Dérivation

1 Rappels et définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $f: \quad I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

On dit que la fonction $f(x)$ est dérivable au point x_0 si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. Cette limite est appelée la dérivée de f au point x_0. Elle est notée $f'(x_0)$. L'opération qui associe f' à f s'appelle la dérivation.

Exemple.

Considèrons la fonction $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$. Cette fonction est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. Puisque

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{[4(x_0+h)^2 - 3(x_0+h) + 1] - [4x_0^2 - 3x_0 + 1]}{h} = 4h + 8x_0 - 3$$

et quand h tend vers 0, on a $f'(x_0) = 8x_0 - 3$.

Interpretation géometrique. Le fait que f est dérivable en x_0, cela signifie que la courbe representative de f au point a pour cordonnées $(x_0, f(x_0))$ présente une tangente non verticale d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Définition. Soit $f: \quad I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

On dit que la fonction $f(x)$ est dérivable

i) **à droite de** x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. On la note $f'_d(x_0)$ ou $f'(x_0^+)$.

ii) **à gauche de** x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. On la note $f'_g(x_0)$ ou $f'(x_0^-)$.

Exemple.

$f(x) = |x|$ en 0.
$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$.
De la même façon $f'_g(0) = -1$.

Si f est dérivable en tout point d'un ensemble I (souvent un intervalle), on dit que f est dérivable sur I.

Remarque. Si f est dérivable au point x_0 cela veut dire que si l'on pose

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

alors

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Ce qui veut dire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$$

au voisinage de zero. Cela veut dire que prés de a la fonction f est presque affine (i.e $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$ avec erreur $h\varepsilon(h)$.

Si f est dérivable au point x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et si ces deux dérivées sont égales.

Théorème.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0.

Preuve. *En effet, on a*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

donc

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

ATTENTION : la réciproque est fausse. (voir par exemple $f(x) = |x|$ est continue mais pas dérivable en 0).

Définition. Soit $f : \; I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en tout point de I, on définit une fonction

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x),$$

f' est appellée fonction dérivée .

On dit que f est continument dérivable si f est dérivable et f' est continue.

Définition. Si $I = [a, b]$, dire que f est dérivable sur I revient à dire que f est dérivable en tout point intérieur de I et que f est dérivable à droite en a et à gauche en b.

2 Extremums

Définition. Soit $f : \; I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local ou relatif, s'il existe un nombre strictement positif $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad f(x) \leq f(x_0) \quad (resp. f(x_0) \leq f(x)).$$

On dit que f présente un extremum en x_0.

Théorème.
Soit $f : \; I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $x_0 \in I$. Si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve. *Supposons que f admet un minimum local en x_0, alors $\exists \alpha > 0$ tel que :*

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad f(x_0) \leq f(x).$$

D'autre part, $f'(x_0^+) \geq 0$ et $f'(x_0^-) \leq 0$, comme f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

3 Opération sur les fonctions dérivables

Théorème.
Soient f et g deux fonctions dérivables en un point $x_0 \in I$. Alors :

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda f$ *est dérivable en* x_0 *et* $(\lambda f)'(x_0) = \lambda . f'(x_0)$.
ii) $(f+g)$ *est dérivable en* x_0 *et* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
iii) fg *est dérivable en* x_0 *et* $(fg)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$
iv) si $g(x_0) \neq 0$ *alors* f/g *est dérivable en* x_0 *et*

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0).g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Preuve. *Les preuves de i) et ii) sont immédiates.*
iii) Calculons

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

iv) Il suffit de montrer que $(\frac{1}{g})'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. *En effet,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} . \frac{1}{g(x) - g(x_0)}.$$

Théorème.
1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $f(I) \subset J$ *et soit* $x_0 \in I$. *Si* f *est dérivable en* x_0 *et* g *est dérivable en* $y_0 = f(x_0)$. *Alors* gof *est dérivable en* x_0 *et l'on a :*

$$(gof)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

2) Si f est bijective, continue et dèrivable en x_0 *avec* $f'(x_0) \neq 0$ *alors* f^{-1} *est dérivable en* $y_0 = f(x_0)$ *et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exemple.

Appliquons la formule à $f(x) = e^x$ et $f^{-1}(y) = lny$. Comme $f'(x) = e^x$ on obtien

$$(lny)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{lny}} = \frac{1}{y}.$$

Quelques propriétés qui en découlent

i) La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.

ii) La dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

ii) La dérivée d'une fonction périodique est une fonction périodique.

4 Dérivées successives

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f' est définie sur I et aussi dérivable, sa fonction dérivée est appellée dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2 de f et est notée f''.

Par reccurence, on définit les dérivées successives de f. Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f^{(n)} = \text{dérivée d'ordre n de } f = [f^{(n-1)}]'.$$

Par convention on pose $f^{(0)} = f$.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^n(I)$ (ou bien n fois continument dérivable) si elle est n fois dérivable sur I et f^n est continue sur I.

On dit que f est infiniment dérivable sur I ou de classe $C^\infty(I)$ si
$\forall n \in \mathbb{N} \;\; f^{(n)}$ existe.

Théorème (Formule de Leibniz)**.**
Soient f et g deux fonctions dérivables n fois sur un intervalle I. Alors le produit des deux fonctions f et g est n fois dérivable et on a :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

5 Théorème des accroissements finis

Théorème (Théorème de Rolle)**.**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et

dérivable sur $]a,b[$ *et vérifiant* $f(a)=f(b)$. *Alors il existe un* $c\in]a,b[$ *tel que* $f'(c)=0$.

Le suivant résultat est une généralisation du théorème de Rolle.

Théorème (Théorème des Accroissements Finis)**.**
Soit $f:[a,b]\to R$, *continue sur* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$. *Alors il existe* $c\in]a,b[$ *tel que*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Remarque. Soit f une fonction continue sur $[a,a+h]$ (ou $h>0$) et dérivable sur $]a,a+h[$. Alors, il existe $\theta\in]0,1[; f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$.

Corollaire.
Pour qu'une fonction dérivable f *soit croissante dans un intervalle* I, *il faut et il suffit que* $f'(x)\geq 0$ *pour tout* $x\in I$.

Proposition.
Une fonction f *dérivable sur un intervalle* I *et dont la dérivée est toujours nulle est forcement constante.*

Proposition.
Soit f *une fonction continue sur* $[a,b]$ *dérivable sur* $]a,b[$, *alors :*
i) $\forall x\in]a,b[, f'(x)>0 \quad\Rightarrow f$ *est strictement croissante sur* $]a,b[$.
ii) $\forall x\in]a,b[, f'(x)<0\Rightarrow f$ *est strictement décroissante sur* $]a,b[$.
Les réciproques des propriétés de la proposition précédente sont fausses.

Proposition.
Soit $f:I\to\mathbb{R}$, *continue sur* I, *dérivable sur* $I\setminus\{x_0\}$. *Si* f' *admet une limite* l *au point* x_0 *alors* f *est dérivable en* x_0 *et* $f'(x_0)=l$.

Théorème (Théorème des Accroissements Finis Généralisé)**.**
Soient f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$.
Si g' *ne s'annule pas sur* $]a,b[$, *alors il existe un nombre* $c\in]a,b[$ *tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Comme une application de T.A.F.G, on a

Théorème (Règle de l'Hospital)**.**
Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$ (sauf peut être en $x_0 \in]a,b[$) dérivable sur $]a,b[$ (sauf peut être en x_0) telles que

$g'(x) \neq 0$ pour $x \neq\neq x_0$ et $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ se présente comme une forme indéterminée $0/0$ ou ∞/∞. Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existe alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque. Ce résultat reste valable si l'une des bornes de l'intervalle est infini.

Dans le cas où f' et g' vérifient les mêmes conditions que $f$et g ci-dessus, on recommence à nouveau le procédé.

6 Formule de Taylor-Lagrange

Notation : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction . On fixe un entier naturel n.

On dit quâĂŹune fonction est de classe C^n sur I si elle est n fois dérivable sur I, et si sa dérivée n-ième est continue sur I.

Théorème (Taylor-Lagrange)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit f une fonction de classe $C^n([a,b])$ et $f^{(n)}$ dérivable sur $]a,b[$. Soit $x_0 \in [a,b]$. Alors : $\forall x \in [a,b]$ / $\exists c \in]x_0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarque. i) Lorsqu'on prend $x_0 = 0$ la formule de Taylor devient :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

ii) Pour $n = 0$ la formule de Taylor Lagrange se réduit évidement au Théorème des accroissements finis.

7 Formule de Taylor-Young

Théorème (Taylor-Young).
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit f une fonction de classe $C^n([a,b])$. Soit $x_0 \in [a,b]$. Alors :
$\forall x \in [a,b]$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o(x-x_0)^n,$$

*où $o(x-x_0)^n$ s'appelle **le reste de Young**. Trés souvent on écrit $o(x-x_0)^n = (x-x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$. Alors la une nouvelle version de la formule de Taylor-Young est comme suit :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x).$$

Exemple. 1) Soit $f(x) = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$,
f vérifie les conditions de Taylor sur $]-1, \infty[$ On a

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

donc
$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)$ et $f(0) = 1$. Alors

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

8 Dérivation et Intégration de D.T.Y

Théorème.
La partie regulière du Développement de Taylor-Young de f à l'ordre n en x_0 s'obtient en dérivant la partie regulière du Développement à l'ordre $n+1$ en x_0 de f i.e si
$\forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + (x-x_0)^{n+1}\varepsilon_1(x)$$

alors

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f^{(3)}(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{(n)!}f^{(n+1)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon_2(x).$$

Exemple.

Sachant que le Développement de Taylor-Young de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5 est donnée par :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon_1(x),$$

On obtient en dérivant :

$$\tan^2 x = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + x^4\varepsilon_2(x),$$

qui correspond au $DTY_4(0)$ de la fonction $f(x) = \tan^2 x$.

Théorème.
La partie régulière du $DTY_n(x_0)$ de F la primitive de f qui s'annule en x_0 s'obtient en intégrant la partie régulière du Développement de Taylor-Young de f à l'ordre n en x_0 ($DTY_{n-1}(x0)$) de f, plus précisément, si $\forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[$,

$$f(x) = f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+...+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+(x-x_0)^{n-1}\varepsilon_1(x)$$

alors

$$F(x) = (x-x_0)f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f'(x_0)+...+\frac{(x-x_0)^n}{(n)!}f^{(n-1)}(x_0)+(x-x_0)^n\varepsilon_2(x),$$

où

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Exemple.

Sachant que le Développement de Taylor-Young de $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 3 est donnée par :

$2x + 7x^2 + -x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et que $f(0) = -1$, en intégrant, on a :

$$f(x) = -1 + x^2 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

9 Développements limités.

9.1 Définition, propriétés.

Définition. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Soit un entier n strictement positif, dire que f admet un **développement limité (DL) d'ordre** n **au voisinage de 0**, signifie qu'il existe $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé **partie régulière** du développement limité d'ordre n de la fonction f en 0.

Proposition.
Si f admet un développement limité d'ordre n, il est unique.

Proposition.
Soit f une application admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.

Si f est paire, tous les termes a_k d'indice impairs sont nuls.
Si f est impaire, tous les termes a_k d'indice pairs sont nuls.

Proposition.
Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n suivant :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

9.2 Opérations sur les développements limités.

Proposition.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que,

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors l'application f admet au voisinage de 0, le développement limité d'ordre $n+1$ suivant :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \varepsilon(x) \quad \textit{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application $n \geq 2$ fois dérivable telle que,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors au voisinage de 0,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition.
Soient f et g deux fonctions admettant des DL à l'ordre n en 0, ayant pour parties régulières respectives les polynômes $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et $Q_n(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$.

1. *Linéarité : si λ et μ sont deux constantes, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $\lambda P_n + \mu Q_n$.*
2. *Produit : la fonction fg admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le produit $P_n Q_n$ tronqué à l'ordre n (cela signifie que l'on ne conserve que les termes dont le degré est inférieur ou égal à n).*
3. *Composition : Si $g(0) = 0$ alors la fonction composée $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme $P_n \circ Q_n$ tronqué à l'ordre n.*

10 Développements limités des fonctions usuelles

On admettra que l'on a les développements limités suivants, au voisinage de 0 :

$$e^t = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} + t^n \varepsilon(t) \qquad \text{soit} \qquad e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec} \ \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \times t^i + t^n \varepsilon(t) \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec} \ \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

$$\ln(1+t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} \times \frac{t^i}{i} + t^n \varepsilon(t)$$

soit

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec} \ \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

soit

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$$

soit

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + \cdots + t^{2p}\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$$

Exemple.

i) Développement limité d'ordre 3 de $\sin(\exp x - 1)$ en 0 :
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ et $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\begin{aligned}
\sin(\exp x - 1) &= [\exp x - 1] - \frac{(\exp x - 1)^3}{3!} + o(x^3) \\
&= [x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}] - \frac{1}{6}(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ...)^3 + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{6}(x^3 + 3\frac{x^4}{2} + o(x^3)) + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + o(x^3). \qquad (1)
\end{aligned}$$

ii) On rappelle que toutes les fonctions $\varepsilon_i(x)$ verifient $\varepsilon_i(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

Soit $f(x) = \cos x \exp x$ à l'ordre 3.

Les D L s de $cosx$ à l'ordre 3 et de $\exp x$ à l'ordre 3 sont respectivement donnés par

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \varepsilon_1(x)x^3$ et $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \varepsilon_2(x)x^3$.

On pose $A(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ et $B(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

On multiple A par B on aura

$A(x).B(x) = [1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}] - [\frac{x^2}{2}([1.1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}])]$

$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + ...$

Rappelons qu'on n' pas besoin de calculer les coefficients d'ordre superieure a 4 car on cherche un DL d'ordre 3 donc tout terme en x^4, x^5 ou plus se met dans $\varepsilon_3(x)x^3$. Ainsi le DL de $\cos x \exp x$ en 0 à l'ordre 3 est :

$\cos x. \exp x = 1 + x + -\frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3$.
iii) $(1 - cosx)^5$ d'ordre 13.
Au voisinage de zero on a
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ donc
$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) = \frac{x^2}{2}(1 - \frac{x^2}{12}) + o(x^3)$. On a directement
$(1 - \cos x)^5 = \frac{x^10}{32}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)^5 = \frac{x^{10}}{32}\left(1 - \frac{5}{12}x^2 + o(x^3)\right)$ soit

$$f(x) = \frac{x^{10}}{32} - \frac{5}{384}x^{12} + o(x^{13}).$$