Mécanique du solide (CP2 – S3)

Chapitre II : Les torseurs

I) APPLICATION ANTISYMETRIQUE.

I-1) Définition.

Soit (E) un espace vectoriel à trois dimensions. Soit (ℓ) une application de (E) dans (E), qui à chaque vecteur $\vec{a}$ associe le vecteur $\ell(\vec{a})$:

$$\ell : (E) \mapsto (E)$$
$$\vec{a} \mapsto \ell(\vec{a})$$

Par définition l'application (ℓ) est dite « ***antisymétrique*** » si :

$$\boxed{\forall(\vec{a},\vec{b}) \in E \times E \ : \quad \vec{a}.\ell(\vec{b}) = -\vec{b}.\ell(\vec{a})} \qquad (1.1)$$

L'opérateur « . » étant le produit scalaire.

I-2) Conséquence

Théorème : « toute application antisymétrique est linéaire ».

C'est à dire, $\forall$ 2 vecteurs $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \in E \times E$ et $\forall$ deux scalaires $(\alpha_1, \alpha_2) \in R^2$, nous avons :

$$\boxed{\ell(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) = \alpha_1\, \ell(\vec{a}_1) + \alpha_2\, \ell(\vec{a}_2)} \qquad (1.2)$$

En effet

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \in E \text{ , et soit } \vec{b} \in E$$

L'application (ℓ) est antisymétrique, alors :

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2).\ell(\vec{b}) = -\vec{b}.\ell(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2)$$

Ce qui donne

$$\alpha_1 \vec{a}_1.\ell(\vec{b}) + \alpha_2 \vec{a}_2.\ell(\vec{b}) = -\vec{b}.\ell(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2)$$

Or

$$\vec{a}_1.\ell(\vec{b}) = -\vec{b}.\ell(\vec{a}_1) \text{ et } \vec{a}_2.\ell(\vec{b}) = -\vec{b}.\ell(\vec{a}_2)$$

Ce qui conduit à

$$-\vec{b}.[\alpha_1\, \ell(\vec{a}_1) + \alpha_2\, \ell(\vec{a}_2)] = -\vec{b}.\ell(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2)$$

Cette relation est vraie quelque soit le vecteur $\vec{b}$, ce qui montre que

$$\forall(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \in E \times E \text{ , et } \forall(\alpha_1, \alpha_2) \in R^2$$

On a

$$\ell(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) = \alpha_1 \, \ell(\vec{a}_1) + \alpha_2 \, \ell(\vec{a}_2)$$

Ce qui prouve que tout application antisymétrique est une application linéaire.

I-3) Expression analytique dans une base orthonormée directe.

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de (E)

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans cette base, L'application linéaire (ℓ) est représentée par une matrice [**L**] de composantes :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\forall \, \vec{a} \in (E) \quad : \quad \ell(\vec{a}) = [\mathbf{L}] \cdot \vec{a}} \qquad (1.3.a)$$

A chaque vecteur unitaire de la base B l'application (ℓ) associe une image telles que

$$\ell(\vec{i}) = [\mathbf{L}] \cdot \vec{i} = \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{L} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \qquad \ell(\vec{j}) = [\mathbf{L}] \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{L} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\ell(\vec{k}) = [\mathbf{L}] \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{L} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix}$$

Puisque (ℓ) est antisymétrique, alors on peut écrire

$$\vec{i} \,.\, \ell(\vec{i}) = -\, \vec{i} \,.\, \ell(\vec{i}) \Rightarrow \quad b_{11} = -b_{11} \quad ou \quad b_{11} = 0$$

$$\vec{j} \,.\, \ell(\vec{j}) = -\, \vec{j} \,.\, \ell(\vec{j}) \Rightarrow \quad b_{22} = -b_{22} \quad ou \quad b_{22} = 0$$

$$\vec{k} \,.\, \ell(\vec{k}) = -\, \vec{k} \,.\, \ell(\vec{k}) \Rightarrow \quad b_{33} = -b_{33} \quad ou \quad b_{33} = 0$$

$$\vec{i} \,.\, \ell(\vec{j}) = -\, \vec{j} \,.\, \ell(\vec{i}) \Rightarrow \quad b_{12} = -b_{21}$$

$$\vec{i} \,.\, \ell(\vec{k}) = -\, \vec{k} \,.\, \ell(\vec{i}) \Rightarrow \quad b_{13} = -b_{31}$$

$$\vec{j} \,.\, \ell(\vec{k}) = -\, \vec{k} \,.\, \ell(\vec{j}) \Rightarrow \quad b_{23} = -b_{32}$$

Finalement la matrice $[\mathbf{L}]$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent la matrice représentative $[\mathbf{L}]$ de l'application *antisymétrique* (ℓ) est *antisymétrique*.

Posons $\beta_1 = -b_{23}$; $\beta_2 = b_{13}$; $\beta_3 = -b_{12}$, $[\mathbf{L}]$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour chaque vecteur $\vec{a}$, de composantes a_i ; $(i = 1,2,3)$ dans la base B de l'espace (E), l'application (ℓ) associe le vecteur $\ell(\vec{a})$, tel que

$$\ell(\vec{a}) = [\mathbf{L}] \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2\beta_3 + a_3\beta_2 \\ a_1\beta_3 - a_3\beta_1 \\ -a_1\beta_2 + a_2\beta_1 \end{bmatrix}$$

Si $\vec{R}$ est le vecteur de composantes β_i ; $(i = 1,2,3)$, on peut vérifier que, l'image de $\vec{a}$ par (ℓ) peut s'écrire sous la forme

$$\ell(\vec{a}) = \vec{R} \wedge \vec{a}$$

Le vecteur $\vec{R}$ est appelé **le vecteur de l'application antisymétrique**, et on dit alors, que pour toute application antisymétrique (ℓ), il existe un vecteur $\vec{R}$ appelé « ***vecteur de*** (ℓ) » tel que

$$\boxed{\forall \vec{a} \in E \; ; \qquad \ell(\vec{a}) = \vec{R} \wedge \vec{a}} \qquad (1.3.b)$$

II) CHAMP DE VECTEURS ANTISYMETRIQUE

II-1) Définition.

Soit (E) un espace vectoriel de dimension 3, et $\Im$ l'espace affine associé.

Un champ de vecteur est défini par l'application qui à tout point M de $\Im$ associe le vecteur $\vec{a}(M)$ de (E) .

Soient alors, M et P, deux points de $\Im$, et $\vec{a}(M)$ et $\vec{a}(P)$ leurs vecteurs associés.

Définition :

Le champ $\vec{a}$ est dit « ***antisymétrique*** », s'il existe une application antisymétrique (ℓ) , de vecteur $\vec{R}$, telle que

$$\forall\,(M,P)\in\Im^2,\quad \vec{a}(M)=\vec{a}(P)+\ell(\vec{PM})$$

Autrement dit le champ $\vec{a}$ est « ***antisymétrique*** », s'il existe un vecteur $\vec{R}\in(E)$, tel que

$$\boxed{\forall\,(M,P)\in\Im^2,\quad \vec{a}(M)=\vec{a}(P)+\vec{R}\wedge\vec{PM}} \qquad (1.4)$$

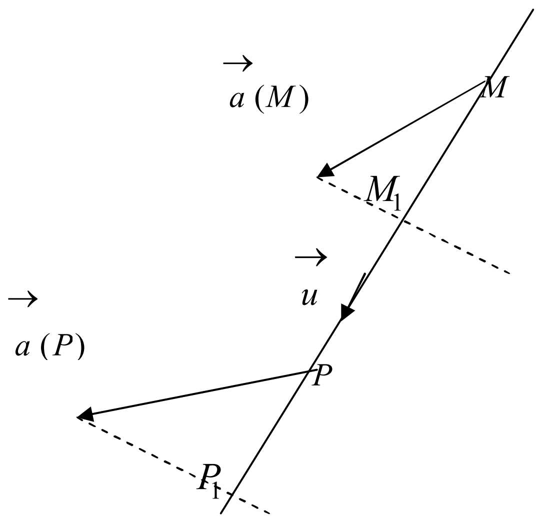
Dans ce cas $\vec{R}$ est appelé « ***vecteur du champ antisymétrique*** $\vec{a}$ »

C'est cette dernière définition (1.4) qu'on va retenir par la suite.

II-2) Champ équiprojectif.

Un champ $\vec{a}$ est dit « *équiprojectif* », si et seulement si, $\forall\,(M,P)\in\Im^2$ ayant $\vec{a}(M)$ et $\vec{a}(P)$ comme vecteurs associés, alors les deux projections respectives de $\vec{a}(M)$ et $\vec{a}(P)$ sur la direction de $\vec{PM}$, sont égales. Autrement dit, si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la direction de $\vec{PM}$, $(\vec{PM}=/\vec{PM}/\,\vec{u})$ alors :

$$\boxed{\vec{a}(M).\vec{u}=\vec{a}(P).\vec{u} \quad\Leftrightarrow\quad /\vec{PP_1}/=/\vec{MM_1}/} \qquad \text{(1-5)}$$



$$/\vec{PP_1}/=/\vec{MM_1}/$$

Théorème :

Tout champ antisymétrique est un champ « *équiprojectif* »

En effet, $\vec{a}$ est antisymétrique, donc

$\forall (M,P) \in \Im^2,\ \ \vec{a}(M) = \vec{a}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PM}$

D'où

$\vec{a}(M).\vec{PM} = \vec{a}(P).\vec{PM} + (\vec{R} \wedge \vec{PM}).\vec{PM}$

Or

$(\vec{R} \wedge \vec{PM}) \perp \vec{PM} \ \Rightarrow\ (\vec{R} \wedge \vec{PM}).\vec{PM} = 0$

Et

$$\vec{a}(M).\vec{PM} = \vec{a}(P).\vec{PM}$$

Ou

$$\vec{a}(M).\vec{u} = \vec{a}(P).\vec{u}$$

Le champ est donc « *équiprojectif* »

III) TORSEURS

III-1) Définition

On appelle « ***torseur*** » l'ensemble d'un champ antisymétrique $\vec{M}$ et de son vecteur $\vec{R}$. On le note $[\tau]$

Le champ $\vec{M}$ est appelé : « ***moment*** » du torseur $[\tau]$

Le vecteur $\vec{R}$ est appelé : « ***résultante générale*** »du torseur $[\tau]$

Le moment est défini en tout point de l'espace. Par conséquent le torseur l'est aussi.

Soit P un point quelconque. Les quantités $\vec{R}$ et $\vec{M}(P)$ sont appelés : « ***éléments de réduction*** » du torseur $[\tau]$ au point P, ou « ***coordonnées vectorielles*** » *en* P.

On écrit alors,

$$[\tau] = {}_P\left|\begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(P) \end{array}\right.$$

Et puisque le champ $\vec{M}$ est antisymétrique, alors quel que soit un autre point Q, $\forall\, Q \in \Im$, nous avons :

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}$$

Cette relation permet donc de dire qu'à partir de la connaissance des éléments de réduction d'un torseur en un point quelconque (P), on peut déduire les éléments de réduction en n'importe quel autre point (Q) de $\Im$, qui s'écrivent

$$[\tau] = {}_Q\left|\begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ} \end{array}\right.$$

III-2) Propriétés des torseurs

III-2-1) Egalité de deux torseurs

Pour que deux torseurs $[\tau]_1$ et $[\tau]_2$ soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient la même résultante générale, et qu'il existe un point où les moments soient égaux.
On peut montrer que, cette dernière condition implique que les moments des deux torseurs sont égaux en tout point de l'espace.
Soit, par exemple, P le point où les moments des deux torseurs sont égaux, on écrit alors :

$$[\tau]_1 = {}_P\left|\begin{array}{l}\vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(P)\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad [\tau]_2 = {}_P\left|\begin{array}{l}\vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(P)\end{array}\right.$$

Les deux torseurs sont égaux, on a alors :

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_1(P) = \vec{M}_2(P)$$

Or $\forall Q \in \Im$ on a :

$$\vec{M}_1(Q) = \vec{M}_1(P) + \vec{R}_1 \wedge \vec{PQ} \quad \text{et} \quad \vec{M}_2(Q) = \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 \wedge \vec{PQ} = \vec{M}_1(P) + \vec{R}_1 \wedge \vec{PQ}$$

Donc $\forall Q$ de l'espace

$$\vec{M}_1(Q) = \vec{M}_2(Q)$$

III-2-2) Somme de deux torseurs.

Soient deux torseurs $[\tau]_1$ et $[\tau]_2$, de résultantes générales respectives $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$, et de moments respectifs $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$;
La somme de ces deux est un torseur $[\tau]$ de résultante générale $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$, et de moment $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$.

Au point P, les éléments de chaque torseur s'écrivent

$$[\tau]_1 \;{}_P\left|\begin{array}{l}\vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(P)\end{array}\right. \;;\; [\tau]_2 \;{}_P\left|\begin{array}{l}\vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(P)\end{array}\right. \Rightarrow [\tau] = [\tau]_1 + [\tau]_2 = {}_P\left|\begin{array}{l}\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}(P) = \vec{M}_1(P) + \vec{M}_2(P)\end{array}\right.$$

$\forall Q$ un autre point de l'espace, on a :

$\vec{M}_1(Q) = \vec{M}_1(P) + \vec{R}_1 \wedge \vec{PQ}$

$$\vec{M}_2(Q) = \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 \wedge \vec{PQ}$$
$$\vec{M}_1(Q) + \vec{M}_2(Q) = \vec{M}_1(P) + \vec{M}_2(P) + (\vec{R}_1 + \vec{R}_2) \wedge \vec{PQ}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}$$

III-2-3) Multiplication par un scalaire.

Soit $[\tau]$ un torseur de résultante générale $\vec{R}$, et de moment $\vec{M}$, alors la multiplication de ce torseur $[\tau]$ par un scalaire α est un torseur $[\tau]_\alpha$, de résultante générale $\vec{R}_\alpha = \alpha \vec{R}$, et de moment $\vec{M}_\alpha = \alpha \vec{M}$.

$\forall\, Q \; et \; P$,

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}$$
$$\Rightarrow \quad \alpha \vec{M}(Q) = \alpha \vec{M}(P) + \alpha \vec{R} \wedge \vec{PQ}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{M}_\alpha(Q) = \vec{M}_\alpha(P) + \vec{R}_\alpha \wedge \vec{PQ}$$

Avec

$$\vec{R}_\alpha = \alpha \vec{R}$$

et $\quad \vec{M}_\alpha(P) = \alpha \vec{M}(P)$

$$\alpha[\tau] \quad \Rightarrow [\tau]_\alpha \left|_P \begin{array}{l} \vec{R}_\alpha \\ \vec{m}_\alpha(P) \end{array}\right.$$

III-2-4) Torseur nul

Un torseur $[\tau]$ est nul si et seulement si, sa résultante $\vec{R}$ est nulle, et qu'il existe un point P où le moment $\vec{M}$ est nul.

Conséquences :

$[\tau] \equiv [0] \quad \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{0}$ et, $\exists\, P \in \Im,\; tq \;\; \vec{M}(P) = \vec{0}$

Or

$\forall\, Q, \qquad \vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ} = \vec{0}$

Donc $[\tau] \equiv [0] \quad \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{0}$ et, $\forall\ Q \in \Im, \quad \vec{M}(Q) = \vec{0}$

III-2-5) Invariant scalaire d'un torseur.

Soit $[\tau]$ un torseur, et P et Q, deux points quelconques. Les éléments de réduction de $[\tau]$ aux point P et Q sont :

$$[\tau]\ \Bigg|_P \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}(P) \end{matrix} \qquad [\tau]\ \Bigg|_Q \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}(Q) \end{matrix}$$

Calculons alors les produits scalaires des deux vecteurs $(\vec{R}$ et $\vec{M})$ constituant les éléments de réduction de $[\tau]$ aux deux point distincts P et Q :

$$\mathrm{I_S}(P) = \vec{R}.\vec{M}(P) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I_S}(Q) = \vec{R}.\vec{M}(Q)$$

Or

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathrm{I_S}(Q) = \vec{R}.[\ \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}\ ] = \vec{R}.\vec{M}(P) + \vec{R}.(\ \vec{R} \wedge \vec{PQ}\ ) = \vec{R}.\vec{M}(P) = \mathrm{I_S}(P)$$

Car $\quad (\vec{R} \wedge \vec{PQ}\ ) \perp \vec{R}\quad$ *o*u $\quad \vec{R}.(\vec{R} \wedge \vec{PQ}\ ) = \vec{PQ}.(\vec{R} \wedge \vec{R}\ ) = \vec{0}$

Donc

$$\mathrm{I_S} = \mathrm{I_S}(Q) = \mathrm{I_S}(\mathrm{P}) \qquad \forall\ (P,Q) \in \Im^2$$

Le produit $\mathrm{I_S}$ des éléments de réduction (ou coordonnées vectorielles en un point de l'espace) d'un torseur est une grandeur indépendante du point choisi, il garde donc la même valeur pour tous les points de l'espace, et il est appelé « ***invariant scalaire*** » du torseur $[\tau]$.

$$\boxed{\mathrm{I_S}(P) = \vec{R}.\vec{M}(P) = \mathrm{Cste} = \mathrm{I_S}}$$

III-2-6) Produit de deux torseurs ou « comoment »

Soient $[\tau_1]$ et $[\tau_2]$, deux torseurs ayant comme éléments de réduction au point P respectivement $(\vec{R}_1, \vec{M}_1(P))$ et $(\vec{R}_2, \vec{M}_2(P))$.

$$[\tau_1]\ \Bigg|_{\mathrm{P}} \begin{matrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(P) \end{matrix} \quad ; \quad [\tau_2]\ \Bigg|_{\mathrm{P}} \begin{matrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(O) \end{matrix}$$

Par définition, on appelle « ***comoment*** », (ou produit) des deux torseurs $[\tau_1]$ et $[\tau_2]$ au point P, la grandeur scalaire notée $\Pi(P) = [\tau_1].[\tau_2]$, et définie par

$$\boxed{\Pi(P) = \vec{R}_1 . \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 . \vec{M}_1(P)}$$

Montrons maintenant, que cette quantité scalaire est indépendante du point de l'espace. Pour cela considérons deux points (P, Q) distincts de $\Im$, et auxquels on doit calculer le comoment des deux torseurs.

Soient, donc

$$\Pi(P) = \vec{R}_1 . \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 . \vec{M}_1(P) \quad \text{et} \quad \Pi(Q) = \vec{R}_1 . \vec{M}_2(Q) + \vec{R}_2 . \vec{M}_1(Q)$$

Sachant bien sûr que

$$\vec{M}_1(Q) = \vec{M}_1(P) + \vec{R}_1 \wedge \vec{PQ} \quad \text{et} \quad \vec{M}_2(Q) = \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 \wedge \vec{PQ}$$

D'où l'on a

$$\Pi(Q) = \vec{R}_1 .[\vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 \wedge \vec{PQ}] + \vec{R}_2 .[\vec{M}_1(P) + \vec{R}_1 \wedge \vec{PQ}]$$

$$\Pi(Q) = \vec{R}_1 . \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 . \vec{M}_1(P) + \vec{R}_1 .(\vec{R}_2 \wedge \vec{PQ}) + \vec{R}_2 .(\vec{R}_1 \wedge \vec{PQ})$$

Or

$$\vec{R}_2 .(\vec{R}_1 \wedge \vec{PQ}) = -\vec{R}_1 .(\vec{R}_2 \wedge \vec{PQ})$$

Ce qui donne part conséquent :

$$\Pi\ (Q) = \vec{R}_1 . \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 . \vec{M}_1(P) = \Pi(P)$$

Ou

$$\Pi(Q) = \Pi(P) = \Pi$$

III-3) AXE CENTRAL D'UN TORSEUR

III-3-1) Division vectorielle.

Soit (E) un espace vectoriel à trois dimensions. Et soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de (E) (avec $\vec{a} \neq \vec{0}$). Montrons que si $\vec{a} \perp \vec{b}$, il est toujours possible de trouver au moins un vecteur $\vec{x}$ tel que

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$$

Le vecteur $\vec{x}$ est le résultat de la « ***division vectorielle*** » de $\vec{b}$ par $\vec{a}$.

Montrons d'abord qu'il existe une solution particulière $\vec{x}_o$ orthogonale à $\vec{a}$ $(\vec{x}_o . \vec{a} = 0)$.

Le vecteur $\vec{x}_o$ doit donc vérifier :

$$\vec{x}_o \wedge \vec{a} = \vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \wedge [\vec{x}_o \wedge \vec{a}] = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

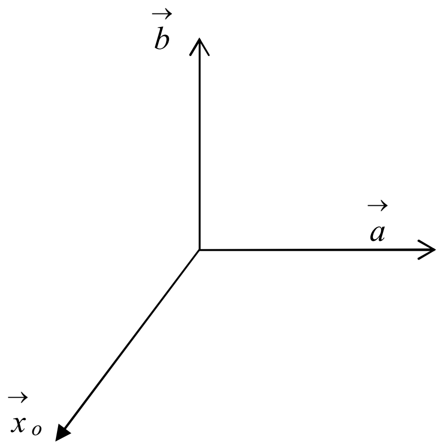
$$\Rightarrow \quad (\vec{a}\,.\,\vec{a})\,\vec{x}_o - (\vec{a}\,.\,\vec{x}_o)\,\vec{a} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

Or : $(\vec{x}_o\,.\,\vec{a} = 0)$

$$\Rightarrow \quad /\vec{a}/^2\, \vec{x}_o = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

Ou enfin

$$\vec{x}_o = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{/\vec{a}/^2}$$



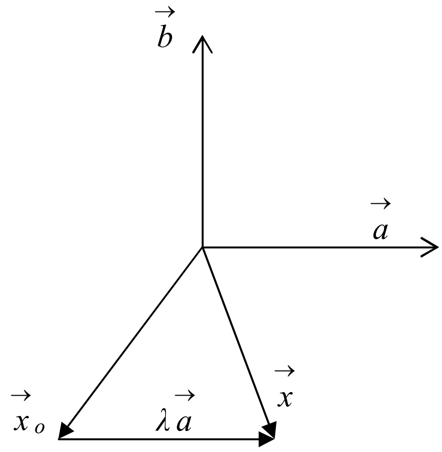
La recherche de la solution générale $\vec{x}$ de la relation revient en fait à résoudre l'équation :

$$(\vec{x} \wedge \vec{a}) = (\vec{x}_o \wedge \vec{a})$$

$\Rightarrow \quad (\vec{x} - \vec{x}_o) \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\vec{x} - \vec{x}_o)$ et $\vec{a}$ sont colinéaires, et on peut dire donc :

$\exists \lambda \in$ R, tq $(\vec{x} - \vec{x}_o) = \lambda\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{x}_o + \lambda\,\vec{a}$, et l'on peut écrire finalement :

$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{/\vec{a}/^2} + \lambda\,\vec{a}}$$



III-3-2) Axe central d'un torseur.

III-3-2-1) Définition.

On appelle « ***axe central*** » du torseur $[\tau]\Big|_O \begin{matrix}\vec{R} \\ \vec{M}(O)\end{matrix}$, l'ensemble des points *P*, tel que $\vec{M}(P)$ soit colinéaire au vecteur $\vec{R}$ (résultante générale de $[\tau]$).

Cherchons donc, l'ensemble des points *P*, vérifiant la condition $\vec{M}(P) = \alpha\vec{R}$

$$\vec{M}(O) + \vec{R}\wedge\vec{OP} = \alpha\vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}\wedge\vec{OP} = -\vec{M}(O) + \alpha\vec{R}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{OP}\wedge\vec{R} = \vec{M}(O) - \alpha\vec{R}$$

On peut dire qu'on est ramené à résoudre un problème de division vectorielle dans laquelle l'inconnu $\vec{x}$ est le vecteur $\vec{OP}$, $\vec{a}$ est la résultante $\vec{R}$, et $\vec{b}$ est le vecteur $(\vec{M}(O) - \alpha\vec{R})$, à condition que

$$\vec{R} \perp (\vec{M}(O) - \alpha\vec{R}) \quad \Rightarrow \quad \vec{R}.(\vec{M}(O) - \alpha\vec{R}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{R}.\vec{M}(O) - \alpha/\vec{R}/^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\vec{R}.\vec{M}(O)}{/\vec{R}/^2}$$

Par conséquent :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R}\wedge(\vec{M}(O) - \alpha\vec{R})}{/\vec{R}/^2} + \lambda\vec{R}$$

Ce qui donne enfin :

$$\boxed{\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{/\vec{R}/^2} + \lambda \vec{R}}$$

Soit P_o le point tel que, $\quad \vec{OP_o} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{/\vec{R}/^2}$

Nous avons alors :

$$\vec{OP} = \vec{OP_o} + \lambda \vec{R}$$

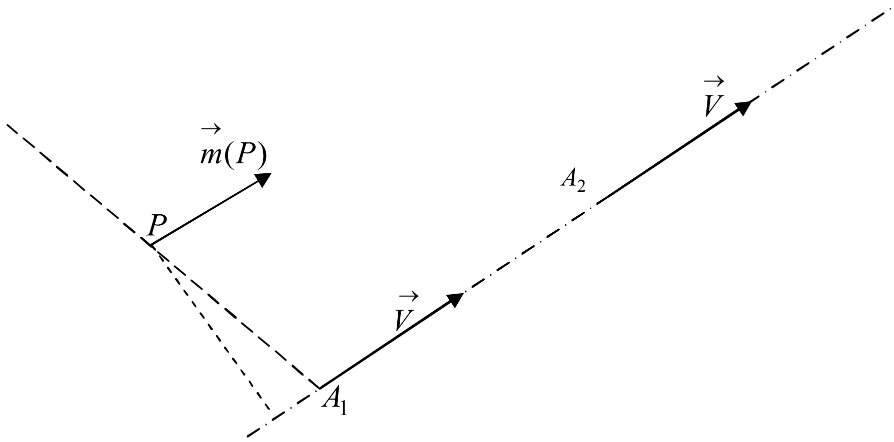
Et on dit alors, qu'il s'agit d'une droite passant par le point P_o , et parallèle au vecteur $\vec{R}$, cette droite s'appelle « ***axe central*** » du torseur $[\tau]$.

III-4) EXEMPLES DE TORSEURS.

III-4-1) Torseur associé à un vecteur glissant.

On rappelle qu'un vecteur glissant $\vec{V}$, est un vecteur dont a précisé le support (Δ) sans fixer l'origine A, et il se note en général $(\Delta, \vec{V})$.

$\vec{V}$ peut donc « glisser » le long de (Δ) .



Pour deux origines différentes A_1 et A_2, on définit le moment de $\vec{V}$ en un point P de l'espace par :

Au point A_1

$$\vec{M}_1(\vec{V}) = \vec{PA_1} \wedge \vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{A_1P}$$

Au point A_2

$$\vec{M}_2(\vec{V}) = \vec{PA_2} \wedge \vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{A_2P} = \vec{V} \wedge \vec{A_2A_1} + \vec{V} \wedge \vec{A_1P}$$

Et puisque $\vec{V} \wedge \vec{A_2A_1} = \vec{0}$, cela conduit à

$$\vec{M}_2(\vec{V}) = \vec{PA_2} \wedge \vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{A_2P} = \vec{V} \wedge \vec{A_1P}$$

Ou

$$\vec{M}_2(\vec{V}) = \vec{M}_1(\vec{V})$$

On dit alors, que le moment de $\vec{V}$ (glisseur), est indépendant du choix de l'origine A $(A \in \Delta)$.

Considérons maintenant deux points distincts de l'espace P et Q, et désignons par :

$\vec{M}(P)$ le moment de $\vec{V}$ (glisseur) au point P.

Et $\vec{M}(Q)$ le moment de $\vec{V}$ (glisseur) au point Q.

Et nous écrirons alors

$$\vec{M}(P) = \vec{PA} \wedge \vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{AP}$$

Et

$$\vec{M}(Q) = \vec{QA} \wedge \vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{AQ}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}(Q) = (\vec{V} \wedge \vec{AP}) + (\vec{V} \wedge \vec{PQ})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{V} \wedge \vec{PQ}$$

Le moment $\vec{M}$ d'un vecteur glissant $\vec{V}$ est donc un champ antisymétrique de vecteur $\vec{V}$

Les deux vecteurs $\vec{M}(P)$ et $\vec{V}$ constituent alors, les éléments de réduction au point P du torseur associé au vecteur glissant $(\Delta, \vec{V})$, appelé en général « ***glisseur*** »

Par définition le support (Δ) de $\vec{V}$ est l'axe central du glisseur.

$$\forall\ A \in (\Delta),\ \vec{M}(A) = \vec{0}$$

Autres définitions d'un glisseur.

1- Si un torseur de résultante $\vec{V}$ a un moment nul en un point A. Ce torseur est appelé «***glisseur*** » associé au vecteur glissant $(\Delta, \vec{V})$. (Δ) étant la droite passant par A, et parallèle à $\vec{V}$, et représente l'axe central du torseur associé au vecteur glissant.

$$\vec{M}(A) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \forall\ P \in (\Delta),\ \vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{V} \wedge \vec{AP} = \vec{0}$$

2- Pour qu'un torseur soit glisseur, il faut et il suffit, qu'il existe un point A en lequel son moment est nul.

Remarque :

Pour un glisseur, si $A \in (\Delta)$, $\vec{M}(A) = \vec{0}$, en plus $\forall P$, $\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{V} \wedge \vec{AP} = \vec{V} \wedge \vec{AP}$, donc $\forall P$, $\vec{M}(P) \perp \vec{V}$. Par conséquent, l'invariant scalaire est nul :

$$\mathrm{I_S} = \vec{V} . \vec{m}(P) = 0$$

III-4-2) Torseur associé à une résultante générale nulle.

Lorsqu'un torseur $[\tau \begin{vmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(O) \end{vmatrix}_{O}$ ait une résultante générale nulle $(\vec{R} = \vec{0})$, ce torseur est appelé « ***couple*** ». $[\tau_C] \begin{vmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}(O) \end{vmatrix}_{\mathrm{O}}$, et donc $\forall (P,Q) \in \Im^2$, $\vec{M}(Q) = \vec{M}(P)$

Et on dit que le moment d'un couple est « ***uniforme*** ».