Feuille de TD 4

Exercice 1.

Etudier la dérivabilté des fonctions suivantes:
1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$
2) $g(x) = \frac{1-x^5}{1-x}$
3) $h(x) = |x^2 - 9|$.

Exercice 2.

1) Montrer que l'équation

$$e^x = 1 - x$$

admet l'unique solution $x = 0$.

2) Montrer que l'équation

$$x - e^{-x} = 0$$

admet une solution unique $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $\frac{1}{e} < x_0 < 1$.

Exercice 3.

Soit f une fonction a valeurs relles dfinies et continûment dérivable sur $[0, 1]$. On suppose que f' est strictement positive sur le fermé $[0, 1]$.

1) Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$ on a

$$f'(x) \geq \alpha.$$

2) Déduire que si $f(0) = 0$ alors $f(x) \geq \alpha x \ \ \forall x \in [0, 1.]$

Exercice 4.

Soient $a \in]0, \infty[$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ vérifiant

$$f'(c) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}.$$

Exercice 5.

En utilisant le Dévloppement limité, déterminer les limites suivantes:
a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2(x)}$
b) $\lim_{x\to 0^+} \Big(\cos x\Big)^{x^m}, m \in \mathbb{R}$
c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$.

Exercice 6.

Etudier $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$.
1) Déterminer le domaine D_f de f.
2) Calculer $f(-x)$.
3) Etudier la dérivabilté sur $]1, \infty[$.
4) Representer grafiquement sur D_f.

Exercice 7.

On pose $f(x) = \tan(x)$.

1) Calculer la dérivée seconde f'' et la dérivée troisième $f^{(3)}$ de f.
2) Appliquer la formule de Taylor pour obtenir le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 3.
3) Déterminer également le développement limité de $\tan$ en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

Exercice 8.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \cos x$.
1) Montrer que l'équation

$$x - \cos x = 0$$

admet une solution x_0 dans $[\pi/6, \pi/4]$.
2) Montrer qu'il existe $c \in]x_0, \pi/4[$ tel que

$$f'(c) = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{\pi - 4x_0}.$$

Exercice 9.
Calculer les integralles géneralisées suivantes:
a) $\int_1^\infty e^{-\lambda x}, \lambda > 0$
b) $\int_0^1 \ln x \, dx$
c) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$
d) $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx$.

Exercice 10.
Etudier la convergence des intégrales suivantes :
a) $\int_0^\infty \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}} \, dx$
b) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+x+1} \, dx$
c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$
d) $\int_1^\infty e^{-\lambda x}$
e) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx$
f) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1} \, dx$.

Exercice 11.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ On considère l'intégrale Eurelienne $\Gamma(n)$ définie par

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

1) Par une intégration par partie montrer que

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1).$$

2) En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$.