

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & (0) & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang $n-2$. En continuant à élever R aux puissances supérieures, la diagonale de 1 continue à monter : en particulier, $N = R^{n-r}$ est nilpotente et de rang r. On a $f(N)^n = f(N^n) = 0$, donc $f(N) = 0$. Comme A et N sont de même rang, elles sont équivalentes : il existe P, Q deux matrices inversibles telles que

$$A = PNQ.$$

Ainsi

$$f(A) = f(P)f(N)f(Q) = 0.$$

4. $$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   est une transvection, donc est semblable à M. Il existe donc P inversible telle que $M^2 = PMP^{-1}$. Ainsi $f(M)^2 = f(P)f(M)f(P)^{-1} = f(M)$, d'où $f(M) = 1$.

5. Si $T = I_n + \lambda E_{i,j}$, on peut effectuer un changement de base de sorte que T est semblable à

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, T^2 est semblable à

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

   qui est de nouveau une transvection donc semblable à T. Ainsi il existe P inversible telle que $T^2 = PTP^{-1}$, donc $f(T) = 1$.

6. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, on effectue l'algorithme de Gauss pour se ramener à la matrice

   $$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det(A) \end{pmatrix}.$$

En termes matriciels, A est égal à un produit de transvections multipliée par cette dilatation : on a $A = T_1 \cdots T_k D$. Comme $f(T_i) = 1$, on en déduit

$$f(A) = f\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det(A) \end{pmatrix}.$$

Si A est non inversible, le résultat est encore vrai car $f(A) = 0$.

det05_s **Solution 12.5** (énoncé). Par hypothèse, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$, ou encore $PA = BP$. En notant respectivement R et S les parties réelle et imaginaire de P, cela donne

$$\begin{cases} RA = BR, \\ SA = BS. \end{cases}$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$(R + xS)A = B(R + xS).$$

Il suffit à présent de trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $R + xS$ est inversible. Pour cela, considérons l'application $\varphi\colon x \mapsto \det(R + xS)$. Le développement sur le groupe symétrique s'écrit

$$\varphi(x) = \det(R + xS) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)(R_{1,\sigma(1)} + xS_{1,\sigma(1)}) \cdots (R_{n,\sigma(n)} + xS_{n,\sigma(n)}).$$

C'est une somme de $n!$ polynômes en x, de degré n : c'est donc encore un polynôme (de degré au plus n). Comme $\varphi(i) = \det(P) \neq 0$, φ n'est pas le polynôme nul donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $R + xS$ est inversible.

det06_s **Solution 12.6** (énoncé). Considérons l'application $\varphi\colon x \mapsto \det(A + xB)$. Le développement sur le groupe symétrique s'écrit

$$\varphi(x) = \det(A + xB) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)(A_{1,\sigma(1)} + xB_{1,\sigma(1)}) \cdots (A_{n,\sigma(n)} + xB_{n,\sigma(n)}).$$

C'est une somme de $n!$ polynômes en x, de degré n : c'est donc encore un polynôme (de degré au plus n). En particulier, φ est continue en 0. Comme $\varphi(0) \neq 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad \varphi(x) \neq 0.$$

det07_s **Solution 12.7** (énoncé).

1. L'ensemble $\{mv_1 + nv_2, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ forme un *réseau*[4] de $\mathbb{R}^2$. On veut dénombrer

$$X = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \|mv_1 + nv_2\|_\infty \leqslant r\},$$

qui est l'intersection du réseau avec

$$C_r = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_\infty \leqslant r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant r \text{ et } |y| \leqslant r\},$$

4. Grossièrement, cela veut dire que la somme et la différence de deux éléments du réseau sont encore dans le réseau.

un carré centré en $(0,0)$ et de côté $2r$. Pour cela, on définit les parallélogrammes suivants :

$$P_{m,n} = \{xv_1 + yv_2 \mid x \in [m, m+1[, y \in [n, n+1[\},$$

où le couple (m,n) décrit $\mathbb{Z}^2$. Les $P_{m,n}$ forment une partition de $\mathbb{R}^2$. Ils sont tous identiques à translation près, et leur aire vaut

$$\text{Aire}(P_{m,n}) = |\det(v_1, v_2)|.$$

Considérons alors

$$P = \bigcup_{(m,n)\in X} P_{m,n}.$$

C'est une partie de $\mathbb{R}^2$ et son aire vaut

$$\text{Aire}(P) = \text{Card}(X) \times |\det(v_1, v_2)|.$$

Voir la figure 12.
Il ne reste donc plus qu'à évaluer l'aire de P. Pour r assez grand, P ressemble à C_r mais il n'y a pas inclusion dans un sens comme dans l'autre. Posons

$$\lambda = \|v_1\|_\infty + \|v_2\|_\infty.$$

On peut alors vérifier que

$$C_{r-\lambda} \subset P \subset C_{r+\lambda}.$$

Voir la figure 13. En prenant les aires, il en résulte que

$$4(r-\lambda)^2 \leqslant \text{Card}(X) \times |\det(v_1, v_2)| \leqslant 4(r+\lambda)^2.$$

On obtient immédiatement l'équivalent lorsque $r \to +\infty$:

$$\text{Card}(X) \sim \frac{4r^2}{|\det(v_1, v_2)|}. \tag{12.1}$$ det07:1

2. Si T est le triangle JKL, on note $v_1 = \overrightarrow{JK}$ et $v_2 = \overrightarrow{JL}$: ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières. On va compter le nombre de points entiers (à coordonnées entières) dans $P_{0,0}$. Notons

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{xv_1 + yv_2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x+y < 1\},\\
A_2 &= \{xv_1 + yv_2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x+y > 1\},\\
B_1 &= \{xv_1 \mid 0 \leqslant x < 1\} = [JK[\,,\\
B_2 &= \{yv_2 \mid 0 \leqslant y < 1\} = [JL[\,,\\
B_3 &= \{xv_1 + yv_2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x+y = 1\} =]KL[\,.
\end{aligned}$$

B_1, B_2 et B_3 sont les bords du triangle T (privés des deux points K et L), A_1 est l'intérieur du triangle et A_2 est l'intérieur du triangle symétrique par rapport au centre du parallélogramme. Il est assez clair (voir figure 14) que

$$P_{0,0} = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3.$$

Pour compter le nombre de points entiers dans $P_{0,0}$, il suffit donc de compter le nombre de points entiers dans chacune de ces parties. Allons-y :

- Le nombre de points entiers dans A_1 vaut a.
- Le nombre de points entiers dans A_2 vaut également a. En effet, si $xv_1 + yv_2$ est un point entier de A_1, le point symétrique $(1-x)v_1 + (1-y)v_2$ est dans A_2, et c'est encore un point entier. La symétrie par rapport au centre du parallélogramme est en fait une bijection entre les points entiers de A_1 et les points entiers de A_2.
- $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ correspond au bord du triangle T, privé des deux points K et L. Le nombre de points entiers sur cette partie est donc $b-2$.

Conclusion : le nombre de points entiers dans $P_{0,0}$ est égal à

$$\mathrm{Card}(P_{0,0} \cap \mathbb{Z}^2) = 2a + b - 2.$$

Évidemment, tout cela est invariant par des translations d'un vecteur entier. Si on se donne $r \geqslant 0$, on définit X et P comme avant et on a

$$\mathrm{Card}(P \cap \mathbb{Z}^2) = (2a+b-2)\,\mathrm{Card}(X). \tag{12.2}$$ det07:2

Or, de la relation

$$C_{r-\lambda} \subset P \subset C_{r+\lambda},$$

on obtient

$$C_{r-\lambda} \cap \mathbb{Z}^2 \subset P \cap \mathbb{Z}^2 \subset C_{r+\lambda} \cap \mathbb{Z}^2,$$

donc en prenant les cardinaux

$$\lfloor 1 + 2(r-\lambda) \rfloor^2 \leqslant \mathrm{Card}(P \cap \mathbb{Z}^2) \leqslant \lfloor 1 + 2(r+\lambda) \rfloor^2,$$

ce qui donne lorsque r tend vers $+\infty$:

$$\mathrm{Card}(P \cap \mathbb{Z}^2) \sim 4r^2. \tag{12.3}$$ det07:3

Les relations (12.1), (12.2) et (12.3) donnent alors le résultat :

$$|\det(v_1, v_2)| = 2a + b - 2.$$

Comme l'aire du triangle vaut la moitié de ce déterminant, on a obtenu ce qu'on voulait.

det08_s **Solution 12.8** (énoncé). 1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons l'application $\theta \colon \mathbb{R}_n[X] \to E$ définie par $\theta(P) = (x \mapsto P(x)e^x)$. Il est facile de voir que θ est une application linéaire. Comme l'image de θ est V, V est un espace vectoriel. Par ailleurs, θ est injective donc elle réalise un isomorhpisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et V : ces deux espaces sont de même dimension, à savoir $n+1$.

2. φ est bien définie : si P est de degré au plus n, la dérivée de $P \cdot \exp$ est $(P + P') \cdot \exp$ et $P + P'$ est encore de degré au plus n. Il est facile de voir que φ est linéaire, donc c'est un endomorphisme de V.

   Comme θ est un isomorphisme, une base de V est donnée par l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par θ :

   $$(f_0, f_1, \dots, f_n) = (\theta(1), \theta(X), \dots, \theta(X^n)),$$

   où

   $$f_k = \theta(X^k) \colon x \mapsto x^k e^x.$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'image des vecteurs de la base : pour tout x,

$$\begin{aligned}\varphi(f_k)(x) &= f_k'(x)\\ &= (x^k + kx^{k-1})e^x\\ &= f_k(x) + kf_{k-1}(x).\end{aligned}$$

La matrice de φ dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ s'écrit

$$\mathrm{Mat}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & n\\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, donc son déterminant vaut le produit de ses coefficients diagonaux, à savoir 1.

det09_s **Solution 12.9** (énoncé). 1. On fait des opérations sur les lignes, et on développe par rapport aux colonnes :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & a & a & a\\ a & b & b & b\\ a & b & c & c\\ a & b & c & d\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a & a & a\\ 0 & b-a & b-a & b-a\\ 0 & b-a & c-a & c-a\\ 0 & b-a & c-a & d-a\end{vmatrix}\\ &= a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a\\ b-a & c-a & c-a\\ b-a & c-a & d-a\end{vmatrix}\\ &= a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a\\ 0 & c-b & c-b\\ 0 & c-b & d-b\end{vmatrix}\\ &= a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b\\ c-b & d-b\end{vmatrix}\\ &= a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b\\ 0 & d-c\end{vmatrix}\\ &= a(b-a)(c-b)(d-c).\end{aligned}$$

2. Notons $f(a_1, \dots, a_n)$ le déterminant de la matrice $(a_{\min(i,j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On utilise l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$: « Pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $f(a_1, \dots, a_n) = a_1(a_2-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})$. » Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie, alors en utilisant des transvections sur les lignes et en

développant par rapport à la première colonne :

$$
\begin{aligned}
f(a_1,\dots,a_n) &= \begin{vmatrix}
a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \\
\vdots & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 \\
\vdots & \vdots & a_3 & \cdots & \cdots & a_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \\
0 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 - a_1 \\
\vdots & \vdots & a_3 - a_1 & \cdots & \cdots & a_3 - a_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1
\end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix}
a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 - a_1 \\
\vdots & a_3 - a_1 & \cdots & \cdots & a_3 - a_1 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1
\end{vmatrix} \\
&= a_1 f(a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1).
\end{aligned}
$$

On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence, qui nous permet de calculer $f(a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1)$:

$$
\begin{aligned}
f(a_1,\dots,a_n) &= a_1(a_2 - a_1)[(a_3 - a_1) - (a_2 - a_1)]\cdots[(a_n - a_1) - (a_2 - a_1)] \\
&= a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_1).
\end{aligned}
$$

3. On applique sur la matrice des permutations sur les lignes et les colonnes. Attention, le signe du déterminant peut changer, selon la signature de la permutation. Définissons $\sigma = (1, n) \circ (2, n-1) \circ \cdots \circ (\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil + 1)$: c'est la permutation qui transforme $(1, \dots, n)$ en $(n, \dots, 1)$ (regarder ce que ça donne pour $n = 2, 3, 4, 5$). Sa signature est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$. En fait, cela ne nous sera pas utile, parce qu'on va appliquer deux fois σ : on obtient un facteur $\varepsilon(\sigma)^2 = (\pm 1)^2 = 1$. Appliquons successivement la permutation

σ sur les colonnes puis sur les lignes :

$$\begin{aligned}
\det((a_{\max(i,j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&= \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_n & \cdots & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_3 & a_2 & a_2 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_3 & a_3 & a_3 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix} \\
&= \varepsilon(\sigma)^2 \begin{vmatrix} a_n & \cdots & \cdots & a_n & a_n & a_n \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & a_3 & a_3 & a_3 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_3 & a_2 & a_2 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1) \\
&= a_n(a_{n-1} - a_n) \cdots (a_1 - a_2).
\end{aligned}$$

det10_s **Solution 12.10** (énoncé)**.** On fait (par exemple) des transvections sur les lignes :

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & & & (b+x) \\ & \lambda_2 + x & & \\ & & \ddots & \\ (a+x) & & & \lambda_n + x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & b+x & \cdots & \cdots & b+x \\ a - \lambda_1 & \lambda_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a - \lambda_1 & a-b & \cdots & a-b & \lambda_n - b \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

En développant par rapport à première ligne, on voit que $\Delta(x)$ est la somme de termes de la forme $(\lambda_1 + x)*$ ou $(b+x)*$ (où $*$ désigne un terme qui ne dépend pas de x). C'est donc une application affine en x. On en déduit qu'il existe $t, s \in \mathbb{C}$ tels que $\forall x \in \mathbb{C}, \Delta(x) = t + sx$. Or on sait calculer le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) :

$$\begin{aligned} t - as &= \Delta(-a) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - a & & & (b-a) \\ & \lambda_2 - a & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n - a \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - a), \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} t - bs &= \Delta(-b) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - b & & & (0) \\ & \lambda_2 - b & & \\ & & \ddots & \\ (a-b) & & & \lambda_n - b \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - b). \end{aligned}$$

On connaît maintenant complètement l'application Δ (car elle est affine et qu'on connaît sa valeur en deux points distincts). Cela nous permet de calculer $\det A$:

$$\begin{aligned} \det A &= \Delta(0) \\ &= t \\ &= \frac{at - bt}{a - b} \\ &= \frac{at - abs - bt + abs}{a - b} \\ &= \frac{a(t - bs) - b(t - as)}{a - b} \\ &= \frac{a\Delta(-b) - b\Delta(-a)}{a - b} \\ &= \frac{a\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a)}{a - b}. \end{aligned}$$

13 Développements limités

dl05_s **Solution 13.1** (énoncé). 1. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [-\delta, \delta], |f'(x)| \leq \varepsilon x^2.$$

Prenons alors $x \in]0, \delta]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [0, x]$ tel que $f'(c) = (f(x) - f(0))/x = f(x)/x$. Or c appartient au segment $[-\delta, \delta]$ donc

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \varepsilon x^2,$$

soit $|f(x)| \leq \varepsilon x^3$. On procède de même si $x \in [-\delta, 0[$.

2. On pose
$$g(x) = f(x) - f(0) - \left(ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3\right).$$
C'est une fonction dérivable qui vérifie $g(0) = 0$ d'une part, et d'autre part $g'(x) = f'(x) - (a + bx + cx^2) = o(x^2)$ lorsque x tend vers 0. D'après la question précédente, $g(x) = o(x^3)$, ce qu'on peut réécrire en
$$f(x) = f(0) + ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + o(x^3).$$
3. De la même manière, si $f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$ alors f admet le développement limité suivant :
$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$
4. On sait que $\tan(x) = o(1)$, donc $\tan'(x) = 1 + o(1)^2 = 1 + o(1)$. En intégrant ce développement limité, on obtient
$$\tan x = x + o(x).$$
On recommence : $\tan'(x) = 1 + (x + o(x))^2 = 1 + x^2 + o(x^2)$ donc en intégrant
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$
Une dernière fois : $\tan'(x) = 1 + (x + x^3/3 + o(x^3))^2 = 1 + x^2 + 2x^4/3 + o(x^4)$ donc en intégrant
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$
5. Comme f' est dérivable en x de nombre dérivé $f''(x)$, on a
$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = f''(x),$$
ce qu'on peut réécrire comme
$$f'(x+h) = f'(x) + hf''(x) + o(h).$$
En intégrant ce développement limité, on obtient
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2).$$

dl01_s **Solution 13.2** (énoncé). On rappelle les développements lorsque $x \to 0$:
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

On développe à l'ordre 3 au numérateur, et à l'ordre 1 au dénominateur :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} &= \frac{\sinh^2 x - \sin^2 x}{\sin^2(x)\sinh^2(x)} \\
&= \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{(x+o(x))^2(x+o(x))^2} \\
&= \frac{\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} \\
&= \frac{2}{3} + o(1).
\end{aligned}$$

Pour obtenir les termes suivants du DL, il faut développer sinh et sin à un ordre plus grand. On passe à l'ordre 5 au numérateur, et 3 au dénominateur.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} &= \frac{\sinh^2 x - \sin^2 x}{\sin^2(x)\sinh^2(x)} \\
&= \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2}{\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} \\
&= \frac{\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^6}{36} + o(x^6)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^6}{36} + o(x^6)\right)}{\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)} \\
&= \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^6)}{x^4 + o(x^6)} \\
&= \left(\frac{2}{3} + o(x^2)\right)\frac{1}{1 + o(x^2)} \\
&= \left(\frac{2}{3} + o(x^2)\right)(1 + o(x^2)) \\
&= \frac{2}{3} + o(x^2).
\end{aligned}$$

On est maintenant à l'ordre 2. Comme j'ai du temps à perdre, voici l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} &= \frac{\sinh^2 x - \sin^2 x}{\sin^2(x)\sinh^2(x)} \\
&= \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)\right)^2}{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2} \\
&= \frac{\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + \frac{x^8}{2520} + \frac{x^8}{360} + o(x^8)\right)}{\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)\right)\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)\right)} \\
&\quad - \frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 - \frac{x^8}{2520} - \frac{x^8}{360} + o(x^8)\right)}{\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)\right)\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)\right)} \\
&= \frac{\frac{2}{3}x^4 + \frac{x^8}{1260} + \frac{x^8}{180} + o(x^8)}{x^4 + \frac{4}{45}x^8 - \frac{1}{9}x^8 + o(x^8)} \\
&= \frac{\frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{315}x^8 + o(x^8)}{x^4 - \frac{1}{45}x^8 + o(x^8)} \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{315}x^4 + o(x^4)\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{45}x^4 + o(x^4)} \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{315}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{1}{45}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{4}{189}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

dl03_s **Solution 13.3** (énoncé)**.** On met tout au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 - \sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2} \\
&= \frac{x^2(x^2 - \sin^2 x) - 3(\sin x - x\cos x)^2}{x^2(\sin x - x\cos x)^2}.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
x^2(x^2 - \sin^2 x) &= x^2\left(x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2\right) \\
&= x^2\left(x^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)\right) \\
&= x^2\left(\frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) \\
&= \frac{x^6}{3} + o(x^6),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
3(\sin x - x\cos x)^2 &= 3\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{x^6}{9} + o(x^6)\right) \\
&= \frac{x^6}{3} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Les deux développements au numérateur s'annulent, il faut donc développer à un ordre supérieur en utilisant :

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Allons-y :

$$\begin{aligned}
x^2(x^2 - \sin^2 x) &= x^2\left(x^2 - \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big)^2\right) \\
&= x^2\left(x^2 - \Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^6}{60} + o(x^6)\Big)\right) \\
&= x^2\left(\frac{x^4}{3} - \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)\right) \\
&= \frac{x^6}{3} - \frac{2}{45}x^8 + o(x^8),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
3(\sin x - x\cos x)^2 &= 3\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5)\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{x^6}{9} - \frac{x^8}{45} + o(x^8)\right) \\
&= \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{15} + o(x^8).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a déjà calculé

$$\begin{aligned}
x^2(\sin x - x\cos x)^2 &= x^2\left(\frac{x^6}{9} + o(x^6)\right) \\
&= \frac{x^8}{9} + o(x^8).
\end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2(x^2-\sin^2 x) - 3(\sin x - x\cos x)^2}{x^2(\sin x - x\cos x)^2} \\
&= \frac{\frac{x^6}{3} - \frac{2}{45}x^8 + o(x^8) - \left(\frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{15} + o(x^8)\right)}{\frac{x^8}{9} + o(x^8)} \\
&= \frac{\frac{1}{45}x^8 + o(x^8)}{\frac{x^8}{9} + o(x^8)} \\
&= \frac{\frac{1}{5} + o(1)}{1 + o(1)} \\
&= \frac{1}{5} + o(1).
\end{aligned}$$

Donc f tend vers $1/5$ en 0.

dl06_s **Solution 13.4** (énoncé). 1. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) &= \ln\Big((1+x^2)(1-x+x^2-x^3+o(x^3))\Big) \\
&= \ln(1-x+2x^2-2x^3+o(x^3)) \\
&= \ln(1+u) \\
&= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \\
&= (-x+2x^2-2x^3+o(x^3)) - \frac{1}{2}(x^2-4x^3+o(x^3)) + \frac{1}{3}(-x^3+o(x^3)) + o(x^3) \\
&= -x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),
\end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $u = -x + 2x^2 - 2x^3 + o(x^3)$.

2. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sin x) &= \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= \ln(1+u) \\
&= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + o(x^3)\right) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).
\end{aligned}$$

On a fait le changement de variable $u = \sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$.

3. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}\cos(\ln(1+x)) &= \cos\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\\ &= \cos(u)\\ &= 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

On a fait le changement de variable $u = \ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$. Attention, on a utilisé le développement du cosinus à l'ordre 3 : l'ordre 2 ne suffisait pas.

4. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}\sqrt{3+\cos x} &= \sqrt{4 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}\\ &= 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{8} + o(x^3)}\\ &= 2\sqrt{1+u}\\ &= 2\left(1 + \frac{u}{2} + o(u)\right)\\ &= 2 + \left(-\frac{x^2}{8} + o(x^3)\right) + o(x^2)\\ &= 2 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\\ &= 2 - \frac{x^2}{8} + o(x^3). && \text{(parité de la fonction)}\end{aligned}$$

On a fait le changement de variable $u = -x^2/8 + o(x^3)$. Dans la dernière ligne, on utilise le fait que la fonction est paire, donc les coefficients d'ordre impair du développement limité sont nuls. Remarquer également qu'il fallait développer le cosinus jusqu'à l'ordre 3.

5. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}(1+x)^{1+x} &= \exp((1+x)\ln(1+x))\\ &= \exp\left((1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)\\ &= \exp\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\\ &= \exp(u)\\ &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\\ &= 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2)\right) + o(x^2)\\ &= 1 + x + x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

On a utilisé le changement de variable $u = x + x^2/2 + o(x^2)$.

6. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}\frac{\arctan x}{\tan x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\frac{1}{1+u} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)(1 - u + o(u)) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{2x^2}{3} + o(x^2).\end{aligned}$$

On a utilisé le changement de variable $u = x^2/3 + o(x^2)$.

7. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{4} - \frac{\sqrt{2}x^3}{12} + o(x^3).\end{aligned}$$

8. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} &= \ln(1+x)\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3))^2 \\ &= x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^3)) \\ &= x\left(1 - \frac{5x}{2} + \frac{13x^2}{3} - \frac{77x^3}{12} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{5x^2}{2} + \frac{13x^3}{3} - \frac{77x^4}{12} + o(x^4)\end{aligned}$$

`dl07_s` **Solution 13.5** (énoncé)**.** On rappelle les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\sinh(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+o(\sqrt{x})) \\ &= \frac{1}{2}+o(1). \end{aligned}$$

D'après le théorème de limite de la dérivée, f est dérivable en 0 de nombre dérivé $f'(0) = \lim_0 f' = 1/2$. Ainsi, f' est continue en 0 donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{4x}\cosh(\sqrt{x}) - \frac{1}{4x^{3/2}}\sinh(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{4x}\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right) - \frac{1}{4x^{3/2}}\left(\sqrt{x}+\frac{x^{3/2}}{6}+o(x^{3/2})\right) \\ &= \frac{1}{12}+o(1). \end{aligned}$$

En appliquant une nouvelle fois le théorème de limite de la dérivée, on voit que f' est dérivable en 0 de nombre dérivé $f''(0) = 1/12$. Donc f'' est continue en 0 et f est de classe $\mathcal{C}^2$.

dl02_s **Solution 13.6** (énoncé)**.** On montrera d'abord que f se prolonge par continuité en 0, puis que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$. Passons au log :

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right).$$

Pour déterminer la limite de f en 0, on fait des développements limités successifs. On a :

$$\begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \\ &= 1+o(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &= \ln\big(1+(\cos x-1)\big) \\ &= \ln(1+o(x)) \\ &= o(x), \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x}o(x)\right) \\ &= \exp(o(1)) \\ &= 1+o(1). \end{aligned}$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$. On appelle encore f la fonction prolongée en 0. Montrons à présent que le prolongement est $\mathcal{C}^1$. Pour cela, on utilise le théorème de la limite de la dérivée. On a, pour tout $x \in]-\pi/2,\pi/2[\setminus \{0\}$,

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)+\frac{-\sin x}{x\cos x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right).$$

Or, lorsque $x \to 0$:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos x) = -\dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = \dfrac{1}{2}+o(1) \to \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{-\sin x}{x\cos x} \to -1, \\ \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(\cos x)\right) \to 1. \end{cases}$$

Donc

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

D'après le théorème de limite de la dérivée, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et $f'(0) = -1/2$.

dl04_s **Solution 13.7** (énoncé). 1. Lorsque $x \to 0$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

En passant au carré on obtient

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)} \\ &= \frac{x^2 - x^2 + x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{1/3 + o(1)}{1 + o(1)} \\ &\to \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Comme le segment $[0, 1]$ est stable par la fonction sinus, on a $u_n \in [0, 1]$ pour tout n. L'inégalité $\sin(x) \leqslant x$ valable pour $x \in [0, 1]$ montre de plus que la suite (u_n) est décroissante. Elle converge donc vers une limite $l \in [0, 1]$. Par continuité de la fonction sinus,
$$\sin(u_n) \to \sin(l)$$
mais également
$$\sin(u_n) = u_{n+1} \to l.$$
Par unicité de la limite, $\sin(l) = l$. Or le seul point fixe de sin est 0 : finalement, $u_n \to 0$. Ainsi,
$$f(u_n) = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \to \frac{1}{3}.$$
D'après le théorème de Cesàro, la suite de terme général
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u_k)$$

tend également vers 1/3. Or c'est une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2}\right).\end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{1}{nu_n^2} \to \frac{1}{3},$$

d'où on déduit l'équivalent

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

14 Dérivation

der01_s **Solution 14.1** (énoncé). Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers 0. En posant $f(0)=0$, on étend donc f à une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, f est dérivable en x et

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x^2-2(x-1)x}{x^4}\exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)\\ &= \frac{2-x}{x^3}\exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi $f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

der08_s **Solution 14.2** (énoncé).

1. Par définition de la limite, il existe $A>0$ tel que $\forall c > A$,

$$|f'(c)| \leq \varepsilon.$$

Soit à présent $x > A$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [x, A]$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(A)}{x-A}.$$

La majoration précédente donne le résultat.

2. Pour tout $x > A$,

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x)-f(A)+f(A)| \\ &\leq |f(x)-f(A)|+|f(A)| && \text{(inégalité triangulaire)}\\ &\leq \varepsilon|x-A|+|f(A)| && \text{(question précédente)}\\ &\leq \varepsilon|x|+|f(A)|.\end{aligned}$$

3. Comme $f(A)/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il existe $A'>0$ tel que $\forall x > A'$, $|f(A)/x| \leq \varepsilon$. Alors dès que $x \geq \max(A, A')$ on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &\leq \varepsilon + \left|\frac{f(A)}{x}\right|\\ &\leq \varepsilon+\varepsilon\\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ce raisonnement est valable pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $f(x)/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

der09_s **Solution 14.3** (énoncé). Les graphes de f_0,f_1,f_2,f_3 sont représentés à la figure 15.

Pour tout $n \geq 1$, définissons $x_n = 1/(2n\pi)$ et $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$. Les suites (x_n) et (y_n) convergent vers 0 mais $\sin(1/x_n) \to 0$ et $\sin(1/y_n) \to 1$. Cela montre que f_0 n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Pour tout $x \neq 0$, on a $|x\sin(1/x)| \leq |x|$. D'après le théorème des gendarmes, $x\sin(1/x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc on peut prolonger f_1 par continuité en posant $f_1(0) = 0$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right) = f_0(x).$$

Or cette quantité n'a pas de limite lorsque x tend vers 0, donc f_1 n'est pas dérivable en 0.

f_2 se prolonge par continuité en posant $f_2(0) = 0$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = f_1(x).$$

Comme on l'a vu, f_1 tend vers 0 en 0 donc f_2 est dérivable en 0 de nombre dérivé $f_2'(0) = 0$. Or pour tout $x \neq 0$,

$$f_2'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme $x \mapsto 2x\sin(1/x)$ converge en 0 et $x \mapsto \cos(1/x)$ diverge en 0, f_2' n'a pas de limite en 0 donc f_2 n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

f_3 se prolonge par continuité en posant $f_3(0) = 0$. f_3 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}|f_3'(x)| &= \left|3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \\ &\leq 3|x|^2 + |x|.\end{aligned}$$

Donc f_3' tend vers 0 en 0. D'après le théorème de limite de la dérivée, f_3 est dérivable en 0 de nombre dérivé $f_3'(0) = 0$. Cela montre également que f_3' est continue en 0, donc f_3 est de classe $\mathcal{C}^1$.

der12_s **Solution 14.4** (énoncé). Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur cet intervalle. Supposons de plus f injective. Elle est alors strictement monotone sur $\mathbb{R}$, mais par hypothèse ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont égales, d'où une contradiction. f n'est donc pas injective, et il existe deux réels $a < b$ tels que $f(a) = f(b)$. D'après le théorème de Rolle appliqué au segment $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.

der07_s **Solution 14.5** (énoncé). On définit la fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\varphi(x) = \exp(x + ix)$. Alors φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= (1+i)^n\exp(x+ix) \\ &= \left(\sqrt{2}\exp(i\pi/4)\right)^n\exp(x+ix) \\ &= 2^{n/2}\exp(x)\exp(ix + ni\pi/4).\end{aligned}$$

En prenant les parties réelles, on obtient

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= (\operatorname{Re}\varphi)^{(n)}(x) \\ &= \operatorname{Re}(\varphi^{(n)}(x)) \\ &= 2^{n/2}\exp(x)\cos(x + n\pi/4).\end{aligned}$$

der11_s **Solution 14.6** (énoncé)**.** Comme a est un maximum local de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall h \in [-\delta, \delta], f(a+h) \leq f(a).$$

Dès lors, pour tout $h \in [0, \delta]$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0.$$

En prenant la limite lorsque h tend vers 0 par valeurs positives, on obtient que $f'(a) \leq 0$. De la même manière, pour tout $h \in [-\delta, 0]$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

En prenant la limite lorsque h tend vers 0 par valeurs négatives, on obtient $f'(a) \geq 0$. Finalement $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse : prendre $f(x) = x^3$ et $a = 0$.

Supposons à présent que f est deux fois dérivable en a, avec $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$. Lorsque h tend vers 0,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2),$$

ou encore

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{2}(f''(a) + o(1)).$$

Comme $f''(a) + o(1)$ tend vers $f''(a)$ qui est strictement négatif, $f(a+h) - f(a)$ est négatif si h est suffisamment petit. Donc a est un maximum local de f.

der10_s **Solution 14.7** (énoncé)**.** Lorsque x tend vers 0, $-1/x^2$ tend vers $-\infty$ donc $f(x)$ tend vers 0. On étend donc f par continuité en posant $f(0) = 0$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et pour tout $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ f''(x) &= \frac{4 - 6x^2}{x^6} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ f^{(3)}(x) &= \frac{24x^4 - 36x^2 + 8}{x^9} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \end{aligned}$$

etc. On montre sans peine par récurrence que pour tout $n \geq 0$, il existe une fraction rationnelle F_n telle que pour tout $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = F_n(x) \exp(-1/x^2)$. Il en résulte que $f^{(n)}$ tend vers 0 en 0. Montrons alors par récurrence sur n la proposition $\mathcal{P}_n$: « f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ ».

Initialisation. Le prolongement de f est une fonction continue, donc de classe $\mathcal{C}^0$.

Hérédité. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour un certain n. Alors $f^{(n)}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $f^{(n+1)}$ tend vers 0 en 0. D'après le théorème de limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0, de nombre dérivé $f^{(n+1)}(0) = 0$; cela montre également que $f^{(n+1)}$ est continue en 0 donc f est bien de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Finalement f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout n, le développement limité à l'ordre n de f est

$$f(x) = o(x^n).$$

der03_s **Solution 14.8** (énoncé). f est bornée car $f^2 \leqslant 1$. De plus, $(1+f')^2 \leqslant 1$ donc f' est négative et f est décroissante. Ces deux remarques permettent de montrer que f admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$.

Supposons, par l'absurde, que $\lim\limits_{+\infty} f < 0$. Par définition, il existe alors $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que

$$\forall x \geqslant A, \quad f(x) \leqslant -\varepsilon.$$

Alors pour $x \geqslant A$,

$$f'(x) \leqslant \sqrt{1-\varepsilon^2} - 1,$$

et cela implique que $f(x) \to -\infty$ ce qui est absurde.

De la même manière, si $\lim\limits_{-\infty} f > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que

$$\forall x \leqslant -A, \quad f(x) \geqslant \varepsilon.$$

Alors pour $x \leqslant -A$,

$$f'(x) \leqslant \sqrt{1-\varepsilon^2} - 1,$$

et donc lorsque $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$ ce qui est absurde.

Finalement $\lim\limits_{-\infty} f \leqslant 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f \geqslant 0$. Comme f est décroissante, cela permet de conclure que f est nulle.

der04_s **Solution 14.9** (énoncé). Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle admet un maximum $M = f(a)$. Si a vaut 0 ou 1, alors $f(a) = 0$. Sinon, $f''(a) \leqslant 0$, donc $f(a) \leqslant 0$. Dans tous les cas on a $f(a) \leqslant 0$ ce qui montre que f est négative car $f(a)$ est le maximum de f.

der02_s **Solution 14.10** (énoncé).

1. L'application $f \colon x \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ satisfait aux conditions. En effet, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\cos(x^2)x - \sin(x^2)}{x^2} \\ &= 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}, \end{aligned}$$

donc f' diverge en $+\infty$.

2. La suite $(f(nh))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, donc lorsque $n \to +\infty$,

$$f((n+1)h) - f(nh) \to 0.$$

Par définition de la limite d'une suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$|f((n+1)h) - f(nh)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{M}.$$

3. On applique le théorème des accroissement finis entre nh et $(n+1)h$: il existe $c \in [nh, (n+1)h]$ tel que

$$f'(c) = \frac{f((n+1)h) - f(nh)}{h},$$

d'où

$$|f'(c)| \leqslant \frac{\varepsilon^2/M}{h} = \varepsilon.$$

4. Pour $x \geqslant Nh$, il existe $n \geqslant N$ tel que

$$nh \leqslant x < (n+1)h,$$

et d'après la question précédente il existe $c \in [nh, (n+1)h]$ tel que

$$|f'(c)| \leqslant \varepsilon.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à f' entre x et c donne :

$$\begin{aligned} |f'(x) - f'(c)| &\leqslant M|x-c| \\ &\leqslant Mh \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Les deux denières inégalités permettent d'obtenir

$$|f'(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Conclusion : on a montré que $f' \to 0$.

der05_s **Solution 14.11** (énoncé). 1. f' est continue sur le segment I, donc elle est bornée. Posons $M = \sup_I |f'|$. D'après le théorème des accroissements finis, pour tous $x < y \in I$ il existe $c \in \,]x, y[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

et on en déduit que $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$.

La réciproque est fausse. Soit $f \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ la fonction valeur absolue. Elle n'est pas dérivable en 0, et pourtant l'inégalité

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

montre qu'elle est 1-hölderienne.

2. Pour tous $x, y \in I$, on a

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leqslant M|y - x|^{\alpha - 1}.$$

À x fixé, et en faisant tendre y vers 0, on a $|y - x|^{\alpha-1} \to 0$. D'après le théorème des gendarmes, on a donc

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \to 0.$$

Donc f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$. On en déduit que f est constante.

3. Comme f n'est pas constante, elle n'est pas α-hölderienne pour $\alpha > 1$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(2x) - f(x)}{2x - x}\right| &= \left|\frac{2x\ln(2x) - x\ln(x)}{x}\right| \\ &= |2\ln(2) + \ln(x)|\,. \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers 0, cette quantité tend vers $+\infty$. Donc f n'est pas 1-hölderienne. D'autre part, si $\alpha \in]0,1[$, pour tous $x < y \in I$:

$$\begin{aligned}
\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^\alpha} &= \frac{|y\ln(y)-x\ln(x)|}{|y-x|^\alpha} \\
&\leqslant \frac{|y\ln(y)-x\ln(y)|}{|y-x|^\alpha} + \frac{|x\ln(y)-x\ln(x)|}{|y-x|^\alpha} \\
&\leqslant |y-x|^{1-\alpha}|\ln(y)| + x\frac{\ln(1+(y-x)/x)}{|y-x|^\alpha} \\
&\leqslant |y-x|^{1-\alpha}|\ln(y)| + x\frac{(y-x)/x}{|y-x|^\alpha} \\
&\leqslant |y-x|^{1-\alpha}(|\ln(y)|+1) \\
&\leqslant y^{1-\alpha}(|\ln(y)|+1).
\end{aligned}$$

On a utilisé les inégalités $y-x \leqslant y$ et $\ln(1+u) \leqslant u$. La fonction $\varphi\colon y \mapsto y^{1-\alpha}(|\ln(y)|+1)$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ en posant $\varphi(0)=0$. Elle est donc bornée par une constante M et on a alors

$$|f(y)-f(x)| \leqslant M|y-x|^\alpha$$

pour tout couple (x,y).

der06_s **Solution 14.12** (énoncé). 1. Le développement limité à l'ordre 1

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

découle directement de la définition du nombre dérivé en x. Appliqué à f', cela donne

$$f'(x+h) = f'(x) + hf''(x) + o(h).$$

Posons $R(h) = f(x+h) - f(x) - hf'(x) - h^2/2f''(x)$, de sorte que (lorsque $h \to 0$)

$$\begin{aligned}
R'(h) &= f'(x+h) - f'(x) - hf''(x) \\
&= o(h).
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $R(h) = o(h^2)$. Pour cela, prenons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\forall h \in [-\delta, \delta], \quad |R'(h)| \leqslant \varepsilon|h|.$$

Dès lors, si $h \in [-\delta, \delta]$,

$$\begin{aligned}
|R(h)| &= \left|\int_0^h R'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^h \varepsilon|t|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \varepsilon\frac{h^2}{2}.
\end{aligned}$$

2. Écrivons

$$\begin{aligned} f(h) &= hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + R(h) \\ &= hf'(0) + h^2 \left(\frac{f''(0)}{2} + \frac{R(h)}{h^2} \right), \end{aligned}$$

où $R(h) = o(h^2)$ lorsque $h \to 0$. Comme $R(h)/h^2 \to 0$, l'application

$$\varphi\colon h \mapsto \frac{f''(0)}{2} + \frac{R(h)}{h^2}$$

est bornée (disons par M) sur $]0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4} \varphi\left(\frac{k}{n^2}\right) \right| &\leqslant \frac{M}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &\leqslant \frac{M}{n^4} \sum_{k=1}^{n} n^2 \\ &\leqslant \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) = \frac{n(n+1)}{2n^2} f'(0).$$

On en conclut que $S_n \to f'(0)/2$.

15 Polynômes

pol01_s

Solution 15.1 (énoncé). 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 1. Si P s'écrit sous la forme AB avec $A, B \in \mathbb{C}[X]$, alors $\deg P = 1 = \deg A + \deg B$ donc A ou B est constant. Cela montre que P est irréductible.

Soit maintenant $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 2. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet une racine a. P s'écrit alors sous la forme $(X - a)Q$, où $Q \in \mathbb{C}[X]$. Comme $X - a$ est de degré 1, Q est de degré supérieur ou égal à 1 et P n'est pas irréductible.

2. Dans $\mathbb{R}$, un polynôme P de degré 1 est irréductible pour les mêmes raisons que dans $\mathbb{C}$. D'autre part, si $P = aX^2 + bX + c$ est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ strictement négatif, P n'a pas de racine réelle donc l'écriture $P = AB$ (avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$) conduit à ce que A ou B est constant. Donc P est irréductible.

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 3.

- Si P admet une racine réelle a, P s'écrit sous la forme $(X - a)Q$, où $Q \in \mathbb{C}[X]$, ce qui implique que P n'est pas irréductible.
- Sinon, P admet deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$, et P se décompose en $P = (X - z)(X - \bar{z})Q = (X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2)Q$. Comme Q est de degré supérieur ou égal à 1, P n'est pas irréductible.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré 2 avec un discriminant Δ positif ou nul, P admet une racine donc il n'est pas irréductible.

pol02_s **Solution 15.2** (énoncé)**.** Comme P est de degré pair, il tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Il existe donc $A > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A], \quad P(x) \geqslant P(0).$$

De plus, P est continu sur $[-A, A]$ donc il admet un minimum (disons $m = P(a)$) sur ce segment. Comme $m \leqslant P(0)$, m est même le minimum global de P. Ainsi, $P'(a) = 0$. Or

$$\begin{aligned} P'(a) &= 1 + a + \cdots + \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= P(a) - \frac{a^{2n}}{(2n)!} \\ &\leqslant P(a). \end{aligned}$$

Comme $m = P(a) \geqslant 0$ est le minimum de P sur $\mathbb{R}$, P est positif.

pol03_s **Solution 15.3** (énoncé)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ tel que P' divise P. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$nP(X) = P'(X)(X - a).$$

P est donc solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre :

$$y'(x) = \frac{n}{x - a} y(x).$$

Sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$, P est donc de la forme

$$\begin{aligned} P(x) &= \lambda_{\pm} \exp\Big(n|\ln(x - a)|\Big) \\ &= \lambda_{\pm} |x - a|^n \end{aligned}$$

avec λ_-, λ_+ deux constantes. Il est facile de voir que $\lambda_- = -\lambda_+$, ce qui donne :

$$P(X) = \lambda(X - a)^n.$$

La synthèse est immédiate.

pol04_s **Solution 15.4** (énoncé)**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) \\ &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\ &= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\ &= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x). \end{aligned}$$

Comme $\cos(\pi/3) = 1/2$, en posant

$$P = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2},$$

on définit un polynôme de degré 3 à coefficients rationnels qui admet $\cos(\pi/9)$ comme racine. Supposons alors que $\cos(\pi/9)$ s'écrit sous la forme a/b avec a et b deux entiers premiers entre eux. On a

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\frac{a}{b} - \frac{1}{2} = 0,$$

ou encore

$$8a^3 - 6ab^2 - b^3 = 0.$$

Il en résulte que a divise b^3, ce qui est impossible car a et b sont supposés être premiers entre eux.

pol05_s **Solution 15.5** (énoncé)**.** Définissons l'application

$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x-k}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \{1, \ldots, n\}$. Elle est strictement décroissante sur chacun des $n+1$ intervalles sur laquelle elle est définie. Voir les figures 16 et 17 pour le graphe et les variations de f.

Notons $x_1 < \cdots < x_n$ les solutions de l'équation $f(x) = 1$. Il est clair que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n}]i, x_i].$$

Dans la suite, on utilisera le fait que si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots$ est un polynôme unitaire de racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors $\sum \lambda_i = -a_{n-1}$. Définissons le polynôme

$$\begin{aligned} P(X) &= \left[1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{X-k}\right] \prod_{i=1}^{n} (X-i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (X-i) - \sum_{k=1}^{n} k \prod_{i \neq k} (X-i). \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré n, et ses n racines sont précisément les x_i. Calculons le coefficient devant X^{n-1} : il s'agit de

$$-\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{k=1}^{n} k = -n(n+1).$$

Ainsi, la somme des x_i vaut :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n(n+1).$$

Conclusion : la taille totale de E vaut

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i - i) &= n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

pol06_s **Solution 15.6** (énoncé)**.** La division euclidienne s'écrit

$$P = (X^2+1)Q + R, \tag{15.1}$$ pol06:1

où $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et R est un polynôme de degré au plus 1. On peut donc écrire $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Évaluons la relation (15.1) en i : on obtient

$$\begin{aligned} R(i) &= P(i) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (\cos(a_k) + i \sin(a_k)) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \exp(i a_k) \\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + i \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right). \end{aligned}$$

Or $R(i) = ai + b$. Il ne reste plus qu'à identifier les parties réelles et imaginaires pour conclure :

$$R = \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) X + \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

pol07_s **Solution 15.7** (énoncé)**.** 1. Comme P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, il suffit de trouver ses racines complexes. Pour $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff \sum_{k=1}^{n} x^k = 0 \\ &\iff \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 0 \\ &\iff x^{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Comme de plus 1 n'est pas racine de P, on obtient la décomposition

$$P = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)\right).$$

2. Factorisons $P(1)$ avec la technique de l'arc moitié :

$$\begin{aligned} P(1) &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left[\exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right) \left(\exp\left(\frac{-ik\pi}{n+1}\right) - \exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\right)\right] \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left[\exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right) \left(-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)\right] \\ &= (-2i)^n \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{ik\pi}{n+1}\right) \\ &= \exp\left(\frac{ni\pi}{2}\right) \\ &= i^n. \end{aligned}$$

Comme $P(1) = n + 1$, il en résulte que

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2^n}.$$

pol08_s **Solution 15.8** (énoncé)**.** Commençons par le sens indirect. Supposons que P vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n.$$

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P est scindé sur $\mathbb{C}$: on peut noter $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ses racines complexes. Alors pour tout i, $|\mathrm{Im}(z_i)| = 0$ donc z_i est réel. Conclusion : P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Supposons à présent que P est scindé sur $\mathbb{R}$. On peut écrire

$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont ses racines réelles. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \prod_{k=1}^{n} |z - \lambda_i| \\ &\geqslant \prod_{k=1}^{n} |\mathrm{Im}(z)| \\ &= |\mathrm{Im}(z)|^n. \end{aligned}$$

On a utilisé la relation : $|s| \geqslant |\mathrm{Im}(s)|$ pour $s \in \mathbb{C}$.

pol09_s **Solution 15.9** (énoncé)**.** Soit P un polynôme de degré n tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Fixons pour la suite des rationnels $r_1, \ldots, r_{n+1}$ distincts. On utilise l'interpolation de Lagrange en ces points :

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} P(r_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{X - r_i}{r_k - r_i}.$$

Les $P(r_k)$ étant rationnels, le polynôme P est à coefficients rationnels. La réciproque est immédiate.

pol10_s **Solution 15.10** (énoncé)**.** On démontre l'unicité puis l'existence.

Unicité Supposons qu'il existe P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\begin{cases} \deg P_1 \leqslant n - 1, \\ \deg P_2 \leqslant n - 1, \\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ P_1(x_i) = P_2(x_i) = y_i. \end{cases}$$

Posons $Q = P_1 - P_2$. Alors $\deg Q \leqslant n - 1$, et pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ on a $Q(x_i) = 0$. Cela assure que Q est le polynôme nul : un polynôme de degré d admet toujours au plus d racines. Donc $P_1 = P_2$, on a prouvé l'unicité.

Existence Montrons l'existence. Pour cela, commençons par supposer que

$$(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

où le 1 est à la j-ième position. On cherche donc un polynôme P de degré au plus $n - 1$ tel que

$$\begin{cases} P(x_j) = 1, \\ \forall i \neq j,\ P(x_i) = 0. \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre

$$P_j(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}.$$

Considérons à présent le cas général. Si $(y_1, \ldots, y_n)$ est quelconque, on prend une combinaison linéaire des P_j. Plus précisément, on pose

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{j=1}^{n} y_j P_j(X) \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}. \end{aligned}$$

P est alors de degré inférieur ou égal à $n-1$, et on vérifie facilement que P interpole les (x_j, y_j), ce qui conclut la preuve.

pol11_s **Solution 15.11** (énoncé). 1. On a $P(a) = 0$. En évaluant (15.1) en $X = a$, on obtient

$$P(a^2) + P(a)P(a+1) = 0,$$

donc $P(a^2) = 0$. En évaluant (15.1) en $X = a - 1$, on obtient

$$P((a-1)^2) + P(a-1)P(a) = 0,$$

donc $P\left((a-1)^2\right) = 0$.

2. Considérons la suite $(a^{2^n})_{n\geqslant 0}$:

$$a, a^2, a^4, a^8, \ldots$$

C'est une suite de racines de P : en effet, a est racine, donc a^2 est racine, donc a^4 est racine, etc. Comme P n'est pas nul, il n'a qu'un nombre fini de racines donc l'ensemble $\{a^{2^n}, n \geqslant 0\}$ est fini. En particulier, l'ensemble $\{|a|^{2^n}, n \geqslant 0\}$ est fini aussi, et cela implique que $|a|$ vaut 0 ou 1. De plus, $(a-1)^2$ est également racine de P, donc $(a-1)^2$ est soit nul, soit de module 1. Il y a trois cas :

— soit $a = 0$,

— soit $a - 1 = 0$,

— soit a et $a - 1$ sont tous les deux de module 1.

On fait un dessin : cela assure que $a \in \{0, 1, -j, -j^2\}$.

3. On procède par analyse-synthèse :

Analyse Soit P une solution non nulle de (15.1). Alors les racines de P sont incluses dans $\{0, 1, -j, -j^2\}$. Comme P est un polynôme complexe, il est scindé sur $\mathbb{C}$ (attention, ce n'est pas vrai sur $\mathbb{R}$!). Il existe donc des entiers $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ et un complexe $\lambda \neq 0$ tels que

$$P(X) = \lambda X^a (X-1)^b (X+j)^c (X+j^2)^d.$$

Notons que

$$X^2 + j = \left(X - \exp\left(\frac{5i\pi}{6}\right)\right)\left(X + \exp\left(\frac{5i\pi}{6}\right)\right),$$

et

$$X^2 + j^2 = \left(X - \exp\left(\frac{i\pi}{6}\right)\right)\left(X + \exp\left(\frac{i\pi}{6}\right)\right).$$

On rappelle également que $1 + j + j^2 = 0$. On va maintenant utiliser l'équation (15.1) pour obtenir des conditions sur λ, a, b, c, d. Pour cela, scindons les polynômes :

$$\begin{aligned} P(X^2) &= \lambda X^{2a}(X^2-1)^b(X^2+j)^c(X^2+j^2)^d, \\ &= \lambda X^{2a}(X-1)^b(X+1)^b\left(X-e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^c\left(X+e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^c\left(X-e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^d\left(X+e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X+1) &= \lambda(X+1)^a X^b(X+1+j)^c(X+1+j^2)^d \\ &= \lambda X^b(X+1)^a(X-j^2)^c(X-j)^d, \end{aligned}$$

$$P(X)P(X+1) = \lambda^2 X^{a+b}(X-1)^b(X+1)^a(X+j)^c(X+j^2)^d(X-j^2)^c(X-j)^d.$$

On peut maintenant tout identifier, car $P(X) = -P(X)P(X+1)$. On obtient :

- $\lambda = -\lambda^2$
- $a + b = 2a$,
- $b = b$,
- $a = b$,
- $c = 0$,
- $d = 0$.

Finalement P est de la forme

$$P(X) = -(X(X-1))^a.$$

Synthèse Réciproquement, si $a \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} P(X^2) + P(X)P(X+1) &= -(X^2(X^2-1))^a + (X(X-1))^a(X(X+1))^a \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de (15.1) sont : le polynôme nul, et les $-(X(X-1))^a$ lorsque a décrit $\mathbb{N}$.

16 Espaces vectoriels

ev04_s **Solution 16.1** (énoncé). 1. Supposons que f est injective. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$

Alors par linéarité

$$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0,$$

et comme f est injective,

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0.$$

Or la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre : cela implique que les λ_i sont tous nuls. On a montré que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre dans F.

Réciproquement, on suppose que l'image de toute famille libre est encore libre. En particulier, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, la famille (x) est libre, donc son image $(f(x))$ est libre : autrement dit, $f(x) \neq 0$. Conclusion : f est injective.

2. Supposons que f est surjective. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E : on a

$$E = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(f(e_i))_{i\in I} &= f(\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I})\\ &= f(E)\\ &= F.\end{aligned}$$

Donc la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de F.
Réciproquement, on suppose qu'il existe une famille $(e_i)_{i\in I}$ génératrice de E telle que $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de F. Alors

$$\begin{aligned}f(E) &= f(\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I})\\ &= \mathrm{Vect}(f(e_i))_{i\in I}\\ &= F.\end{aligned}$$

Donc f est surjective.

ev10_s **Solution 16.2** (énoncé)**.** On montre d'abord que F est un sous-espace vectoriel de E, puis que $F \cap G$ est réduit au singleton $\{0\}$, et enfin que $F + G = E$.

Sous-espace vectoriel. F contient l'application nulle donc il est non vide. Il reste à montrer que F est stable par combinaison linéaire. Soient $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi),$$

$$g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(\pi),$$

donc

$$(\lambda f + \mu g)(0) = (\lambda f + \mu g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\lambda f + \mu g)(\pi),$$

autrement dit l'application $\lambda f + \mu g$ est dans F.

Intersection. Soit $f \in F \cap G$. Par définition de G, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$f = \lambda \sin + \mu \cos.$$

On a alors $f(0) = \mu$, $f(\pi/2) = \lambda$ et $f(\pi) = -\mu$. Mais $f \in F$, donc $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$ ce qui implique $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$. Finalement $f = 0$.

Somme. Soit $h \in E$. Notre but est de montrer l'existence de $(f, g) \in F \times G$ tel que $f + g = h$. On va donc procéder par analyse-synthèse : supposons que l'on a trouvé un couple $(f, g) \in F \times G$ vérifiant $f + g = h$. Par définition de G, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$g = \lambda \sin + \mu \cos,$$

et d'autre part par définition de F,

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi).$$

On évalue successivement la relation $f + g = h$ en $0, \pi/2$ et π :

$$\begin{cases} f(0) + \mu = h(0) \\ f(0) + \lambda = h\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f(0) - \mu = h(\pi). \end{cases}$$

Cela nous permet de calculer μ :

$$\mu = \frac{h(0) - h(\pi)}{2},$$

puis λ :

$$\lambda = \frac{2h(\pi/2) - h(0) - h(\pi)}{2}.$$

Cela détermine complètement g (on rappelle que h est fixé). On peut donc passer à la synthèse : posons λ et μ comme ci-dessus et

$$g = \lambda \sin + \mu \cos.$$

On a alors $g \in G$. Posons $f = h - g$. Le fait que $f \in F$ découle alors de l'analyse faite plus haut.

ev11_s **Solution 16.3** (énoncé)**.** Comme H est inclus dans G, on a $F \cap H = F \cap (H \cap G) = (F \cap G) \cap H$. Mais H et $F \cap G$ sont supplémentaires dans G, donc en particulier leur intersection est nulle. On a montré que $F \cap H = \{0\}$, autrement dit que

$$F + H = F \oplus H.$$

Il reste à montrer que $F + G \subset F + H$ (l'autre inclusion est immédiate). Soit $x \in F + G$. Cela veut dire qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que

$$x = f + g.$$

On utilise à présent le fait que H et $F \cap G$ sont supplémentaires dans G : cela nous donne l'existence d'un couple $(h, t) \in H \times (F \cap G)$ tel que

$$g = h + t.$$

On a alors

$$x = \underbrace{h}_{\in H} + \underbrace{f + t}_{\in F}.$$

ev01_s **Solution 16.4** (énoncé)**.** Pour tout $f \in E$, on peut définir une application $\psi(f) \in E$ par

$$\psi(f) \colon x \mapsto \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Il est facile de voir que ψ est un endomorphisme de E et que $\varphi \circ \psi = Id_E$.

En revanche, un endomorphisme ψ tel que $\psi \circ \varphi = Id_E$ n'existe pas. S'il existait, $\psi \circ \varphi$ serait inversible, donc injectif en particulier, et φ serait injectif. Or l'application constante égale à 1 est dans le noyau de φ, d'où la contradiction.

ev14_s **Solution 16.5** (énoncé)**.** Comme $\mathrm{Im}(f^2)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(f)$ et qu'on a l'égalité des dimensions, les deux sous-espaces sont égaux :

$$\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f).$$

De la même manière, on a l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Pour obtenir l'égalité des dimensions, on applique le théorème du rang à f et f^2 :

$$\dim\ker(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim E,$$
$$\dim\ker(f^2) + \mathrm{rg}(f^2) = \dim E.$$

Comme $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$, on en déduit bien

$$\dim\ker(f) = \dim\ker(f^2),$$

ce qui permet de conclure.

ev02_s **Solution 16.6** (énoncé)**.** On peut réécrire la condition sur f en

$$f^2 - 3f = -2Id,$$

ou encore

$$f \circ (f - 3Id) = -2Id.$$

Comme f et $f - 3Id$ commutent, on a également $(f - 3Id) \circ f = -2Id$ donc f est inversible d'inverse

$$\frac{3Id - f}{2}.$$

Soit $x \in \ker(f - Id) \cap \ker(f - 2Id)$. Alors $f(x) = x$ et $f(x) = 2x$, ce qui montre que $x = 0$.
Le polynôme $X^2 - 3X + 2$ se factorise en $(X - 1)(X - 2)$, ce qui permet de voir que

$$(f - Id) \circ (f - 2Id) = 0.$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(f - 2Id) \subset \ker(f - Id)$. Autrement dit, pour tout $x \in E$, $f(x) - 2x \in \ker(f - Id)$. De même, on peut écrire

$$(f - 2Id) \circ (f - Id) = 0,$$

et donc pour tout $x \in E$, $f(x) - x \in \ker(f - 2Id)$. Soit à présent $x \in E$. L'écriture $x = (f(x) - x) - (f(x) - 2x)$ est une décomposition en somme de deux éléments de $\ker(f - 2Id)$ et $\ker(f - Id)$ respectivement. On en conclut que les deux espaces sont en somme directe :

$$E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id).$$

ev03_s **Solution 16.7** (énoncé)**.** Si $x \in E$, $p(x) \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$ donc $q(p(x)) = p(x)$. Autrement dit, $q \circ p = p$ (et de même, $p \circ q = q$). Il ne reste qu'à faire le calcul : si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}(\lambda p + (1-\lambda)q)^2 &= \lambda^2 p + \lambda(1-\lambda) p \circ q + \lambda(1-\lambda) q \circ p + (1-\lambda)^2 q \\ &= \lambda^2 p + \lambda(1-\lambda) q + \lambda(1-\lambda) p + (1-\lambda)^2 q \\ &= \lambda p + (1-\lambda) q.\end{aligned}$$

Donc $\lambda p + (1-\lambda)q$ est une projection.

On a

$$\begin{aligned}\lambda p + (1-\lambda)q &= \lambda p + (1-\lambda)p \circ q \\ &= p \circ (\lambda p + (1-\lambda)q)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Im}(\lambda p + (1-\lambda)q) \subset \operatorname{Im}(p).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\lambda p + (1-\lambda)q) \circ p &= \lambda p^2 + (1-\lambda)q \circ p \\ &= \lambda p + (1-\lambda)p \\ &= p.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Im}(\lambda p + (1-\lambda)q).$$

ev05_s **Solution 16.8** (énoncé)**.** Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0.$$

Quitte à les renuméroter, on peut supposer que λ_n est le plus grand des λ_i. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n x} = 0,$$

ou encore

$$\alpha_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \cdots + \alpha_{n-1} e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} + \alpha_n = 0.$$

En prenant la limite lorsque $x \to +\infty$, on obtient

$$\alpha_n = 0.$$

Par récurrence, on démontre ensuite facilement que tous les α_i sont nuls. Donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

ev06_s **Solution 16.9** (énoncé)**.** Soit f un $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}f(z) &= f(x+iy) \\ &= xf(1) + yf(i) \\ &= \frac{x+iy+x-iy}{2} f(1) + \frac{x+iy-x+iy}{2i} f(i) \\ &= \frac{z+\bar{z}}{2} f(1) + \frac{z-\bar{z}}{2i} f(i) \\ &= \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(i)}{2i}\right) z + \left(\frac{f(1)}{2} - \frac{f(i)}{2i}\right) \bar{z}.\end{aligned}$$

Réciproquement, il est facile de vérifier qu'une application de la forme $z \mapsto az + b\bar{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Soit à présent $f\colon z \mapsto az + b\bar{z}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Notons

$$\begin{aligned}a &= x_a + iy_a \\ b &= x_b + iy_b,\end{aligned}$$

avec x_a, y_a, x_b, y_b des réels. Dans la base $(1, i)$, la matrice de f s'écrit

$$M_f = \begin{pmatrix} x_a + x_b & y_b - y_a \\ y_a + y_b & x_a - x_b \end{pmatrix},$$

et cette matrice est inversible si et seulement si f l'est. Or le déterminant de M_f vaut

$$\begin{aligned}(x_a + x_b)(x_a - x_b) - (y_a + y_b)(y_b - y_a) &= x_a^2 - x_b^2 - y_b^2 + y_a^2 \\ &= |a|^2 - |b|^2.\end{aligned}$$

On en déduit que f est inversible si et seulement si $|a| \neq |b|$. Si on veut, on peut même calculer l'inverse de f : il suffit d'inverser la matrice M_f. On trouve

$$M_f^{-1} = \frac{1}{|a|^2 - |b|^2} \begin{pmatrix} x_a - x_b & y_a - y_b \\ -y_a - y_b & x_a + x_b \end{pmatrix},$$

ce qui correspond à l'application

$$f^{-1} \colon z \mapsto \frac{\bar{a}}{|a|^2 - |b|^2} z - \frac{b}{|a|^2 - |b|^2} \bar{z}.$$

Autre méthode : on regarde à la main l'injectivité. Commençons par remarquer que si a ou b vaut 0, f est inversible (sauf si $a = b = 0$). On peut donc supposer a et b non nuls. Quitte à multiplier f par a^{-1} et à poser $\lambda = b/a$, on a pour tout z

$$f(z) = z + \lambda \bar{z}.$$

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} && f(z) &= 0 \\ \iff && z + \lambda \bar{z} &= 0 \\ \iff && \frac{z}{\bar{z}} &= -\lambda. \end{aligned}$$

Cette équation n'a pas de solution si $|\lambda| \neq 1$, et elle en a une infinité si $|\lambda| = 1$. Donc f est injective si et seulement si $|\lambda| \neq 1$. De plus, comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, elle est injective si et seulement si elle est surjective.

ev07_s **Solution 16.10** (énoncé)**.** Supposons que f et p commutent.

Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = p(x)$, ce qui donne $f(y) = f(p(x)) = p(f(x)) \in \mathrm{Im}(p)$. Donc $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.

De la même manière, si $y \in \ker(p)$ alors $p(f(y)) = f(p(y)) = f(0) = 0$ donc $f(y) \in \ker(p)$. Donc $\ker(p)$ est stable par f.

Supposons maintenant que $f(\ker(p)) \subset \ker(p)$ et $f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$. Comme p est un projecteur, son noyau et son image sont en somme directe :

$$E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$

Si on fixe $x \in E$, il existe donc un unique couple $(i, k) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)$ tel que $x = i + k$. On a $(f(i), f(k)) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)$. Il ne reste plus qu'à faire le calcul :

$$\begin{aligned} f(p(x)) &= f(p(i)) + f(p(k)) \\ &= f(i) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p(f(x)) &= p(f(i)) + p(f(k)) \\ &= f(i). \end{aligned}$$

Conclusion : p et f commutent.

ev12_s **Solution 16.11** (énoncé)**.** Les deux hypothèses sur f et g permettent chacune d'obtenir une des inégalités nécessaires.

Étape 1. Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, donc $f(y) = (f \circ g)(x) = 0$, et $y \in \ker(f)$. Finalement, la condition $f \circ g = 0$ donne

$$\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f),$$

soit, en prenant les dimensions :

$$\mathrm{rg}(g) \leqslant \dim \ker(f). \tag{16.1}$$ ev12:1

D'après le théorème du rang, on a par ailleurs

$$\mathrm{rg}(f) + \dim \ker(f) = \dim E. \tag{16.2}$$ ev12:2

En combinant (16.1) et (16.2), on obtient

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant \dim E.$$

Étape 2. D'autre part, $f + g$ est bijective donc surjective. Si y est un vecteur de E, il s'écrit sous la forme $y = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$, donc il appartient à $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Autrement dit, on a

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = E.$$

En prenant les dimensions, cela donne

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim\Big(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) = \dim E,$$

et en particulier

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \geqslant \dim E.$$

ev13_s **Solution 16.12** (énoncé)**.**

Sens direct. Supposons que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$. D'après le théorème du rang, on a

$$\begin{aligned} n &= \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \\ &= \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \\ &= 2\,\mathrm{rg}(f). \end{aligned}$$

D'autre part, si $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \ker(f)$ donc $f(f(x)) = 0$.

Sens indirect. Supposons que $f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$. Soit y un élément de l'image de f. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. En appliquant f, on obtient $f(y) = f^2(x) = 0$, donc $y \in \ker(f)$. On a démontré l'inclusion suivante :

$$\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f). \tag{16.3}$$ ev13:1

Or, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim\ker(f) &= n - \operatorname{rg}(f) \\ &= 2\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(f) \\ &= \dim\operatorname{Im}(f). \end{aligned} \tag{16.4}$$ ev13:2

En utilisant (16.3) et (16.4), on conclut que $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont égaux.

ev15_s **Solution 16.13** (énoncé)**.** L'hypothèse $f^2 = 0$ se traduit en $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$, et la condition $g \circ f = 0$ se traduit en $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(g)$. On cherche donc $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(g)$,
- $f = f \circ g$.

Soit S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E, et soit g la projection sur S parallèlement à $\ker(f)$. Alors la première condition est automatiquement vérifiée : on a

$$g \circ f = 0,$$

car $\ker(g) = \ker(f) \supset \operatorname{Im}(f)$. Soit à présent $x \in E$. On peut décomposer x suivant la somme directe $E = S \oplus \ker(f)$: il existe $s \in S$ et $y \in \ker(f)$ tels que

$$x = s + y.$$

Par définition de g, on a

$$g(x) = s,$$

et donc $f(x) = f(s+y) = f(s) + f(y) = f(s) = f(g(x))$.

ev16_s **Solution 16.14** (énoncé)**.** Supposons que $E = F \oplus \operatorname{Vect}(g)$, où g est une fonction continue non nulle. Alors par définition,

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \qquad f - \lambda g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Comme c'est vrai pour toute fonction continue f, on peut prendre en particulier $f \colon x \mapsto |x|$. Cette fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, donc $\lambda \neq 0$, et on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De même, en prenant $x \mapsto |x-1|$, on obtient que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Finalement g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$. C'est absurde.

ev08_s **Solution 16.15** (énoncé)**.** Il suffit de montrer que toute famille de cardinal 2 est liée. Soient donc f et g deux vecteurs de F ; on va montrer que la famille (f, g) est liée. Pour cela, remarquons qu'il est équivalent de montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)g(y) = f(y)g(x). \tag{16.5}$$ ev08:1

En effet, supposons qu'on a (16.5). Fixons y tel que $g(y) \neq 0$ ou $f(y) \neq 0$ et posons $(\lambda, \mu) = (g(y), f(y)) \neq (0, 0)$. On a alors $\lambda f = \mu g$, donc la famille (f, g) est liée. Le sens réciproque n'est pas très compliqué non plus.

Fixons donc $x, y \in \mathbb{R}$ et notons

$$\begin{aligned} a &= f(x) \\ b &= f(y) \\ c &= g(x) \\ d &= g(y). \end{aligned}$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est un vecteur de F. On a

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda a + \mu c \\ (\lambda f + \mu g)(y) &= \lambda b + \mu d. \end{aligned}$$

L'ensemble

$$A = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda a + \mu c > 0\}$$

est un demi-plan ouvert ; sa frontière est la droite d'équation $\lambda a + \mu c = 0$. De même, l'ensemble

$$B = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda b + \mu d < 0\}$$

est un demi-plan ouvert dont la frontière a pour équation $\lambda b + \mu d = 0$. Mais l'hypothèse sur F nous dit que $(\lambda f + \mu g)(x)$ et $(\lambda f + \mu g)(y)$ sont de même signe pour tout couple (λ, μ), autrement dit que A et B sont disjoints. Si deux demi-plans sont disjoints, leurs frontières sont parallèles, ce qui revient à dire que les vecteurs directeurs des deux frontières sont proportionnels. Donc $(-c, a)$ est proportionnel à $(-d, b)$, soit $ad = bc$: autrement dit, $f(x)g(y) = f(y)g(x)$.

ev09_s **Solution 16.16** (énoncé).

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $R_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de E. Mais $R_n[X]$ est de dimension $n + 1$: en faisant tendre n vers $+\infty$, on voit que E est de dimension infinie.
2. On définit les applications

$$g \colon x \mapsto \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

et

$$h \colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Alors la fonction carré s'écrit $h - g$: c'est un élément de F.

3. On définit les applications

$$g \colon x \mapsto \begin{cases} 2k + 1 - \sin(x) & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ 2k + 2 & \text{si } x \in \left[\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi\right] \end{cases}$$

et

$$h\colon x \mapsto \begin{cases} 2k+1 & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right] \\ \sin(x)+2k+2 & \text{si } x \in \left[\frac{3\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi\right] \end{cases}.$$

Alors la fonction sinus s'écrit $h-g$ (faire un dessin) : donc $\sin \in F$.

4. Soit $f \in E$. On définit les fonctions :

$$f'_+\colon x \mapsto \max(f'(x), 0)$$

et

$$f'_-\colon x \mapsto -\min(f'(x), 0).$$

Ce sont respectivement les parties positive et négative de f'. Les propriétés suivantes sont assez claires :

— $f'_+ \geqslant 0$,
— $f'_- \geqslant 0$,
— $f'_+ - f'_- = f'$.

De plus, f'_+ et f'_- sont continues, donc les applications

$$g\colon x \mapsto \int_0^x f'_-(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$h\colon x \mapsto \int_0^x f'_+(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$. Comme de plus elles sont croissantes, ce sont deux éléments de F. Ainsi $f = h - g \in F$.

5. Définissons l'application

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

On va montrer par l'absurde que f n'est pas dans F'. Si c'était le cas, f s'écrirait comme une combinaison linéaire de fonction croissantes :

$$f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n.$$

En regroupant les λ_i positifs d'une part et les λ_i négatifs d'autre part, on peut réécrire cela en

$$f = h - g,$$

où h et g sont croissantes.

Soient $a < b$ deux réels avec a rationnel et b irrationnel. On a

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= f(b) + g(b) - f(a) - g(a) \\ &= 1 - 0 + g(b) - g(a) \\ &\geqslant 1. \end{aligned}$$

Si $n \geqslant 1$ est fixé, on considère les nombres

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{n}, a_2 = \frac{2}{n}, \ldots, a_n = 1$$

et

$$b_0 = \frac{\sqrt{2}/2}{n}, b_1 = \frac{1+\sqrt{2}/2}{n}, \ldots, b_{n-1} = \frac{n-1+\sqrt{2}/2}{n}.$$

Les a_i sont rationnels et les b_i sont irrationnels, et on a les inégalités :

$$a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n.$$

En utilisant la croissance de h et le fait que $h(b_i) - h(a_i) \geqslant 1$, on obtient

$$h(1) - h(0) \geqslant n.$$

Comme c'est vrai pour tout n, on obtient une contradiction. En fait, on peut caractériser les éléments de F' : ce sont les fonctions à variation bornée (cf. Wikipedia).

ev18_s **Solution 16.17** (énoncé)**.** u est de rang 1, donc son noyau est un hyperplan $\mathcal{H}$ de dimension $n-1$ (théorème du rang). Soit $(e_2, \ldots, e_n)$ une base de H, que l'on complète en $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On peut alors écrire la matrice M de u dans cette base :

$$M = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme sa trace est égale à 1, on a $\lambda_1 = 1$ donc

$$M = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que u est un projecteur, il suffit de montrer que $u^2 = u$. Cela revient à montrer que $M^2 = M$, ce qu'on voit facilement.

Remarque : notons qu'en prenant un vecteur e_1 plus adapté (dans l'image de u), la matrice de u s'écrirait même

$$M = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

17 Espaces euclidiens

euc01_s **Solution 17.1** (énoncé)**.** On doit montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, symétrique, et définie positive.

Linéaire à gauche. Soient $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P_1 + P_2)(k)Q(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P_1(k) + P_2(k))Q(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P_1(k)Q(k) + \sum_{k=0}^{n} P_2(k)Q(k) \\ &= \lambda \langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q\rangle.\end{aligned}$$

Symétrique. Soient $P, Q \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\langle P, Q\rangle &= \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) \\ &= \langle Q, P\rangle.\end{aligned}$$

Défine positive. Soit $P \in E$. On a

$$\begin{aligned}\langle P, P\rangle &= \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

De plus, si $P \in E$ est un polynôme tel que $\langle P, P\rangle = 0$, alors $\sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0$. Comme c'est une somme de termes positifs, tous les termes sont nuls donc pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P(k) = 0$. P est alors un polynôme de degré au plus n et qui admet $n+1$ racines. Cela implique que $P = 0$.

euc02_s **Solution 17.2** (énoncé)**.** On doit montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, symétrique, et définie positive.

Linéaire. Soient $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda f_1 + f_2, g\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda f_1 + f_2)(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} (\lambda f_1(t) + f_2(t))g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} f_1(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f_2(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle.\end{aligned}$$

Symétrique. Soient $f, g \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle g, f\rangle.\end{aligned}$$

Définie positive Soit $f \in E$. On a

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \int_{-1}^{1} f(t)^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

car l'application $\varphi\colon t \mapsto f(t)^2(1-t^2)$ est positive sur $[-1,1]$. De plus, si $f \in E$ est une fonction telle que $\langle f, f\rangle = 0$, alors $\int_{-1}^{1} f(t)^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Mais φ est continue et positive sur $[-1,1]$. Donc elle est nulle :

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi(t) = 0.$$

Pour $t \in\,]-1,1[$, cela implique $f(t) = 0$. Comme f est continue en -1 et en 1, elle est en fait nulle sur tout $[-1,1]$.

euc03_s **Solution 17.3** (énoncé)**.** On doit montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche, symétrique, et définie positive.

Linéaire. Soient $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda f_1 + f_2, g\rangle &= (\lambda f_1 + f_2)(0)g(0) + \int_0^1 (\lambda f_1 + f_2)'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda f_1(0)g(0) + f_2(0)g(0) + \int_0^1 (\lambda f_1'(t) + f_2'(t))g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda f_1(0)g(0) + f_2(0)g(0) + \lambda \int_0^1 f_1'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f_2'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle.\end{aligned}$$

Symétrique. Soient $f, g \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle g, f\rangle.\end{aligned}$$

Définie positive. Soit $f \in E$. On a

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

car l'application $\varphi : t \mapsto f'(t)^2$ est positive sur $[0,1]$. De plus, si $f \in E$ est une fonction telle que $\langle f, f\rangle = 0$, alors $f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = f(0)^2 + \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. C'est une somme nulle de deux termes positifs, donc $f(0) = 0$ et

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or φ est une fonction positive et continue sur $[0,1]$, d'intégrale nulle. Donc elle est nulle :

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi(t) = 0.$$

Autrement dit, $f' = 0$, et f est constante sur $[0,1]$. Comme, par ailleurs, $f(0) = 0$ on en conclut que f est identiquement nulle.

euc04_s **Solution 17.4** (énoncé). $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel : $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Cela donne

$$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|\|y\|,$$

soit

$$\sum_{k=1}^n x_k \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

En élevant au carré, on obtient le résultat.

euc05_s **Solution 17.5** (énoncé). On développe la norme au carré :

$$\begin{aligned}
& \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geqslant \|x\| \\
\iff & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\|^2 \geqslant \|x\|^2 \\
\iff & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geqslant \|x\|^2 \\
\iff & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 + 2\langle x, \lambda y\rangle + \|\lambda y\|^2 \geqslant \|x\|^2 \\
\iff & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Or l'application $\lambda \mapsto 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$ est un polynôme du second degré, et son coefficient en λ^2 est positif. Donc elle est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant est négatif ou nul. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0 \\
\iff & (2\langle x, y\rangle)^2 \leqslant 0 \\
\iff & \langle x, y\rangle = 0 \\
\iff & x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux.}
\end{aligned}$$

euc06_s **Solution 17.6** (énoncé). On doit montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est linéaire, symétrique, et défini positif.

Linéaire. Cela découle de la linéarité de la trace.

Symétrique. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme la trace est invariante par transposition,

$$\begin{aligned}
\langle A, B\rangle &= \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}AB) \\
&= \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AB)) \\
&= \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}BA) \\
&= \langle B, A\rangle.
\end{aligned}$$

Défini positif. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et ${}^{\mathrm{t}}AA = M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pour tout couple (i, j), on a

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle &= \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}AA) \\ &= \operatorname{tr}(M) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\langle A, A \rangle$ est toujours positif, et nul si et seulement si $A = 0$.

18 Intégration

int05_s **Solution 18.1** (énoncé).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cosh x = y$. On pose $X = e^x$ de sorte que $X + 1/X = 2y$, soit encore $X^2 - 2yX + 1 = 0$. C'est une équation du second degré de discriminant $4(y^2 - 1)$ dont les solutions sont $X_1 = y - \sqrt{y^2 - 1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$. En repassant à x, on obtient

$$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Réciproquement, $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$ sont bien des solutions de l'équation $\cosh x = y$.

2. L'application cosh est croissante sur $[0, +\infty[$ car sa dérivée est positive. Comme $\cosh(0) = 0$, l'application $\cosh\colon [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est bien définie. Soit maintenant $y \geq 1$. On a $y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$ si et seulement si $(y - 1)^2 \leq y^2 - 1$, ce qui est vrai car $y \geq 1$. Donc pour tout $x \geq 0$,

$$\cosh x = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

On en déduit que $\cosh\colon [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est inversible d'inverse

$$\cosh^{-1}\colon y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

3. Pour tout $y > 1$, $\cosh^{-1}$ est dérivable en y et

$$\left(\cosh^{-1}\right)'(y) = \frac{1 + \dfrac{2y}{2\sqrt{y^2 - 1}}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Ainsi

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \mathrm{d}y = \left[\cosh^{-1}\right]_2^3 = \ln\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}}\right).$$

4. On calcule la primitive sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on utilise le changement de variable $u = e^x$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cosh x} \mathrm{d}x &= \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{1}{u + 1/u} \frac{\mathrm{d}u}{u} && (\mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}x) \\
&= 2\int \frac{1}{u^2+1} \mathrm{d}u \\
&= 2\arctan u \\
&= 2\arctan e^x.
\end{aligned}$$

int07_s **Solution 18.2** (énoncé). 1. On factorise, puis on utilise le changement de variable $x = au$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(x/a)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u && (\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u) \\
&= \frac{1}{a}\arctan(u) \\
&= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right).
\end{aligned}$$

2. On reconnaît une fonction de la forme u'/u :

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos'(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\cos x|.$$

3. On reconnaît une fonction de la forme $u'u^{-4}$:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}(\ln x)^{-4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(\ln x)^{-3}.$$

4. On utilise une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln x \times \ln(\ln x) - \int \ln x \times \frac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x)\ln(\ln x) - \ln(x).
\end{aligned}$$

5. On utilise le fait que $\tan' = 1/\cos^2$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x &= \int \tan'(x)(\tan x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\tan x}.
\end{aligned}$$

On pouvait aussi faire le changement de variable $u = \tan x$.

6. On fait le changement de variable $u = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u && (\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u) \\
&= 2\ln(1+u) \\
&= 2\ln(1+\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

7. On reconnait une fonction de la forme $u'u^{-1/2}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}(1+\ln x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\ln x}.\end{aligned}$$

8. On intègre par parties :

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \int x \times \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

9. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x &= x\ln(1+x^2) - \int x \times \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln(1+x^2) - 2(x - \arctan x).\end{aligned}$$

10. On fait le changement de variable $t = \sqrt{e^x - 1}$, soit $x = \ln(t^2+1)$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t}\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t && (2t\,\mathrm{d}t = (t^2+1)\,\mathrm{d}x) \\ &= 2\arctan t \\ &= 2\arctan\sqrt{e^x-1}\end{aligned}$$

11. On fait le changement de variable $x = \sin t$. Pour $x \in [-1,1]$, on a $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc $\cos t \geq 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int |\cos t|\cos(t)\,\mathrm{d}t && (\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t) \\ &= \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x).\end{aligned}$$

On peut simplifier cette dernière expression. En effet, $\sin(2t) = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$ car $\cos t \geq 0$. Ainsi

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

12. On fait le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(t^2-1)t} 2t\,\mathrm{d}t && (2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x)\\
&= \int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\\
&= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \ln(t-1) - \ln(t+1)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right).
\end{aligned}$$

13. On met le trinôme sous forme canonique :

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

À l'aide du changement de variable affine $t = 2/\sqrt{3}(x+1/2)$, l'intégrale se ramène au calcul d'une arctangente :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}(x+1/2)^2+1}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t && (\mathrm{d}t = 2/\sqrt{3}\,\mathrm{d}x)\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right).
\end{aligned}$$

14. On utilise le changement de variable $x = \tan t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(\tan^2 t+1)^2}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t && (\mathrm{d}x = (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t)\\
&= \int \frac{1}{\tan^2 t + 1}\,\mathrm{d}t\\
&= \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\sin(2\arctan x).
\end{aligned}$$

On peut simplifier cette dernière expression. En effet,

$$\begin{aligned}
\sin(2t) &= 2\sin(t)\cos(t)\\
&= 2\tan(t)\cos^2(t)\\
&= 2\frac{\tan(t)}{1+\tan^2(t)}.
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}.$$

int08_s **Solution 18.3** (énoncé). todo

int09_s **Solution 18.4** (énoncé). todo

int10_s **Solution 18.5** (énoncé). todo

int04_s **Solution 18.6** (énoncé). On définit $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ par
$$g(t) = f(t) - t.$$
Alors g est continue et $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Si g ne s'annule pas, elle est soit strictement négative soit strictement positive, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Son intégrale est alors strictement positive (resp. strictement négative). C'est une contradiction.

int06_s **Solution 18.7** (énoncé). todo

int01_s **Solution 18.8** (énoncé). On passe au log : tous les produits sont transformés en sommes.
$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n} &= \frac{1}{n}\Big[\ln((2n)!/n!) - n\ln(n)\Big] \\
&= \frac{1}{n}\left[\ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n} k\right) - n\ln(n)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k)\right) - n\ln(n)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln(k)-\ln(n)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}$$
On reconnaît une somme de Riemann : la limite de cette suite vaut
$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[t\ln(t) - t\Big]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - 1.
\end{aligned}$$
En repassant à l'exponentielle, on obtient
$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n} \to \exp(2\ln(2)-1) = \frac{4}{e}.$$

int02_s **Solution 18.9** (énoncé)**.** Pour tout k compris entre 0 et $n-1$, le point A_i a pour affixe complexe

$$e^{2ik\pi/n}.$$

La somme se réécrit donc, après factorisation par l'arc moitié :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} A_0A_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left|1-e^{2ik\pi/n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left|e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Cela peut se calculer explicitement, en utilisant la somme géométrique $\sum_{k=1}^{n-1}\exp(ik\pi/n)$. Ici, on remarque plutôt que c'est une somme de Riemann, et que la limite cherchée est donc

$$2\int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = 4/\pi.$$

int11_s **Solution 18.10** (énoncé)**.** todo

int03_s **Solution 18.11** (énoncé)**.** On commence par regarder ce qui se passe pour les fonctions en escalier. On note

$$u_n = \left(\int_0^1 f(t)^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}.$$

- Supposons que f est une fonction constante : $f(t)=\lambda$ pour tout t dans $[0,1]$, avec $\lambda \geqslant 0$. Alors

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\int_0^1 \lambda^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \\
&= (\lambda^n)^{1/n} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

- Supposons que f est une fonction en escalier sur deux morceaux : il existe $a \in \,]0,1[$ et $\lambda,\mu \geqslant 0$ tels que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } x \in [0,a] \\ \mu & \text{si } x \in \,]a,1] \end{cases}.$$

  Alors

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\int_0^1 f(t)^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \\
&= \left(\int_0^a \lambda^n\,\mathrm{d}t + \int_a^1 \mu^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \\
&= \left(a\lambda^n + (1-a)\mu^n\right)^{1/n}.
\end{aligned}$$

Supposons que $\lambda \leqslant \mu$. On factorise par μ^n :

$$\begin{aligned}u_n &= \left(\mu^n[a\,(\lambda/\mu)^n + (1-a)]\right)^{1/n}\\ &= \mu\,[a\,(\lambda/\mu)^n + (1-a)]^{1/n}.\end{aligned}$$

Pour calculer la limite, on passe au log :

$$\begin{aligned}\ln\left([a\,(\lambda/\mu)^n + (1-a)]^{1/n}\right) &= \frac{1}{n}\ln\left[a\,(\lambda/\mu)^n + (1-a)\right]\\ &\to 0,\end{aligned}$$

car $(\lambda/\mu)^n$ est une suite bornée. Donc $u_n \to \mu$.

- On se place dans le cas où f est une fonction en escalier : soient $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1$ une subdivision de $[0,1]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des réels positifs. On définit f par

$$f(x) = \begin{cases}\lambda_i & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i[\\ \lambda_k & \text{si } x = b\end{cases}.$$

En prenant i_0 un indice tel que $\lambda_{i_0} \geqslant \lambda_i$ pour tout i, on a :

$$\begin{aligned}u_n &= \left(\int_0^1 f(t)^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}\\ &= \left(\int_{x_0}^{x_1} \lambda_1^n\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \lambda_k^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}\\ &= \left((x_1-x_0)\lambda_1^n + \cdots + (x_k-x_{k-1})\lambda_k^n\right)^{1/n}\\ &= \left(\lambda_{i_0}^n\left((x_1-x_0)\,(\lambda_1/\lambda_{i_0})^n + \cdots + (x_k-x_{k-1})\,(\lambda_k/\lambda_{i_0})^n\right)\right)^{1/n}\\ &= \lambda_{i_0}\left((x_1-x_0)\,(\lambda_1/\lambda_{i_0})^n + \cdots + (x_k-x_{k-1})\,(\lambda_k/\lambda_{i_0})^n\right)^{1/n},\end{aligned}$$

et $u_n \to \lambda_{i_0}$ pour les mêmes raisons qu'avant. Autrement dit, $u_n \to \sup(f)$.

- Cas général : soit f une fonction continue quelconque. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe deux fonctions en escalier g et h telles que

$$g \leqslant f \leqslant h$$

et

$$h - g \leqslant \varepsilon.$$

Il est facile de voir que pour tout n,

$$u_n(g) \leqslant u_n(f) \leqslant u_n(h)$$

et

$$u_n(h) \leqslant u_n(g+\varepsilon).$$

D'après ce qu'on a vu avant, la suite $u_n(g)$ converge vers $\sup(g)$, et $\sup(g) \geqslant \sup(f) - \varepsilon$. Il existe donc $N \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n(g) \geqslant \sup(f) - 2\varepsilon.$$

De même, il existe $N' \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant N', \quad u_n(h) \leqslant \sup(f) + 2\varepsilon.$$

Alors pour $n \geqslant \max(N, N')$, on a

$$\sup(f) - 2\varepsilon \leqslant u_n(f) \leqslant \sup(f) + 2\varepsilon.$$

Cela permet de conclure que la suite u_n converge vers $\sup(f)$.

Voici une deuxième solution plus courte. f est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = \sup_{t\in[0,1]} f(t)$. On note $M = f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité de f en x, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [x-\delta, x+\delta], \quad |f(t) - M| \leqslant \varepsilon.$$

Comme f atteint son maximum M au point x, on a en fait

$$\forall t \in [x-\delta, x+\delta], \quad f(t) \geqslant M - \varepsilon.$$

Alors on peut minorer l'intégrale sur $[0,1]$ par l'intégrale sur $[x-\delta, x+\delta]$:

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\int_0^1 f(t)^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \\ &\geqslant \left(\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \\ &\geqslant \left(\int_{x-\delta}^{x+\delta} (M-\varepsilon)^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \\ &= \left(2\delta(M-\varepsilon)^n\right)^{1/n} \\ &= (2\delta)^{1/n}(M-\varepsilon). \end{aligned}$$

On peut aussi majorer brutalement par le sup :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\int_0^1 f(t)^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 M^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \\ &= M. \end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, $(2\delta)^{1/n}(M-\varepsilon)$ tend vers $(M-\varepsilon)$ donc il existe un rang $N \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad (2\delta)^{1/n}(M-\varepsilon) \geqslant (M-\varepsilon) - \varepsilon.$$

Pour de tels n, on a

$$M - 2\varepsilon \leqslant u_n \leqslant M.$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la suite (u_n) tend vers $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} f(t)$.

int12_s **Solution 18.12** (énoncé). 1. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t-1)f''(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[(t-1)f'(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f'(0) - (f(1) - f(0)) \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left(\int_0^1 (t-1)f''(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le \left(\int_0^1 (t-1)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 f''(t)^2\,\mathrm{d}t\right),$$

soit

$$1 \le \frac{1}{3}\int_0^1 f''(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

3. Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspond au cas où les deux fonctions sont colinéaires, soit : $f''(t) = \lambda(t-1)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. En intégrant, on obtient

$$f(t) = a + bt - \frac{\lambda}{2}t^2 + \frac{\lambda}{6}t^3.$$

Les conditions $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f'(0) = 1$ conduisent à

$$f(t) = t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3.$$

19 Convexité

conv01_s **Solution 19.1** (énoncé). 1. En passant au log, l'inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{n}(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n) \le \ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Il s'agit exactement de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction log, qui est concave.

2. Soient a, b, c les longueurs respectives des côtés d'un parallélépipède. La surface et le volume s'expriment respectivement comme

$$\begin{aligned}S &= 2(ab + bc + ca), \\ V &= abc.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $1/a$, $1/b$ et $1/c$, on obtient

$$\left(\frac{1}{abc}\right)^{1/3} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

soit

$$(abc)^{-1/3} \le \frac{1}{3}\left(\frac{bc + ca + ab}{abc}\right),$$

ou encore

$$V \le \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}.$$

Par ailleurs, étant donnée une surface S, le cube de côté $a = b = c = \sqrt{S/6}$ a pour volume $V = a^3 = (S/6)^{3/2}$. Cela montre qu'à surface donnée, le volume maximal d'un parallélépipède est $(S/6)^{3/2}$.

conv04_s **Solution 19.2** (énoncé). 1. (a) Il suffit de poser $t = (y-x)/(y-a)$. Comme f est convexe, on a

$$f(x) = f(ta + (1-t)y) \leq tf(a) + (1-t)f(y),$$

soit

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(y) - f(a)) = \frac{x-a}{y-a}(f(y) - f(a)),$$

ou encore

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y-a}.$$

(b) On utilise cette fois $t = (a-y)/(a-x)$ de sorte que $y = tx + (1-t)a$. L'inégalité de convexité s'écrit alors

$$f(y) = f(tx + (1-t)a) \leq tf(x) + (1-t)f(a),$$

soit

$$\frac{f(y) - f(a)}{y-a} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

(c) D'après les questions précédentes, la fonction φ_a est croissante sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$. Les fonctions φ_x et φ_y vérifient la même propriété. Ainsi

$$\varphi_a(x) = \varphi_x(a) \leq \varphi_x(y) = \varphi_y(x) \leq \varphi_y(a) = \varphi_a(y).$$

2. L'application $\varphi_a \colon \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

est croissante (croissance des cordes). De plus, on a $\varphi_a(a-1) \leq \varphi_a(x) \leq \varphi_a(a+1)$ lorsque $|x-a| \leq 1$, donc φ_a est bornée au voisinage de a. Par le théorème de la limite monotone, φ_a admet une limite à gauche et une limite à droite en a. Ainsi f est dérivable à gauche et à droite en x.

3. Soit λ un réel tel que $\lim_{a^-} \varphi_a \leq \lambda \leq \lim_{a^+} \varphi_a$. Remarque : si f est dérivable en a alors λ est unique. Pour tout $x > a$, on a alors $\varphi_a(x) \geq \lambda$, soit

$$f(x) \geq f(a) + \lambda(x-a).$$

De même, pour $x < a$ on a $\varphi_a(x) \leq \lambda$, soit

$$f(x) \geq f(a) + \lambda(x-a).$$

Ainsi, il suffit de poser $\mu = f(a) - \lambda a$ pour vérifier la propriété demandée.

4. L'application $\varphi_0 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$ car f est bornée. Or par croissance des cordes, φ_0 est croissante. Ainsi φ_0 est identiquement nulle, donc f est constante.

conv03_s **Solution 19.3** (énoncé). x est le barycentre des points pondérés $(0, y/(x+y))$ et $(x+y, x/(x+y))$. En utilisant la concavité de f, on a

$$f\left(\frac{y}{x+y} \times 0 + \frac{x}{x+y} \times (x+y)\right) \geq \frac{y}{x+y} f(0) + \frac{x}{x+y} f(x+y),$$

soit

$$f(x) \geq \frac{y}{x+y} f(0) + \frac{x}{x+y} f(x+y).$$

Par symétrie, on a également

$$f(y) \geq \frac{x}{x+y} f(0) + \frac{y}{x+y} f(x+y).$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$f(x) + f(y) \geq f(x+y)$$

car $f(0) \geq 0$.

conv05_s **Solution 19.4** (énoncé). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x) \geq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\varphi(x_0) = ax_0 + b$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t &\geq \int_0^1 (af(t) + b)\,\mathrm{d}t \\ &= a \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + b \\ &= ax_0 + b \\ &= \varphi(x_0) \\ &= \varphi\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

conv02_s **Solution 19.5** (énoncé).

1. L'hypothèse sur α, β et γ s'exprime $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Ainsi $\tan(\alpha + \beta) = \tan(\pi - \gamma) = -\tan(\gamma)$. La formule de duplication de la tangente s'écrit :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)},$$

soit

$$-\tan(\gamma) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)},$$

ce qu'on voulait.

2. Posons $\alpha = \arctan(a)$, $\beta = \arctan(b)$ et $\gamma = \arctan(c)$. Comme a, b et c sont positifs, α, β, γ sont dans l'intervalle $]0, \pi/2[$. Il reste à montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\beta)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\gamma)}} \leq \frac{3}{2},$$

soit

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leq \frac{3}{2}.$$

On utilise la formule de duplication de la tangente :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \\ &= \frac{a+b}{1-ab} \\ &= \frac{abc-c}{1-ab} \\ &= -c \\ &= -\tan(\gamma) \\ &= \tan(\pi-\gamma).\end{aligned}$$

Or $\alpha+\beta$ et $\pi-\gamma$ sont dans l'intervalle $]0,\pi[$ et la fonction tangente est injective sur cet intervalle. Donc $\alpha+\beta=\pi-\gamma$. On peut alors appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction cosinus, qui est concave sur $[0,\pi/2]$:

$$\frac{\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)}{3} \leq \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

20 Séries

ser05_s **Solution 20.1** (énoncé). On définit pour tout n les parties positive et négative de u_n :

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^+$$

est croissante. De plus, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k^+ \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} (u_k^+ + u_k^-) \\ &= \sum_{k=0}^{n} |u_k| \\ &\leqslant S, \end{aligned}$$

où $S=\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$. (S_n) est donc croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Il reste à écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (u_k^+ - u_k^-) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (2u_k^+) - \sum_{k=0}^{n} (u_k^+ + u_k^-) \\ &= 2S_n - \sum_{k=0}^{n} |u_k|, \end{aligned}$$

pour voir que $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge.

ser06_s **Solution 20.2** (énoncé). Notons l la somme de la série et S_n les sommes partielles : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors (S_n) et (S_{n-1}) convergent vers l, donc la suite de terme général $S_n - S_{n-1} = u_n$ converge vers $l - l = 0$.

ser07_s **Solution 20.3** (énoncé). On utilise une comparaison série-intégrale. Soit $n \geqslant 1$ et une fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Alors

$$\forall t \in [n, n+1], \quad f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1).$$

En intégrant sur le segment $[n, n+1]$, on obtient

$$\int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t,$$

soit encore

$$f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n+1).$$

On somme pour n allant de 1 à $N-1$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) \geqslant \int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1).$$

Comme on veut encadrer la série des $f(n)$, on fait un changement de variables dans la somme :

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) \geqslant \int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -f(1) + \sum_{n=1}^{N} f(n),$$

et finalement

$$f(1) + \int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{N} f(n) \geqslant f(N) + \int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{20.1}$$ ser07:1

Ici, on prend

$$f(t) = \frac{1}{t^\alpha},$$

qui est bien une fonction décroissante et continue. Pour $\alpha \neq 1$, une primitive de f est l'application

$$t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Donc (20.1) appliquée à f donne :

$$1 + \frac{N^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{N^\alpha} + \frac{N^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}. \tag{20.2}$$ ser07:2

— Si $\alpha < 1$, le terme de droite dans (20.2) tend vers $+\infty$ donc la série diverge.

— Si $\alpha > 1$, le terme de gauche dans (20.2) tend vers une constante finie. Donc $(\sum_{n=1}^{N} 1/n^\alpha)$ est une suite bornée. Comme elle est de plus croissante, le théorème de la limite monotone nous dit que la série converge.

— Si $\alpha = 1$, une primitive de f est $t \mapsto \ln(t)$ donc on obtient l'inégalité

$$1 + \ln(N) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{N} + \ln(N).$$

Comme le terme de droite tend vers $+\infty$, la série diverge. Au passage, on obtient l'équivalent quand $N \to +\infty$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N.$$

ser01_s **Solution 20.4** (énoncé)**.** Posons

$$u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2}.$$

Soit (a,b,c) un triplet tel que la série converge. En particulier, u_n tend vers 0 donc $u_n/\sqrt{n}$ également, mais $u_n/\sqrt{n} \to a+b+c$. Par unicité de la limite,

$$a+b+c=0.$$

Pour savoir si la série des u_n est sommable, on essaie de trouver un équivalent de (u_n) :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{n}\left(a + b\sqrt{1-\frac{1}{n}} + c\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)\\
&= \sqrt{n}\left[a + b\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + c\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\
&= -\frac{b+2c}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

On voit que si $b+2c \neq 0$, alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{b+2c}{2\sqrt{n}}.$$

C'est une contradiction car la série $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge. Conclusion : $b+2c=0$, donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, il faut montrer que si $(a,b,c) = (a,-2a,a)$ alors la série $\sum u_n$ converge. Quitte à diviser par a, on peut supposer que

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}\\
&= \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) - \left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}\right).
\end{aligned}$$

La série des u_n est télescopique : les sommes partielles s'écrivent

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{n=2}^{N} \left[\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) - \left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}\right)\right]\\
&= \left(\sqrt{N} - \sqrt{N-1}\right) - \left(\sqrt{2-1} - \sqrt{2-2}\right)\\
&= \sqrt{N} - \sqrt{N-1} - 1.
\end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -1,$$

soit

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -a$$

dans le cas général.

ser02_s **Solution 20.5** (énoncé). Soit $n \geqslant 1$. L'entier $E(\sqrt{n+1})-E(\sqrt{n})$ vaut 1 si il existe un entier p tel que $\sqrt{n} < p \leqslant \sqrt{n+1}$, et 0 sinon. La première condition peut se réécrire $n-1 < p^2-1 \leqslant n$, soit encore $n = p^2 - 1$. Donc on peut réécrire la série et effectuer un changement de variable :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n} &= \sum_{\substack{n=1 \\ \exists p / n=p^2-1}}^{+\infty} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2-1}.\end{aligned}$$

La fraction rationnelle $1/(p^2-1)$ se décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p+1)}.$$

La série est télescopique : les sommes partielles (pour $P \geqslant 2$) s'écrivent

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{P} \frac{1}{p^2-1} &= \sum_{p=2}^{P} \left[\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p+1)}\right] \\ &= \sum_{p=2}^{P} \left[\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2p}\right] + \sum_{p=2}^{P} \left[\frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p+1)}\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2P} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(P+1)}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2-1} = \frac{3}{4}.$$

ser03_s **Solution 20.6** (énoncé). Pour $N \geqslant 0$, on définit les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ suivants :

$$T_N = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid k + l \leqslant N\}$$

et

$$C_N = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leqslant N \text{ et } l \leqslant N\}.$$

Ce sont respectivement des triangles et des carrés (faire un dessin). Notons que

$$T_N \subset C_N \subset T_{2N}.$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}|w_n| &= \sum_{n=0}^{N}\left|\sum_{k+l=n} u_k v_l\right| \\ &\leqslant \sum_{(k,l)\in T_N} |u_k v_l| \\ &\leqslant \sum_{(k,l)\in C_N} |u_k v_l| \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N}|u_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{N}|v_n|\right).\end{aligned}$$

Comme les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, la suite des sommes partielles de la série $\sum|w_n|$ est majorée, donc $\sum w_n$ converge absolument. Il reste à calculer sa somme. Pour cela, on se ramène à des séries à termes positifs :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N} w_n - \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)\right| &= \left|\sum_{(k,l)\in T_N} u_k v_l - \sum_{(k,l)\in C_N} u_k v_l\right| \\ &= \left|\sum_{(k,l)\in C_N\setminus T_N} u_k v_l\right| \\ &\leqslant \sum_{(k,l)\in C_N\setminus T_N} |u_k v_l| \\ &= \sum_{(k,l)\in C_N} |u_k v_l| - \sum_{(k,l)\in T_N} |u_k v_l|.\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remarquer que

$$\sum_{(k,l)\in T_N} |u_k v_l| \leqslant \sum_{(k,l)\in C_N} |u_k v_l| \leqslant \sum_{(k,l)\in T_{2N}} |u_k v_l|.$$

Comme $\sum_{(k,l)\in C_N}|u_k v_l|$ converge, on obtient le résultat voulu.

ser04_s **Solution 20.7** (énoncé)**.** On raisonne par l'absurde, et on suppose que la série converge. Notons les sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(\ln n)}{n}$$

pour $N \geqslant 1$, et posons pour tout $k \geqslant 1$

$$[A_k, B_k] = \left[\exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \exp\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right].$$

Dans l'intervalle $[A_k, B_k]$, il y a au moins $\lfloor B_k - A_k \rfloor$ entiers. Or pour tout $n \in [A_k, B_k]$, $\cos(\ln n) \geqslant \sqrt{2}/2$. Cela donne une minoration :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in[A_k,B_k]} \frac{\cos(\ln n)}{n} &\geqslant \sum_{n\in[A_k,B_k]} \frac{\sqrt{2}/2}{B_k} \\ &\geqslant \lfloor B_k - A_k \rfloor \frac{\sqrt{2}/2}{B_k} \\ &\geqslant \frac{B_k - A_k - 1}{B_k}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Or
$$\frac{A_k}{B_k} = \exp(-\pi/2).$$
Il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout k assez grand,
$$S_{\lfloor B_k \rfloor} - S_{\lceil A_k \rceil} = \sum_{n \in [A_k, B_k]} \frac{\cos(\ln n)}{n} \geqslant C.$$
C'est en contradiction avec le fait que S_N converge vers une limite finie.

21 Probabilités

pro01_s **Solution 21.1** (énoncé)**.** Définissons pour $n \geqslant 0$ l'événement
$$A_n = \{\text{L'ordinateur } n \text{ reçoit l'information « vrai »}\}.$$
Alors $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(A_{n+1}|\overline{A_n}) = p$. De plus, A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de Ω donc en utilisant la formule des probabilités totales on a pour tout $n \geqslant 1$:
$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}\Big((A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap \overline{A_n})\Big) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|\overline{A_n})\mathbb{P}(\overline{A_n}) \\ &= (1-p)p_n + p(1-p_n) \\ &= (1-2p)p_n + p. \end{aligned}$$
La suite (p_n) est donc une suite arithmético-géométrique. La méthode générale pour trouver la solution à cette équation consiste à translater la suite d'un réel α : si l'on définit $u_n = p_n + \alpha$, alors
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = 2p\alpha + (1-2p)u_n + p.$$
On fait en sorte d'annuler le terme constant : on prend donc $\alpha = -1/2$ de sorte que
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = (1-2p)u_n,$$
et la suite (u_n) est géométrique. On en déduit son expression :
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = (1-2p)^n u_0.$$
Ainsi
$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1, \quad p_n &= \frac{1}{2} + (1-2p)^n \left(p_0 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n. \end{aligned}$$
On peut remarquer plusieurs choses :

— Lorsque $n \to +\infty$, $p_n \to 1/2$ (si $0 < p < 1$). En effet, au bout d'un temps très grand, l'information s'est perdue : il y a eu tellement d'erreurs qu'il est impossible de prédire quelle information on obtiendra.

— Si $p=0$, il n'y a pas d'erreur du tout et on a $p_n = 1$ pour tout n.

— Si $p=1$, il y a une erreur à tous les coups et p_n vaut 1 si n est impair, et 0 si n est pair.

— Si $p=1/2$, p_n vaut $1/2$ pour tout n. Les événements A_n sont tous indépendants.

pro02_s **Solution 21.2** (énoncé)**.** Notons pour $1 \leqslant k \leqslant N$ l'événement

$$A_k = \{\text{il y a un antidote dans le coffre } k\}.$$

Attention, les A_k ne forment pas une partition de Ω. En effet, il se peut (avec probabilité $1-p$) qu'il n'y ait pas d'antidote du tout. En revanche, si on note

$$B = \Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \{\text{il n'y a pas d'antidote du tout}\},$$

et

$$A = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k = \{\text{il y a un antidote dans l'un des } N-1 \text{ premiers coffres}\},$$

alors la famille (A, A_N, B) forme une partition de Ω. On a $\mathbb{P}(A_N) = p/N$ et $\mathbb{P}(B) = 1-p$. La probabilité que l'antidote se trouve dans le dernier coffre, sachant qu'il ne se trouvait pas dans l'un des $N-1$ premiers s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_N|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{N-1}}) &= \mathbb{P}(A_N|\overline{A}) \\
&= \mathbb{P}(A_N|A_N \cup B) \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_N \cap (A_N \cup B))}{\mathbb{P}(A_N \cup B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_N)}{\mathbb{P}(A_N) + \mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{p/N}{p/N + 1 - p} \\
&= \frac{1}{1 + N(1-p)/p}.
\end{aligned}$$

pro03_s **Solution 21.3** (énoncé)**.** 1. On définit les événements suivants pour $0 \leqslant k \leqslant N$ et $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
B_k &= \{\text{On a choisi l'urne } k \text{ au début}\}, \\
A_n &= \{\text{Les } n \text{ premiers tirages sont des boules blanches}\}.
\end{aligned}$$

Si on choisit l'urne k au début, à chaque tirage on a une probabilité k/N d'avoir une boule blanche. Donc la probabilité que les n premiers tirages soient des boules blanches est $(k/N)^n$. Autrement dit,

$$\mathbb{P}(A_n|B_k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Or les B_k forment une partition de Ω donc, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}((A_n \cap B_0) \cup \cdots \cup (A_n \cap B_N)) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(A_n \cap B_k) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(A_n|B_k)\mathbb{P}(B_k) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{N}\right)^n .\end{aligned}$$

La probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) &= \frac{\mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_n)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}} \\ &= \frac{1}{N}\frac{\sum_{k=0}^{N} k^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} k^{n}}.\end{aligned}$$

2. Lorsque $N \to +\infty$, on a une somme de Riemann :

$$\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n \to \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{n+1}{n+2}.$$

22 Variables aléatoires

va01_s **Solution 22.1** (énoncé). Soit $x \in X(\Omega)$ (en particulier, $\mathbb{P}(X = x) > 0$). Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x) &= \mathbb{P}(X = x \text{ et } f(X) = f(x)) \\ &= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(f(X) = f(x)),\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}(f(X) = f(x)) = 1$: la variable aléatoire $f(X)$ est constante égale à $f(x)$. Comme c'est vrai pour tout x, l'application f est constante sur $X(\Omega)$.

va02_s **Solution 22.2** (énoncé). 1. On définit pour tout k

$$Y_k = \frac{X_k + 1}{2},$$

de sorte que $Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables de Bernouilli : $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(Y_k = 0) = 1/2$. On sait alors que la somme

$$Y_1 + \cdots + Y_n$$

suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = 0) &= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = 0)\\ &= \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_n = \frac{n}{2})\\ &= \begin{cases} \binom{n}{n/2}\frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}\end{aligned}$$

2. D'après la formule de Stirling

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{2n} = 0) &= \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}\\ &\sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2 4^n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.\end{aligned}$$

va03_s **Solution 22.3** (énoncé)**.** N suit une loi géométrique :

$$\mathbb{P}(N = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Conditionnellement à la valeur de N, X suit une loi binomiale de paramètre (n, p). Donc pour $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \text{ et } N = n)\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n)\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} p(1-p)^{n-1}\\ &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(1-p)^{2n}.\end{aligned}$$

En posant $x = (1-p)^2$, on s'est ramené à la somme suivante :

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

Utilisons la relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ et des changements de variable pour aboutir à une relation de récurrence :

$$\begin{aligned}S_k(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] x^n\\ &= \sum_{n=k-1}^{+\infty} \binom{n}{k-1} x^{n+1} + \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n+1}\\ &= xS_{k-1}(x) + xS_k(x).\end{aligned}$$

Ainsi
$$S_k(x) = \frac{x}{1-x} S_{k-1}(x).$$
Comme $S_0(x) = 1/(1-x)$ on en déduit que pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout x :
$$S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Finalement,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+1} \frac{(1-p)^{2k}}{(2p-p^2)^{k+1}} \\
&= \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Pour $k = 0$ il faut retirer le premier terme de la somme, car l'événement $\{N = 0\}$ est de probabilité 0 :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 0 \mid N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n p(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2n} \\
&= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} \\
&= \frac{1-p}{2-p}.
\end{aligned}$$

Dans le calcul de l'espérance de X, on reconnaît une somme de la forme $S_1(\lambda) = \sum_{k\geqslant 1} k\lambda^k$:
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \\
&= \frac{1}{(1-p)(2-p)} S_1(\lambda),
\end{aligned}$$
où $\lambda = (1-p)/(2-p)$
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1-p)(2-p)} \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

va04_s **Solution 22.4** (énoncé)**.** Tirer simultanément k boules revient à se donner une partie à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$ (choisi de manière uniforme). Se donner un tel sous-ensemble dont le maximum est i revient à choisir les $k-1$ premiers éléments parmi $\{1, \ldots, i-1\}$. Autrement dit,

$$\mathbb{P}(N = i) = \frac{\dbinom{i-1}{k-1}}{\dbinom{n}{k}}$$

pour $i \in [\![k, N]\!]$.

Calculons à présent l'espérance de N. On utilise la relation $i\binom{i-1}{k-1} = k\binom{i}{k}$ pour simplifier l'expression :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{i=k}^{n} i\mathbb{P}(N = i) \\
&= \binom{n}{k}^{-1} \sum_{i=k}^{n} i\binom{i-1}{k-1} \\
&= k\binom{n}{k}^{-1} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}.
\end{aligned}$$

La somme qui reste se calcule pas-à-pas à l'aide de la formule de récurrence $\binom{i}{k} + \binom{i}{k+1} = \binom{i+1}{k+1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} &= \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} \\
&= \underbrace{\binom{k+1}{k+1} + \binom{k+1}{k}} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} \\
&= \underbrace{\binom{k+2}{k+1} + \binom{k+2}{k}} + \cdots + \binom{k+n}{k} \\
&= \binom{k+3}{k+1} + \cdots + \binom{k+n}{k},
\end{aligned}$$

etc. Finalement

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Conclusion : l'espérance de N vaut

$$\mathbb{E}(N) = k\frac{\dbinom{n+1}{k+1}}{\dbinom{n}{k}} = \frac{k(n+1)}{k+1}.$$

va05_s **Solution 22.5** (énoncé)**.** Supposons qu'il est possible de piper les deux dés de sorte que leur somme suive une loi uniforme. Notons p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier (resp. le second) dé. Définissons alors les polynômes suivants :

$$\begin{aligned}
P(X) &= p_1 + p_2X + p_3X^2 + p_4X^3 + p_5X^4 + p_6X^5, \\
Q(X) &= q_1 + q_2X + q_3X^2 + q_4X^3 + q_5X^4 + q_6X^5.
\end{aligned}$$

En développant le produit PQ et en regroupant les termes, on obtient

$$\begin{aligned}P(X)Q(X) = p_1q_1 & \\ &+ (p_1q_2 + p_2q_1)X \\ &+ (p_1q_3 + p_2q_2 + p_3q_1)X^2 \\ &\vdots \\ &+ (p_5q_6 + p_6q_5)X^9 \\ &+ p_6q_6X^{10}.\end{aligned}$$

Or, pour tout k, la probabilité que la somme des deux dés vaille k est exactement $\sum_{i+j=k} p_iq_j$; d'après l'hypothèse on a donc

$$P(X)Q(X) = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}X + \cdots + \frac{1}{11}X^{10}.$$

Décomposons à présent $P(X)Q(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Comme

$$P(X)Q(X) = \frac{1}{11}\frac{X^{11}-1}{X-1},$$

les racines de $P(X)Q(X)$ sont les racines 11-ièmes de l'unité à l'exception de 1 : autrement dit,

$$P(X)Q(X) = \frac{1}{11}\prod_{k=1}^{10}\left(X - e^{2ik\pi/11}\right).$$

On a décomposé le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. On peut à présent regrouper les termes deux à deux pour obtenir des polynômes réels :

$$\begin{aligned}P(X)Q(X) &= \frac{1}{11}\prod_{k=1}^{5}\left(X - e^{2ik\pi/11}\right)\left(X - e^{-2ik\pi/11}\right) \\ &= \frac{1}{11}\prod_{k=1}^{5}\left(X^2 - 2\cos(2ik\pi/11) + 1\right).\end{aligned}$$

On a obtenu $P(X)Q(X)$ comme produit de 5 polynômes irréductibles (appelons-les A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) dans $\mathbb{R}[X]$. Mais P peut s'écrire (à constante multiplicative près) comme un produit de certains parmi ces polynômes — par exemple, $P = A_1A_4A_5$. Or les A_i sont tous de degré 2, ce qui contredit le fait que P est de degré 5. Conclusion : il est impossible d'obtenir une loi uniforme en pipant les dés.

va06_s **Solution 22.6** (énoncé). 1. I et S ne suivent pas la loi uniforme. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I = n) &= \mathbb{P}(U = n \text{ et } V = n) \\ &= \mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = n) \\ &= \frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

et de même $\mathbb{P}(S = 1) = 1/n^2$.

2. I et S ne sont pas indépendantes. Par exemple, on a toujours $I \leqslant S$.

3. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on utilise l'indépendance de U et V :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I \geqslant k) &= \mathbb{P}(U \geqslant k \text{ et } V \geqslant k)\\ &= \mathbb{P}(U \geqslant k)\mathbb{P}(V \geqslant k)\\ &= \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I = k) &= \mathbb{P}(I \geqslant k) - \mathbb{P}(I \geqslant k+1)\\ &= \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^2\\ &= \frac{2(n-k)+1}{n^2}.\end{aligned}$$

4. On aura besoin de deux formules :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

d'une part, et d'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) - n^3 + 3\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) - 3n^2 + 3\frac{n(n-1)}{2} + n,\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n^3 + 3n^2 - 3\frac{n(n-1)}{2} - n}{3}\\ &= \frac{n(2n^2 + 6n - 3(n-1) - 2)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

On calcule l'espérance de I en utilisant les formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{2(n-k)+1}{n^2}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(2(n-k)+1)\\ &= \frac{2n+1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= \frac{(2n+1)n(n+1)}{2n^2} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{6n}.\end{aligned}$$

5. On peut déterminer la loi de S de la même manière que pour I. Pour aller plus vite, on peut aussi « retourner » les variables. On définit

$$\begin{aligned}\widetilde{U} &= n+1-U\\ \widetilde{V} &= n+1-V,\end{aligned}$$

de sorte que $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ sont encore des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[\![1,n]\!]$. En particulier, $\widetilde{I} = \min(\widetilde{U},\widetilde{V})$ suit la même loi que I. On a

$$\widetilde{I} = n+1-S,$$

et comme $\widetilde{I}$ suit la même loi que I, pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k) &= \mathbb{P}(n+1-\widetilde{I}=k)\\ &= \mathbb{P}(\widetilde{I}=n+1-k)\\ &= \mathbb{P}(I=n+1-k)\\ &= \frac{2(n-(n+1-k))+1}{n^2}\\ &= \frac{2k-1}{n^2}.\end{aligned}$$

6. Déterminer la loi du couple (I,S) revient à déterminer $\mathbb{P}(I=k \text{ et } S=l)$ pour tout couple $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$.
   — Si $k>l$, $\mathbb{P}(I=k \text{ et } S=l)=0$, car $I \leqslant S$.
   — Si $k=l$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I=k \text{ et } S=l) &= \mathbb{P}(U=k \text{ et } V=k)\\ &= \mathbb{P}(U=k)\mathbb{P}(V=k)\\ &= \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

   — Si $k<l$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I=k \text{ et } S=l) &= \mathbb{P}(U=k \text{ et } V=l)+\mathbb{P}(V=k \text{ et } U=l)\\ &= \mathbb{P}(U=k)\mathbb{P}(V=l)+\mathbb{P}(V=k)\mathbb{P}(U=l)\\ &= \frac{2}{n^2}.\end{aligned}$$

va07_s **Solution 22.7** (énoncé)**.** On numérote les boules blanches de 1 à n et les boules noires de $n+1$ à $2n$. Il y a alors

$$\binom{2n}{n}$$

tirages (de n boules simultanées) possibles. Il reste à compter le nombre de tirages qui donnent k boules blanches (avec $0 \leqslant k \leqslant n$). Cela revient à choisir k boules blanches (parmi les n blanches) et $n-k$ boules noires (parmi les n noires). Il y en a donc

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

De manière formelle, définissons l'ensemble des tirages :

$$\mathcal{T} = \{A \subset [\![1, 2n]\!] \mid \mathrm{Card}(A) = n\}$$

qui est de cardinal $\binom{2n}{n}$, et l'ensemble des tirages qui donnent k boules blanches

$$\mathcal{T}_k = \{A \subset [\![1, 2n]\!] \mid \mathrm{Card}(A) = n \text{ et } \mathrm{Card}(A \cap [\![1, n]\!]) = k\},$$

qu'on veut dénombrer. On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathcal{T}_k &\to \mathcal{P}_k([\![1, n]\!]) \times \mathcal{P}_{n-k}([\![n+1, 2n]\!]) \\ A &\mapsto (A \cap [\![1, n]\!], A \cap [\![n+1, 2n]\!]) \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_k([\![1, n]\!])$ désigne l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$. Elle est bien définie et bijective, donc il y a égalité des cardinaux :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{T}_k) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k([\![1, n]\!]))\,\mathrm{Card}(\mathcal{P}_{n-k}([\![n+1, 2n]\!])) = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Finalement, on a obtenu la loi de X :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\dbinom{n}{k}\dbinom{n}{n-k}}{\dbinom{2n}{n}}.$$

L'espérance de X s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} \\ &= n\binom{2n}{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}. \end{aligned}$$

L'astuce pour calculer cette somme consiste à développer de deux manières différentes le polynôme $(1+X)^{2n-1}$. D'une part

$$(1+X)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k,$$

d'autre part

$$\begin{aligned} (1+X)^{2n-1} &= (1+X)^{n-1}(1+X)^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i+j=k} \binom{n-1}{i}\binom{n}{j}\right) X^k. \end{aligned}$$

Les deux polynômes étant égaux, tous leurs coefficients sont égaux deux à deux. Regardons le coefficient devant X^{n-1} :

$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n-1} &= \sum_{i+j=n-1}\binom{n-1}{i}\binom{n}{j}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\binom{n}{n-1-i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\binom{n}{n-i}.\end{aligned}$$

Conclusion : on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= n\binom{2n}{n}^{-1}\binom{2n-1}{n-1}\\ &= n\frac{n!^2(2n-1)!}{(2n)!n!(n-1)!}\\ &= \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

Remarque : on pouvait aussi utiliser un argument de symétrie pour éviter tous les calculs. La variance de X s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\\ &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}\\ &= \binom{2n}{n}^{-1}\sum_{k=2}^{n} n(k-1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}\\ &= \binom{2n}{n}^{-1}\sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}\binom{n}{n-k}\\ &= n(n-1)\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\binom{n}{n-k}.\end{aligned}$$

Pour calculer cette somme, de la même manière qu'avant, on écrit le polynôme $(1+X)^{2n-2}$ de deux manières différentes :

$$\sum_{k=0}^{2n-2}\binom{2n-2}{k}X^k = (1+X)^{2n-2} = \sum_{k=0}^{2n-2}\left(\sum_{i+j=k}\binom{n-2}{i}\binom{n}{j}\right)X^k.$$

On identifie les coefficients de degré $n-2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\binom{2n-2}{n-2} &= \sum_{i+j=n-2}\binom{n-2}{i}\binom{n}{j}\\ &= \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\binom{n}{n-2-i}\\ &= \sum_{i=2}^{n}\binom{n-2}{i-2}\binom{n}{n-i}.\end{aligned}$$

Conclusion : on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= n(n-1)\binom{2n}{n}^{-1}\binom{2n-2}{n-2} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} \\
&= n(n-1)\frac{(n!)^2(2n-2)!}{(2n)!(n-2)!n!} + \frac{n(2-n)}{4} \\
&= n(n-1)\frac{n(n-1)}{(2n)(2n-1)} + \frac{n(2-n)}{4} \\
&= \frac{2n(n-1)^2 + n(2-n)(2n-1)}{4(2n-1)} \\
&= \frac{n^2}{4(2n-1)}.
\end{aligned}$$

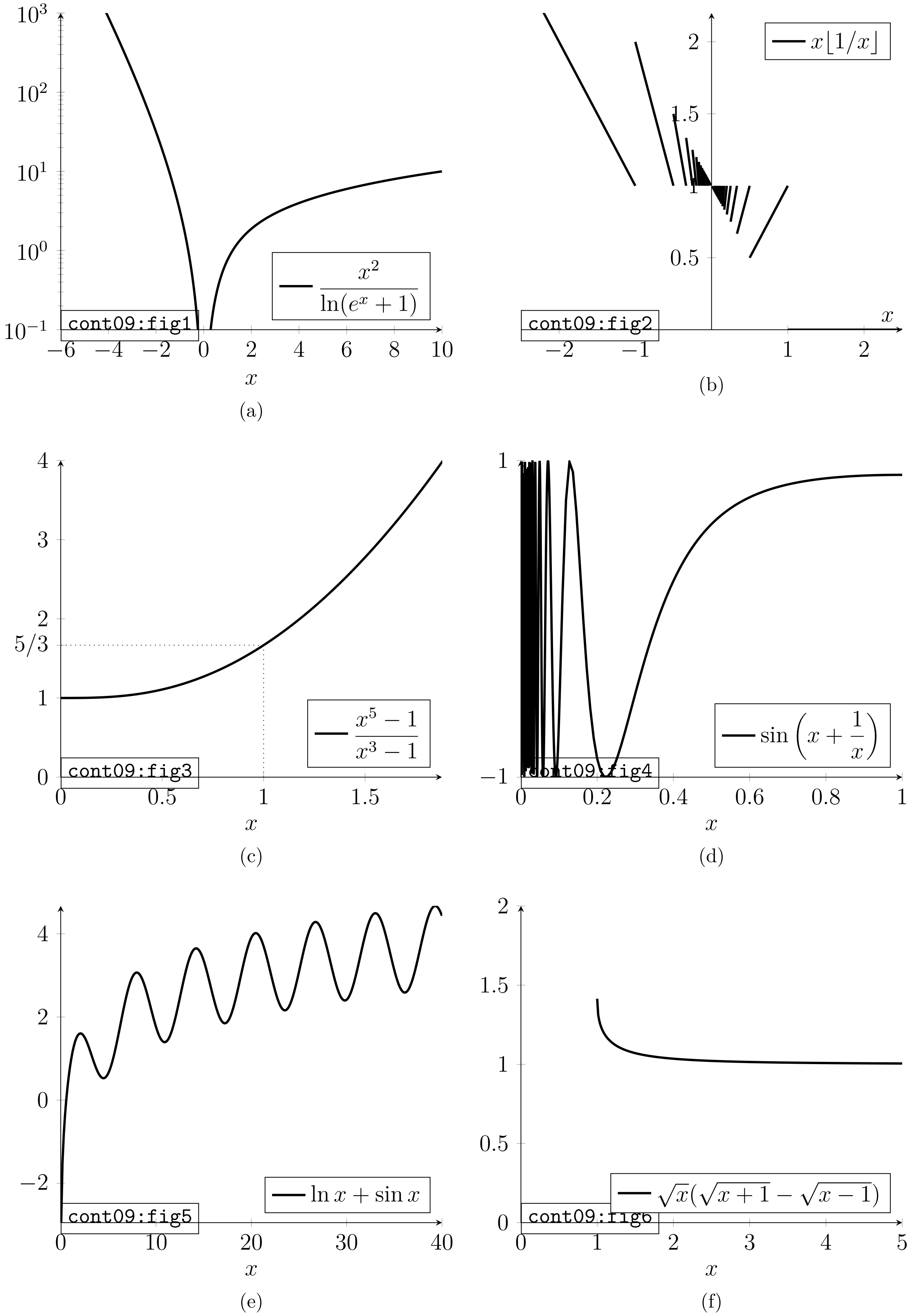
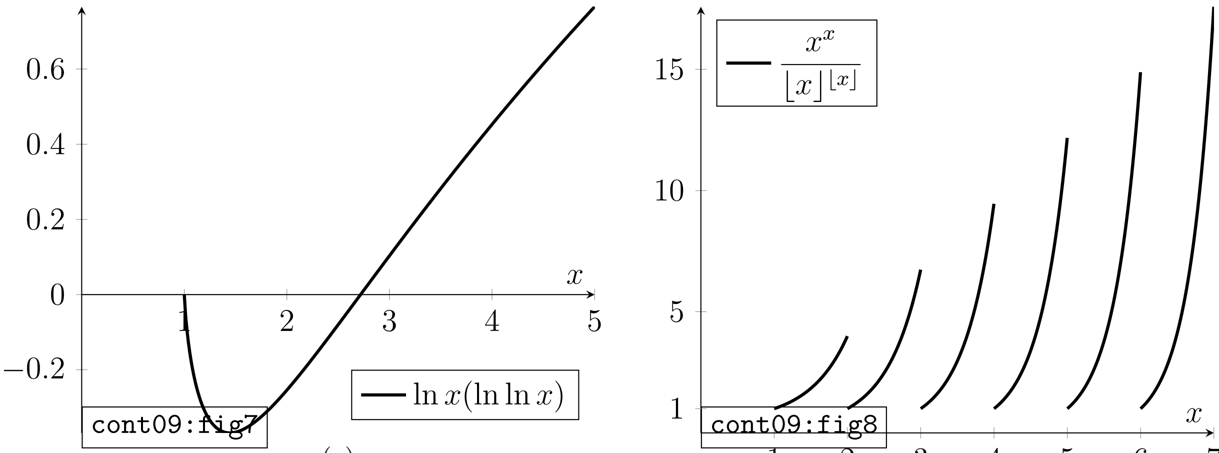


FIGURE 9 – Différents graphes



(g) (h)

nt09:fig

FIGURE 9 – Différents graphes

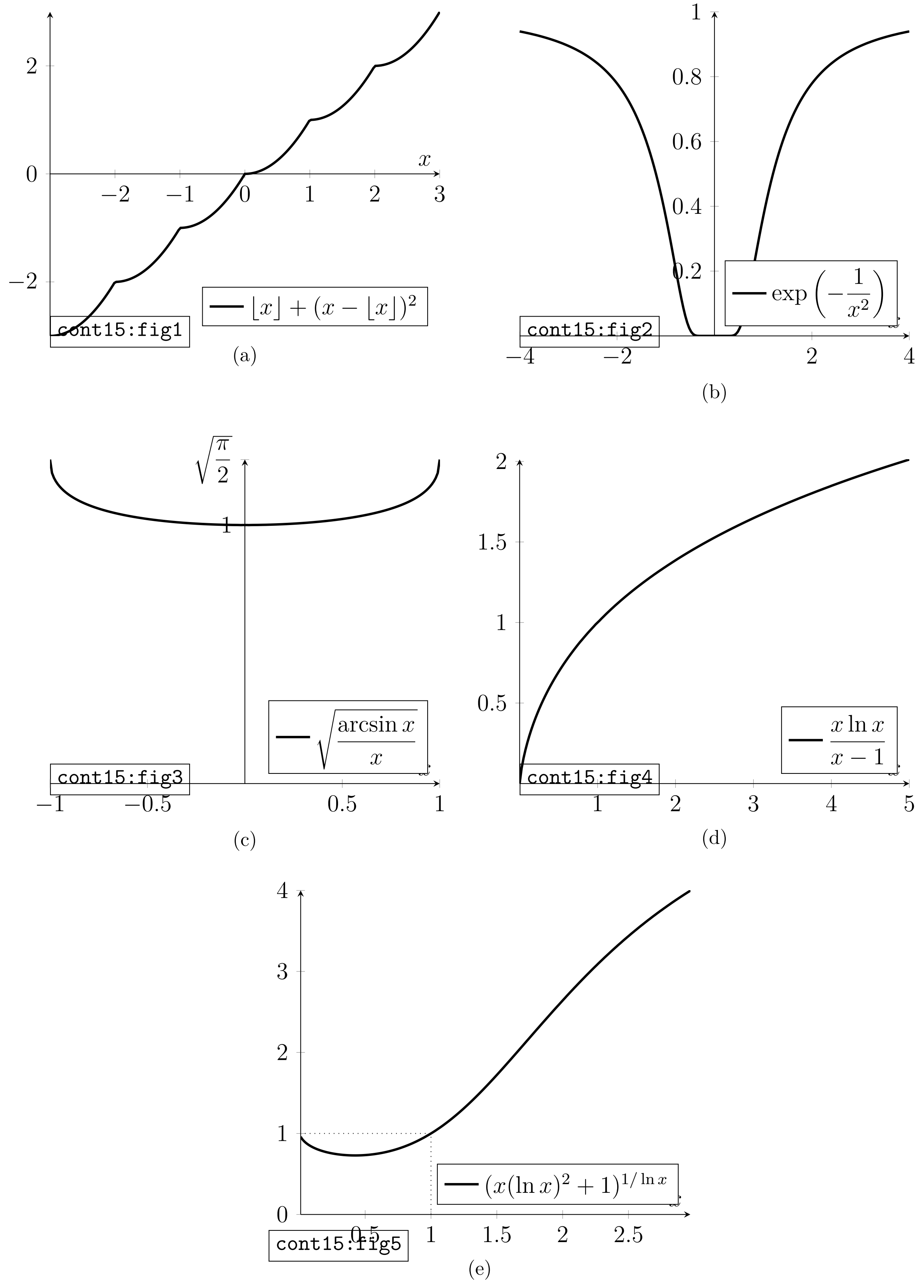
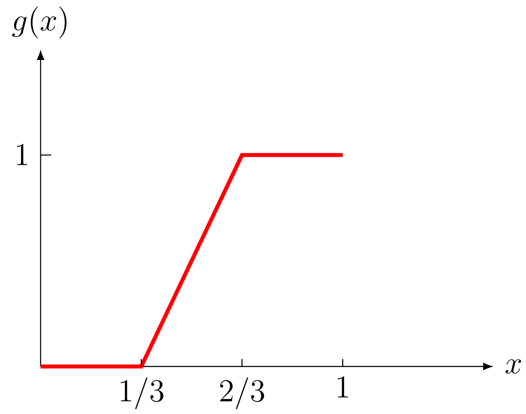
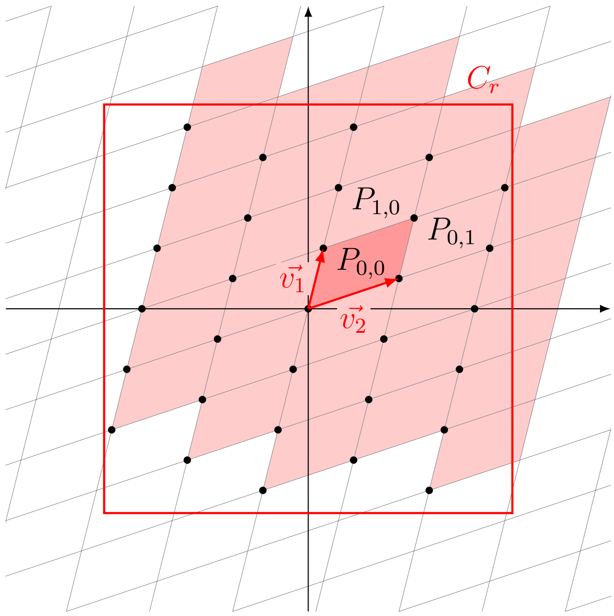


FIGURE 10 – Différents graphes



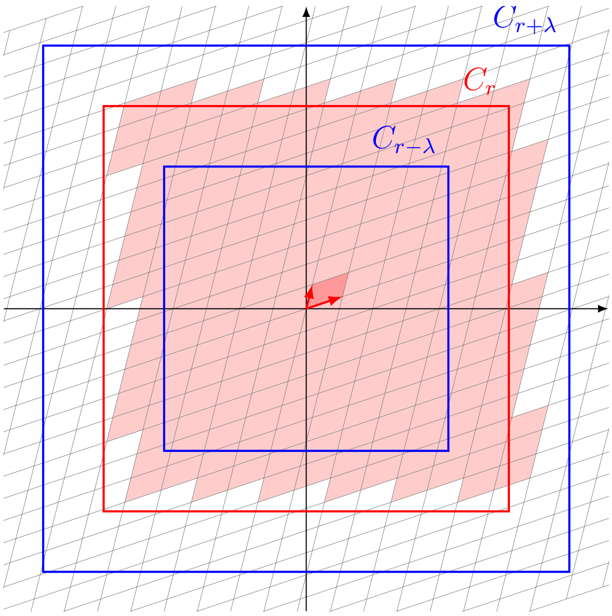
cont03:g

FIGURE 11 – Graphe d'une fonction g continue surjective de $]0, 1[$ vers $[0, 1]$

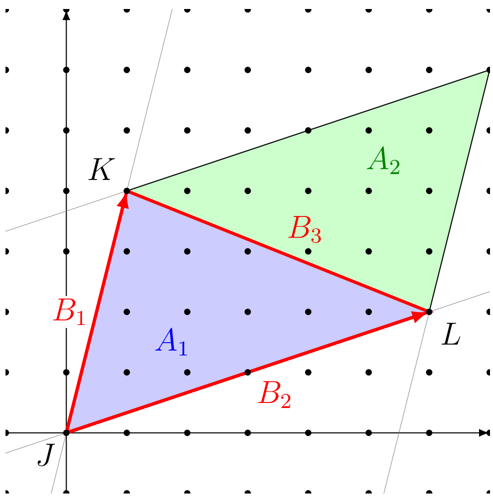


t07:fig1

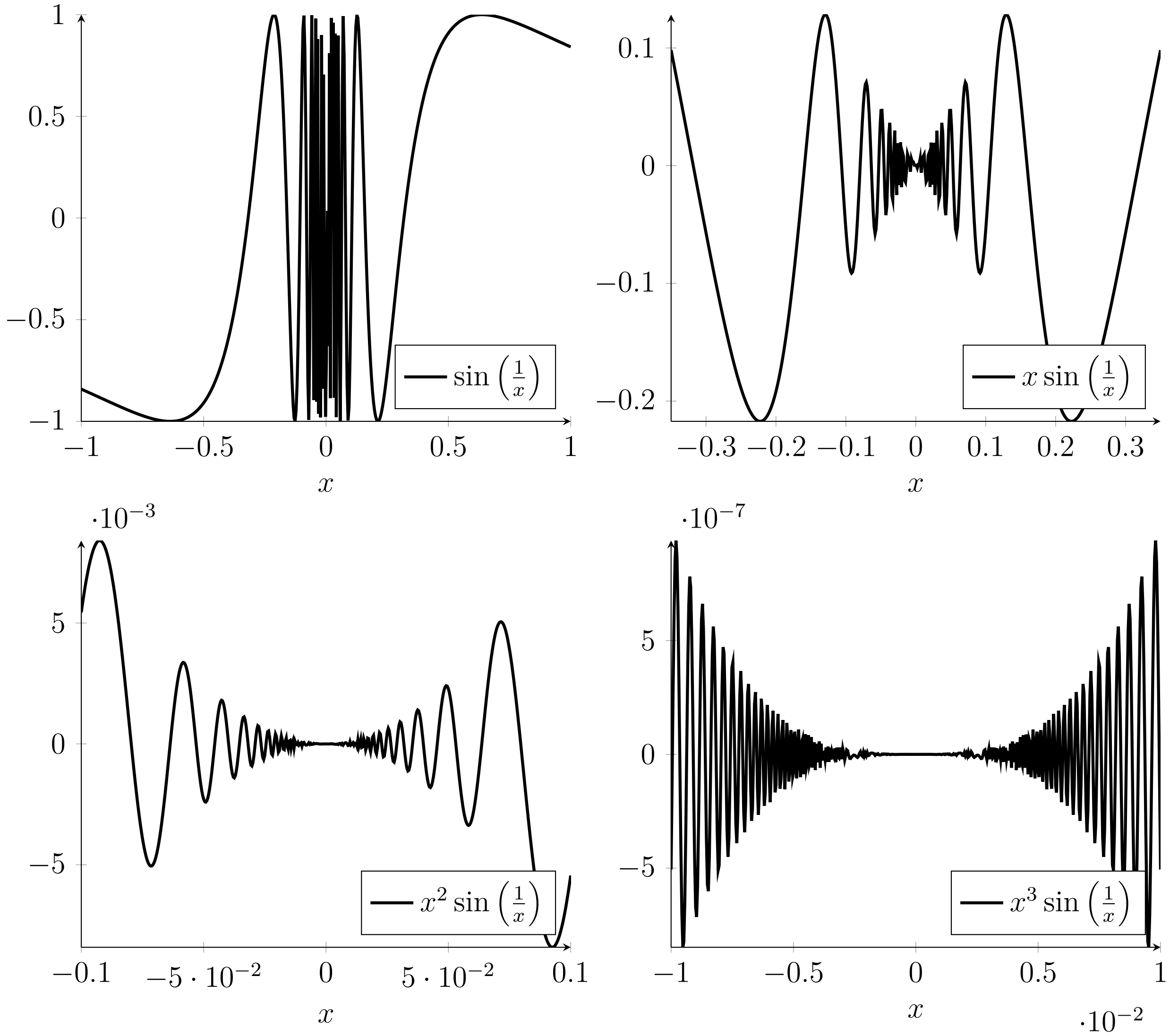
FIGURE 12 – Pavage du plan par les parallélogrammes $P_{m,n}$ lorsque (m, n) parcourt $\mathbb{Z}^2$. Les éléments de X sont marqués d'un point et P correspond à la partie rouge.



t07:fig2 FIGURE 13 – L'ensemble P, ici en rouge, est compris entre $C_{r-\lambda}$ et $C_{r+\lambda}$. Lorsque r tend vers $+\infty$, P est de plus en plus proche de C_r.



t07:fig3 FIGURE 14 – Partition de $P_{0,0}$ en $A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Dans cet exemple, $a = 10$ et $b = 4$.



er09:fig

FIGURE 15 – Graphe des fonctions f_0,f_1,f_2,f_3

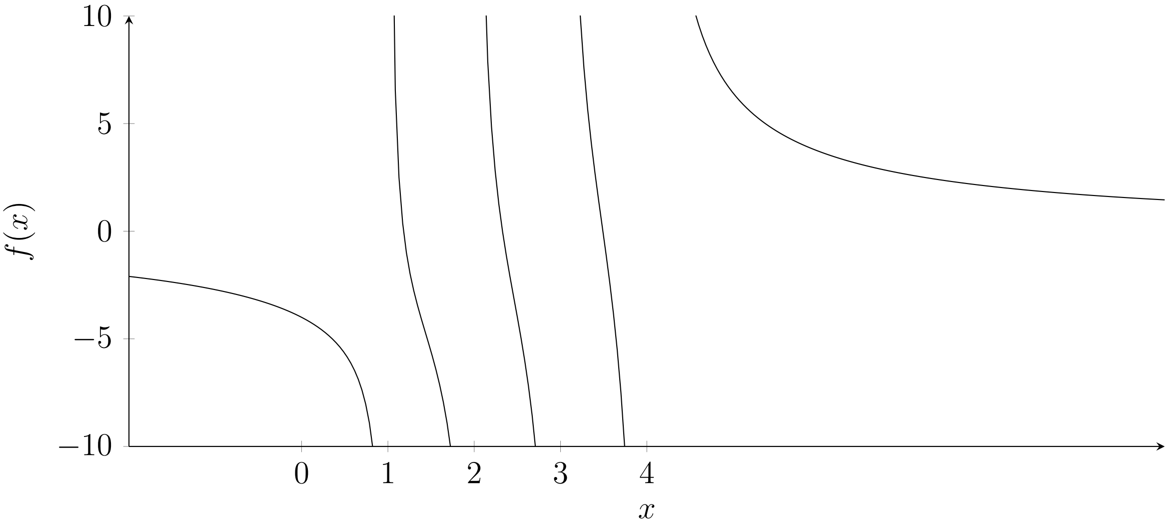


Figure 16 – Graphe de la fonction $f\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x-k}$ pour $n = 4$

05:graph

x	$-\infty$	1	2	$\cdots$	n	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

Figure 17 – Variations de $f\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x-k}$

ol05:var