Université Abdelmalek ESSAADI (UAE)
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima, Maroc

ANALYSE 3 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

AP2 : DEUXIÈME ANNÉE CYCLE PRÉPARATOIRE

RÉDIGÉ PAR

MOUSSAID AHMED

Professeur Assistant
Département de Mathématiques-Informatique
ENSAH

CT

2020/2021

Chapitre 3

Différentiabilité et Calcul différentiel

3.1 Définitions et Exemples :

3.1.1 Definition et Notation

Pour alléger les notations, Nous commençons par des fonctions de deux variables.

Dérivées partielles premières :

Rappel (DERIVEE).
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
La dérivée de f au point $x_0 \in I$ est donnée par :

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition 31 *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in D$, Les dérivées partielles de f en(x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions g_1 et g_2 tel que :*

$$g_1(x) = f(x, y_0), \quad et \quad g_1(y) = f(x_0, y)$$

sont deux fonctions de la seule variable. Si g_1 et g_2 sont dérivable en x_0 et y_0 respectévement, on aura alors

$$g_1^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{g_1(x_0 + h) - g_1(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et

$$g_2^{'}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g_2(y) - g_2(y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{g_2(y_0 + h) - g_2(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Les deux nombres $g_1^{'}(x_0)$ et $g_2^{'}(y_0)$ sont appelés Les dérivées partielles de f par rapport à x et à y respectévement au point (x_0, y_0)

et on note

$$g_1^{'}(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f_x^{'}(x_0, y_0)$$

et

$$g_2^{'}(y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f_y^{'}(x_0, y_0)$$

Exemple 1 :

1. Soit :
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y)=x^2y^3 \end{array}$$
Cherchons les dérivées partielles en (a,b).
on a
$$f_x^{'}(a,b)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=2ab^3$$
et
$$f_y^{'}(a,b)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}=3a^2b^2$$

2. Soit
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y)=x\sin(xy) \end{array}$$
Cherchons les dérivées partielles en (a,b).
on a
$$f_x^{'}(a,b)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=\sin(ab)+ab\cos(ab)$$
et
$$f_y^{'}(a,b)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}=a^2\cos(ab)$$

Définition 32 (DERIVEE PARTIELLE)) *Soient $f:E\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a\in E$, pour $i=1,2,...,n$, on appelle dérivée partielle par rapport à x_i de f en $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ et on note $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ la dérivée de la fonction partielle de f prise en a_i*

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}=\lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{x_i-a_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,...,a_{i-1},h+a_i,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{h}$$

Exemple 2 :

Soit
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y)=x^2-y^2 \end{array}$$
Cherchons les dérivées partielles de f
on a
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(x+h,y)-f(x-y)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{(x+h)^2-y^2-(x^2-y^2)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{2xh+h^2}{h}=2x\in\mathbb{R}$$
cette limite existe et donc
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x$$
De même maniére on trouve
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-2y$$

Définition 33 *Si la dérivée partielle % à la i^{eme} variable existe en tout point E .*
On définit l'application dérivée partielle parapport à x_i par.

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x_i} & : & E\subset\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

Notation : On peut noter $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Remarque :
l'existence de dérivées partielles en un point n'entraine pas la continuité en ce point.

Exemple 2
La fonction

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{pour } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a déja vu que la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$ (Ex.7).
Calculons les dérivées partielle au point $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{0}{x} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \in \mathbb{R}$
et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{0}{y} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \in \mathbb{R}$

Conclusion : les dérivée partielles de f existent au point $(0,0)$ mais f n'est pas continue au point $(0,0)$.
Par contre, on sait qu'une fonction d'une seule variable, dérivable en un certain réel, est automatiquement continue en ce réel et donc l'existence de dérivées partielles entraine la continuité partielle.

Fonctions dérivées partielles d'ordre 1

Définition 34 *Soit f une fonction définie sur un ouvert non vide E de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, f admet une $i-$ème dérivée partielle sur E si et seulement si f admet une $i-$ème dérivée partielle en chaque point a de E.
Dans ce cas, on peut définir la $i-$ème fonction dérivée partielle sur E notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: c'est une fonction de n variables, définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.*

Théoréme 21 *Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert non vide E de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
Soit $i \in [\![1;n]\!]$,*

1. *Si f et g admettent une $i-$ème dérivée partielle sur E, alors pour tout $(\alpha;\beta) \in \mathbb{K}^2$ $\alpha f + \beta g$ admet une $i-$ème dérivée partielle sur E et*

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

2. *Si f et g admettent une $i-$ème dérivée partielle sur E,alor $f \times g$ admet une $i-$ème dérivée partielle sur E et*

$$\frac{\partial(f\times g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

3. *Si f et g admettent une $i-$ème dérivée partielle sur E, et si g ne s'annule pas sur E alors $\frac{f}{g}$ admet une $i-$ème dérivée partielle sur E et*

$$\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \times g - f \times \frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}$$

Par exemple, si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$ alors ;
pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2} = (1+2x^2)e^{x^2+y^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xye^{x^2+y^2}$$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{pour } (x, y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

Etudier l'existence des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

3.1.2 Dérivée suivant un vecteur

Pour analyser l'existence et la valeur de la $i-$ème dérivée partielle en $a = (a_1, ..., a_n)$, on s'est intéressé à

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{1}{x_i - a_i}(f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n))$$

qui peut aussi s'écrire

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a_1, ..., a_{i-1}, h + a_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n))$$

En notant $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a + he_i) - f(a))$$

On dit alors qu'on a dérivé la fonction f en a suivant le vecteur e_i. On généralise cette notion :

Définition 35 *Soit f une fonction définie sur un ouvert non vide E de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.*
Soit a un point de E.
Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ donné.
f est dérivable en a suivant le vecteur v si et seulement si la fonction d'une variable réelle $h \longmapsto \frac{1}{h}(f(a + hv) - f(a))$ a une limite quand h tend vers 0. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en a suivant le vecteur v et se note $D_v f(a)$:

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a + hv) - f(a))$$

En particulier, Si $(e_1,...,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\,; \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0. \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$.
$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$ puis $\lim_{h\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$
Donc, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Soit $v = (1,1) \neq (0,0)$.
Pour $h \neq 0$ $\frac{1}{h}(f(hv) - f(0)) = \frac{1}{h} f(h,h) = \frac{1}{h}$ expression qui n'a pas de limité quand h tend vers 0.
Donc f n'est pas dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (1,1)$.

Ainsi, f admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses deux variables en $(0,0)$ mais n'est pas dérivable suivant tout vecteur en $(0,0)$.

3.2 Fonction différentiable.

Définition 36 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 e v n ; U ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ une application.*

Cas ou $E = \mathbb{R}$

f est dérivable en x_0 ; de derivée $f^{'}(x_0)$ si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f'x_0)}{h} - f^{'}(x_0) = 0$$

c à d.

$$f(x_0+h) - f'x_0 - hf^{'}(x_0) = h\xi(h); \quad avec \quad \xi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

L'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{R} & \to & F \\ h & \mapsto & L(h) = hf^{'}(x_0) \end{array}$$

est continue .
Elle est appelée differentielle de f au pt. x_0.

Cas ou $E = \mathbb{R}^2$

Soit f une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in U$.
On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe deux constantes réelles A et B telles que telle que

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) = Ah_1 + Bh_2 + \|h\|\zeta(h) \quad avec \quad h = (h_1,h_2)$$

où ζ est une fonction à 2 variables telle que $\zeta(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Cas ou $E = \mathbb{R}^n$

f est différentiable en $x_0 \in U \subset E$ si il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E,F)$ et une application ζ définie d'un voisinage de 0 dans E à valeur dans F tel que

$$\forall h \quad / \quad x_0 + h \in U, \quad on\ a \quad f(x_0+h) - f(x_0) = Lh + (\|h\|\zeta(h))$$

avec L est appelé : la différentielle de f en x_0 .

PROPOSITION 26 *L'application L si elle existe, elle est unique.*

Théoréme 22 *Si f est différentiable au point x_0 alors elle admet des dérivées partielles premières en x_0.*

dans cas $\mathbb{R}^2$
$A = f'_x(x_0, y_0)$ *et* $B = f'_y(x_0, y_0)$

PROPOSITION 27 *Si f est différentiable au point x_0 alors ; elle est continue en ce point.*

preuve

Si f est différentiable au point x_0 alors,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = L(x_0).h + \|h\|\zeta(h)$$

$$\Rightarrow \|f(x_0+h) - f(x_0)\| \leq (L(x_0) + \zeta(h)).\|h\|$$

PROPOSITION 28 *Si $E = \mathbb{R}$*
Si f est différentiable au point x_0 SSi elle est dérivable en x_0 et on a

$$df(x_0)(h) = hf'(x_0)$$

.

PROPOSITION 29 *Si f admet des dérivées partielles sur un voisinage de x_0 et si les applications $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues en ce point, alors f est différentiable au point x_0.*

Remarque

L'existence des dérivées partielles au point x_0 n'entraîne pas la différentiabilité de f au point x_0.

PROPOSITION 30 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable au point $x_0 \in U$. f admet des dérivées partielles en x_0 par rapport à chaque variable x_i et la différentielle totale s'écrit : pour tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$*

$$df(x_0)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_0)h_i$$

Cas de $\mathbf{R}^2$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $(x_0, y_0) \in U$. f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0) par rapport à chaque variable et la différentielle totale s'écrit : pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2$$

Notons dx la différentielle de : $(h_1,h_2) \mapsto h_1$ ie $dx(h_1,h_2) = h_1$

dy la différentielle de : $(h_1,h_2) \mapsto h_2$ ie $dx(h_1,h_2) = h_2$

Alors

$$df(h_1,h_2) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy)(h_1,h_2)$$

Donc

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

Exemple : 1

Calculons la différentielle de la fonction f définie par

$$f(x,y) = e^x \cos(x^2+y^2)$$

On a :

$$df = (\cos(x^2+y^2-2x\sin(x^2+y^2))e^x dx - 2ye^x \sin(x^2+y^2)dy$$

Définition 37 *On dit que f est différentiable sur E si f est différentiable en tout point de E*

Exemple 2

Soit une fonctionnelle f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y$$

on a point $(1,-1)$

$$f(1+h_1,-1+h_2) - f(1,-1) = (1+h_1)^4 + 3(1+h_1)^2(-1+h_2) + 2 \tag{3.1}$$
$$= 1 + 4h_1 + 6h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + (3+6h_1+3h_1^2)(-1+h_2) + 2 \tag{3.2}$$
$$= 1 - 3 + 2 + (4-6)h_1 + 3h_2 + [6h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 - 3h_1^2 + 6h_1h_2 + 3h_1^2h_2] \tag{3.3}$$
$$= -2h_1 + 3h_2 + \|(h_1,h_2)\|\varepsilon(h_1,h_2). \tag{3.4}$$

On vérifie bien que $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ quand $(h_1,h_2) \mapsto (0,0)$.
Donc f est différentiable au point $(1,-1)$ et sa différentielle est l'application linéaire :

$$Df(1,-1) : (h_1,h_2) \longmapsto -2h_1 + 3h_2$$

On remarque que :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x^3 + 6xy$$

et

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2$$

et donc

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial x} = 4 - 6 = -2$$

et

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial y} = 3$$

Exemple 3

Soit f une fonction défini par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- f est continue en $(0,0)$ car $|f(x,y)| \leq x^2 \leq x^2 + y^2$

donc

$$|f(x,y)| \leq \|(x,y)-(0,0)\|^2$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x;y) = 0 = f(0,0)$$

• Dérivées partielles premiére en $(0,0)$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(\frac{1}{|h|}) = 0$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$

• Dérivées partielles premiére sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$

• Différntiabilité en $(0,0)$.
Si f est différentiable en $(0,0)$ alors on a correspondance avec les dérivées partielles et donc l'opérateurs linéaire est l'opérateur nul; on a ainsi que :
$|\varepsilon(h,k)| = \frac{|f(h,k)-f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2} = \frac{|h^2 \sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|}{\|(h,k)\|_2} \leq \frac{h^2}{\|(h,k)\|_2} \leq \|(h,k)\|_2$
Or $\|(h,k)\|_2 \to 0$ quand $(h,k) \to (0,0)$.
donc f est diff. en $(0,0)$.

Remarque
une fonction qui est diff. en point x_0 admet des dérivées prtilles en ce point. C'est une condition nécessaire pour que f soit diff. mais cette condition n'est pas suffisante; une fonction peut avoir des dérivées partielles en un point sans être différentiable en ce point.

Exemple 4

Soit f une fonction défini par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- f est elle différentiable en $(0,0)$?.

En remarquant que $f(x,0) = x$ et par symétrie que $f(0,y) = y$
on a que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$
Si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait que $L(h,k) = 1\times h + 1\times k = h+k$,

En prenant comme norme ; la norme 1, on obtenons que

$$\epsilon(h,k) = \frac{f(h,k)-h-k}{|h|+|k|} = \frac{-hk(h+k)}{(|h|+|k|)(h^2+k^2)}$$

Si l'on fait tendre $\|h\|$ vers 0 quand $h = k$ on obtient

$$\epsilon(h,h) = \frac{-2h^3}{2|h| \times 2h^2} = \frac{-h^3}{2|h|^3}$$

Donc quand $h \to 0^+$ Alors $\epsilon(h,h) \to \frac{-1}{2}$ et donc f n'est pas différentiable en ce point. mais s'elle possède des dérivées partielles en ce point.

Théoréme 23 *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0) \in D$. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de (x_0,y_0), alors f est différentiable en (x_0,y_0). La réciproque est fausse.*

Plan tangent

Définition 38 *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in D$ et f est différentiable en (x_0,y_0) L'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y)$ en (x_0,y_0) est*

$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Dérivée partielle d'une fonction composée :

Théoréme 24 *Si la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U et si la fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) = (x_1(t),...,x_n(t)) \in U$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ (i.e les fonctions $x_1(t),...,x_n(t)$) sont de classe $\mathscr{C}^1$ alors la fonction composée :*

$$t \mapsto g(t) \mapsto fog(t) = f(x_1(t),...,x_n(t))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est donnée par :

$$(fog)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t),...,x_n(t))x_i'(t)$$

Exemple :

Soit $F(t) = f(2+\cos(t), \sin(t))$ et $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3xy$
alors

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) \quad \text{avec} \quad x(t) = 2+\cos(t) \quad \text{et} \quad y(t) = \sin(t)$$

donc

$$F'(t) = -(2x(t)+3y(t))\sin(t) + (3x(t)-2y(t)) = -4(1+\cos(t))\sin(t) + 3\cos(2t) + 6\cos(t)$$

Théoréme 25 *On considère la fonction $f : (x,y) \to f(x,y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et les fonctions $\varphi_1(u,v) \mapsto x(u,v)$ et $\varphi_2(u,v) \mapsto y(u,v)$ de classe $\mathscr{C}^1$ aussi. Notons la fonction $g : (u,v) \mapsto g(u,v) = f(x(u,v); y(u,v))$: c'est le cas d'un changement de variables (x,y) en (u,v). La fonction g est de deux variables ; on applique le théorème d'une fonction composée sur chacune des fonctions suivantes : $u \mapsto f(x(u,v); y(u,v))$ et $v \mapsto f(x(u,v); y(u,v))$, on pourra exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f :*

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial g}{\partial u} & = & \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & = & \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v} \end{array}\right.$$

ou bien

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x} & = & \frac{\partial g}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \frac{\partial g}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right.$$

Rq
Cette méthode s'applique pour résoudre certaines équations différentielles aux dérivées partielles

Exemple(Les coordonnées polaires) : Si on écrit $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$; alors l'application $F : \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \quad F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$; et on a

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) & = & \cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) & = & -r\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+r\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}\right.$$

Théoréme 26 *Soit U un ouvert, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

- *f est dite différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.*
- *Toute application différentiable en un point de U est continue en ce point.*
- *f est dite de classe $\mathscr{C}^1(U)$ si elle est différentiable sur U et sa différentielle est continue.*
- *Somme, produit, inverse et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classre $\mathscr{C}^1$*

3.2.1 Différentiabilité des fonctions composées :

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions avec $n;m;p$ dans $\mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^n$.
Si f est différentiable au point a et si g est différentiable au point $b = f(a)$ alors $h = gof$ est différentiable au point a et :

$$Dh(a) = D(gof)(a) = Dg(f(a)oDf(a)$$

Exemple :
Considérons les fonctions : $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$g(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{y+2}$$

On a :

$$D_g = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_f = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{-2\})$$

Posons $h = fog$ On a donc $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) = \frac{\sqrt{\cos^2(t)+1}}{\sin(t)+2}$$

La fonction g est différentiable sur $\mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}) \subset ([-1,1])^2 \subset D_f$ et f est différentiable sur D_f Alors h est différentiable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h^{'}(t) = -\frac{\sin(t)\cos(t)}{(\sin(t)+2)\sqrt{\cos^2(t)+1}} - \frac{\cos(t)\sqrt{\cos^2(t)+1}}{(\sin(t)+2)^2}$$

PROPOSITION 31 *Si f est une fonction numérique différentiable au point a, il en est de même pour les fonctions composées f^n; $(n \in \mathbb{N}^*)$ et e^f.*

-

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Df^n = nf^{n-1}Df$$

-

$$De^f = e^f Df$$

3.2.2 Opérations sur les différentielles

Addition de fonctions différentiables

PROPOSITION 32 *On suppose que f et g sont deux fonctions de $D \subset \mathbb{R}^n$ différentiables en a.*

1. *pour $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction $\lambda f + \beta g$ est différentiable en a de différentielle*

$$D(\lambda f + \beta g)(a) = \lambda Df(a) + \beta Dg(a)$$

2. *Si $f(a) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{f}$, $\frac{g}{f}$ et $\ln|f|$ sont différentiables en a et leurs différentielles :*

   (a)

$$D\frac{1}{f} = -\frac{Df}{f^2}$$

   (b)

$$D(\frac{g}{f}) = \frac{fDg - gDf}{f^2}$$

   (c)

$$D\ln|f| = \frac{Df}{f}$$

3.3 Gradient d'une application et Matrice Jacobienne :

3.3.1 définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application définie par :

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \quad \text{avec} \quad x = (x_1, ..., x_n)$$

et différentiable sur $\mathbb{R}^n$

pour $m = 1$ On appelle Gradient de f au point x_0 noté $\nabla f(x_0) = \overrightarrow{grad} f(x_0)$, le vecteur définie par :

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

pour $m > 1$ On appelle Gradient de f au point x_0 noté
$\nabla f(x_0) = J_f(x_0)$, la matrice jacobienne de taille $(n \times m)$ définie par :

$$J_f(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0))_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Pour $m = n > 1$: La matrice jacobienne de f est une matrice carré de taille $(n \times n)$.

PROPOSITION 33 *Pour tout $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ le gradien $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ est l'unique vecteur tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$*

$$Df(a)(h) = < \nabla f(a), h >$$

où pour deux vecteurs $u = (u_1, ..., u_n)$ et $v = (v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on a noté le produit scalair $< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

Exemples 1 :
L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ admet des dérivées partielles et on a

$$\nabla f(x, y) = (y, x)^t$$

Définition 39 *(Point critique)*
Soit $a \in D \subset \mathbb{R}^n$. On dit que a est un point critique de f si les dérivées partielles d'ordre 1 existent et si

$$(\forall i \in [\![1; n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0) \Leftrightarrow \nabla f(a) = 0$$

Exemples 2 :
L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ admet $(0, 0)$ pour unique point critique.

Exemples 3 :
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = (x^2 + y, \frac{x}{y^2 + 1})$$

f est différentiable en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ sa matrice jacobienne est :

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 1 \\ \frac{1}{y_0^2+1} & -\frac{2x_0 y_0}{(y_0^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

On a alors, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$J_f(x_0,y_0)(h,k) = \begin{pmatrix} 2x_0 & 1 \\ \frac{1}{y_0^2+1} & -\frac{2x_0y_0}{(y_0^2+1)^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0h+k, & \frac{h}{y_0^2+1} - \frac{2x_0y_0}{(y_0^2+1)^2}k \end{pmatrix}$$

Et par suite : $Df(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et définie par :

$$(h,k) \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_0h+k, & \frac{h}{y_0^2+1} - \frac{2x_0y_0}{(y_0^2+1)^2}k \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 34 *Soit f et g deux fonctions différentiables en x_0 et soit $\alpha \in \mathbb{R}$*

1.
$$\nabla(f+g)(x_0) = \nabla f(x_0) + \nabla g(x_0)$$

2.
$$\nabla(f \times g)(x_0) = g(x_0) \times \nabla f(x_0) + f(x_0) \times \nabla g(x_0)$$

3.
$$\nabla(\alpha f)(x_0) = \alpha \nabla f(x_0)$$

PROPOSITION 35 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions avec $n;m;p$ dans $\mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^n$.*
Si f est différentiable au point a et si g est différentiable au point $b = f(a)$ alors $h = gof$ est différentiable au point a et :

$$J_h(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$$

3.4 Opérateurs différentiels classiques

3.4.1 Divergence et Laplacien d'une application :

-Dérivées successives :

Définition 40 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles dans un voisinage de a.*
Si l'application $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est dérivable par rapport à x_j en a, alors sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$ s'appelle une dérivée partielle seconde de f en a et notée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

-Théorème de Schwarz :

Si f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ dans un voisinage de a, et si ces dérivées partielles sont continues en a alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Exemple.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = x^2y + 2xy + 1$. Puisque f est polynomiale, il est clair que toutes les dérivées de f à tout ordre existent et sont continues (car polynomiales). On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto 2yx + 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : (x,y) \longmapsto 2x + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto x^2 + 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : (x,y) \longmapsto 2x + 2$$

et le théorème est bien vèrifié.

- Divergence

Définition 41 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^n$*

- *On appelle divergence de f l'application : $divf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$divf(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$$

- *On appelle Laplacien de f l'application : $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$

PROPOSITION 36 *Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de composante $f_1(x);\ldots;f_n(x)$, dont toutes les dérivées partielles existent, on définit sa divergence par*

$$divf(x) = tr(J_f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$

où $tr(J_f(x))$ est la trace de la matrice jacobienne.

Remarque : On peut écrire parfois $div(f) = \nabla.f$ (le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$).
ATTENTION : ne pas confondre les notions de gradient et de divergence. $grad(f)$ est un vecteur alors que $div(f)$ est un scalaire.

PROPOSITION 37 *Soit f et g $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiables sur $\mathbb{R}^n$.*

—
$$div(f+g) = div(f) + div(g)$$

—
$$div(f \times g) = g \times div(f) + f \times div(g)$$

—
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad div(\lambda f) = \lambda div(f)$$

Définition 42 *(Rotationnel)*

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de composante $f_1;f_2;f_3$ dont toutes les dérivées partielles existent on définit le rotationnel de f par :

$$\begin{array}{rcccc} rot(f) & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & x & \mapsto & (rot(f))(x) \end{array}$$

où

$$(rotf)(x) = (\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x); \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x); \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)) = \nabla \wedge f$$

tel que :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad et \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

où $x \wedge y$ désigne le produit vectoriel entre les vecteurs x et y.

3.5 Fonctions de $\mathscr{C}^k$ et Inégalité des accroissements finis

Théoréme 27 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction continue. Alors :*

1. *Si les dérivées partielles de f existent au voisinage de a et qu'elles sont continues au point a, alors f est différentiable au point a.*
2. *L'application $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D si et seulement si elle admet des dérivées partielles continues en tout point de D.*

Notation : On note $\mathscr{C}^1(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

COROLLAIRE 2 *Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, alors f est continue sur D.*

Définition 43 ***(Application de classe $\mathscr{C}^2$)***
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur D.

3.6 Inégalité des accroissements finis :

Définition 44 ***(SEGMENT)***
On appelle segment fermé (respectivement segment ouvert) d'extrémités a et b d'une espace $\mathbb{R}^p$ l'ensemble

$$[a,b] \quad (resp.\ ]a,b[) = \{(1-t)a + tb \quad tel\ que \quad t \in [0,1] \quad (resp t \in]0,1[)\}$$

Définition 45 ***(SEGMENT Convexe)***
On dit que $A \subset \mathbb{R}^p$ est convexe si pour tout $(a,b) \in A^2$, , le segment fermé $[a,b] \subset A$.

3.6.1 Inégalité des accroissements finis :

Fonction d'une variable réelle :

Théoréme 28 ***(INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS (1))***
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et à valeur dans $\mathbb{R}^p$ On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\|f^{'}(t)\|_{\mathbb{R}^p} \leq k \quad \forall t \in I$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^p} \leq k|x-y| \quad \forall (x,y) \in I^2$$

Théoréme 29 ***(INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS (2))***
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et à valeur dans $\mathbb{R}^p$ On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que

$$\|f^{'}(t)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \varphi^{'}(t) \quad \forall t \in I$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^p} \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \quad \forall (x,y) \in I^2$$

Théorème général

Théoréme 30 ***(INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS (3))***
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur un ouvert ***convexe*** *D. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que*

$$|||Df(t)||| \leq k \quad \forall t \in D$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^p} \leq k||x - y||_{\mathbb{R}^n} \quad \forall (x, y) \in D^2$$

Théoréme 31 ***(INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS (4))***
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et soient $x, y \in D$, tels que le segment

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \quad \text{tel que} \quad t \in]0, 1[)\} \subset D$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \sup_{t \in]0,1[} \|df((1 - t)x + ty)\|.\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

FIN