Mécanique du solide (CP2 – S3)

Chapitre I ::

CINÉMATIQUE DES SOLIDES PARFAITS

II-1- DEFINITION D UN SOLIDE PARFAIT

Soit un système matériel (*S*). Et soit *C*(*t*) l'ensemble des positions des points *M* de (*S*) (ou la configuration du solide (*S*)) à l'instant *t*.

Définition :

Le système matériel (*S*) est un **solide parfait (indéformable)** si

$\forall$ les deux points (A,B) de (*S*) :

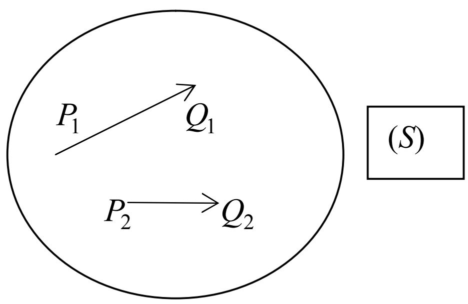
$$d(A,B) = /\vec{AB}/ = cte \qquad \forall\, t \tag{2.1}$$

Et $\forall$ les trois points (A,B,C) de (*S*) :

$$\text{L'angle}\,(\vec{AB},\vec{AC}) = cte \qquad \forall\, t \tag{2.2}$$

C'est à dire, quelques soient (P_1,Q_1,P_2,Q_2) quatre points de (*S*), et si l'on pose $\vec{A}_1 = \vec{P_1Q_1}$ et $\vec{A}_2 = \vec{P_2Q_2}$, alors

$$\vec{A}_1 \,.\, \vec{A}_2 = cte \qquad \forall\, t \tag{2.3}$$



II-2- CHAMP DES VITESSES D'UN SOLIDE – TORSEUR CINEMATIQUE D'UN SOLIDE.

Soit $\Re = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct.

Soit (*S*) un solide parfait en mouvement quelconque par rapport au repère $\Re$.

Alors, puisqu'il s'agit d'un solide indéformable on a $\forall, (P_1,Q_1,P_2,Q_2)$

$$\vec{A}_1 = \vec{P_1Q_1} \text{ et } \vec{A}_2 = \vec{P_2Q_2}$$

$$\vec{A}_1 . \vec{A}_2 = cte \qquad \forall\, t$$

Donc :

$$\frac{d(\vec{A}_1 . \vec{A}_2)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}_1 . \frac{d\,\vec{A}_2}{dt} + \vec{A}_2 . \frac{d\,\vec{A}_1}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \vec{A}_1 . \frac{d\,\vec{A}_2}{dt} = -\vec{A}_2 . \frac{d\,\vec{A}_1}{dt} \tag{2.4}$$

On remarque d'après (1.1) que l'opérateur « *dérivée par rapport au temps* $\frac{d.}{dt}$ » est une application antisymétrique, et par conséquent elle est linéaire. Alors, d'après (1.9), il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que :

$$\forall \; \vec{l} = \vec{PQ}$$

où *P* et *Q* deux points quelconques de (*S*), l'image par l'application linéaire $\frac{d.}{dt}$ du vecteur $\vec{l}$ s'écrit :

$$\frac{d\,\vec{l}}{dt} = \vec{R} \wedge \vec{l}$$

Le vecteur $\vec{R}$ est noté $\vec{\Omega}(S/\Re)$, et on l'appelle « ***vecteur rotation instantané*** » du solide (S) dans son mouvement par rapport à $\Re$, et à l'instant *t*.

$$\frac{d\,\vec{l}}{dt} = \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{l} \tag{2.5}$$

De plus :

$\forall \; \vec{l} = \vec{PQ}$, celui-ci peut s'écrire, grâce à l'addition vectorielle sous la forme

$$\vec{l} = \vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

Et la relation (2.6) prend la forme

$$\frac{d\,\vec{PQ}}{dt} = \frac{d\,\vec{OQ}}{dt} - \frac{d\,\vec{OP}}{dt} = \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{PQ} \tag{2.6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\,\vec{OQ}}{dt} = \frac{d\,\vec{OP}}{dt} + \vec{\Omega}(\text{S}/\Re) \wedge \vec{PQ} \tag{2.7}$$

Or les quantités $\frac{d\,\vec{OQ}}{dt}$ et $\frac{d\,\vec{OP}}{dt}$ ne sont rien d'autres que les vecteurs vitesses par rapport au repère $\Re$ des deux points *P* et *Q*. Nous avons alors la relation importante suivante qui relie les vecteurs vitesses de deux points quelconques appartenant à un même solide (S) :

$$\boxed{\forall\ (P,Q)\ \text{de}\ S,\quad \vec{V}(Q/\Re) = \vec{V}(P/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{PQ}} \qquad (2.8)$$

Le « vecteur rotation instantanée de (S) dans son mouvement par rapport à $\Re$ » $\vec{\Omega}(S/\Re)$ est un vecteur qui caractérise le mouvement de (S). On peut le déterminer si on connait la nature du mouvement.

Cette relation (2.8), montre que le champ des vecteurs vitesses d'un solide, défini en tout point de ce solide, est un champ antisymétrique de vecteur $\vec{\Omega}(S/\Re)$.
L'ensemble du champ des vitesses d'un solide et de son vecteur représente **le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à** $\Re$. (La résultante générale est le vecteur $\vec{\Omega}(S/\Re)$, le champ des moments est le champ des vitesses des points de ce solide)

On le note $[V(S/\Re]$. Il est défini en tout point du solide (S).

Dans la pratique, pour déterminer le torseur des vitesses on calcule d'une part sa résultante générale, c'est-à-dire le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/\Re)$, et d'autre part la vitesse d'un point particulier A lié à (S) convenablement choisi (on choisit un point du solide où la vitesse se détermine facilement). On obtiendra alors le torseur des vitesses par ses coordonnées vectorielles (ou ses éléments de réduction) en A.

$$[V(S/\Re] = {}_A\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(\mathrm{S}/\Re) \\ \vec{V}(A/\Re) \end{bmatrix} \qquad A \in S\ \ (\text{ou lié à } S)$$

À partir de là, on peur déterminer les coordonnées vectorielles de $[V(S/\Re]$ en n'importe quel point P de (S), et ce ci grâce à la relation (2.8).

$$[V(S/\Re] = {}_P\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(\mathrm{S}/\Re) \\ \vec{V}(P/\Re) = \vec{V}(A/\Re) + \vec{\Omega}(\mathrm{S}/\Re) \wedge \vec{AP} \end{bmatrix}$$

II-3- CHAMP DES ACCELERATIONS D UN SOLIDE

On sait maintenant que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique de vecteur $\vec{\Omega}(S/\Re)$. On peut écrire :

$$\forall\ (P,Q)\ \text{de}\ S,\ \vec{V}(Q/\Re) = \vec{V}(P/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{PQ}$$

Par dérivation, dans le repère $\Re$ on obtient

$$\left[\frac{d\vec{V}(Q/\Re)}{dt}\right]_{\Re}=\left[\frac{d\vec{V}(P/\Re)}{dt}\right]_{\Re}+\frac{d\vec{\Omega}(S/\Re)}{dt}\wedge\vec{PQ}+\vec{\Omega}(S/\Re)\wedge\left[\frac{d\vec{PQ}}{dt}\right]_{\Re}$$

Or, d'après (2.6) $\left[\frac{d\vec{PQ}}{dt}\right]_{\Re}=\vec{\Omega}\,(S/\Re)\wedge\vec{PQ}$

Et $\left[\frac{d\vec{V}(Q/\Re)}{dt}\right]_{\Re}=\vec{\Gamma}(Q/\Re)$; $\left[\frac{d\vec{V}(P/\Re)}{dt}\right]_{\Re}=\vec{\Gamma}(P/\Re)$

Finalement :

$$\vec{\Gamma}(Q/\Re)=\vec{\Gamma}(P/\Re)+\frac{d\vec{\Omega}(S/\Re)}{dt}\wedge\vec{PQ}+\vec{\Omega}(S/\Re)\wedge(\vec{\Omega}(S/\Re)\wedge\vec{PQ})$$

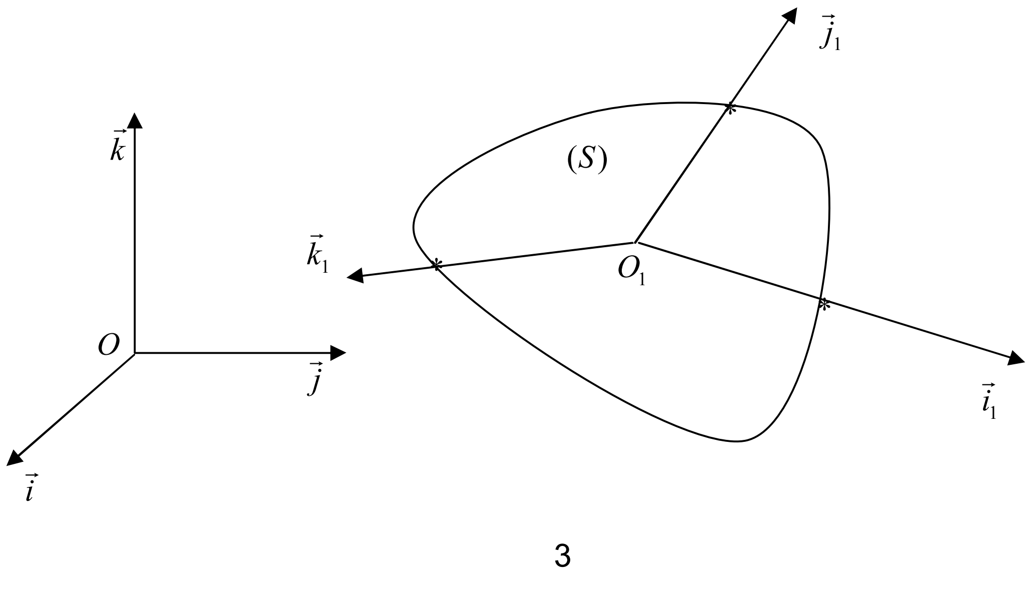
$$\Leftrightarrow\ \vec{\Gamma}_{\Re}(Q)=\vec{\Gamma}_{\Re}(P)+\frac{d\vec{\Omega}_{S/\Re}}{dt}\wedge\vec{PQ}+(\vec{\Omega}_{S/\Re}.\vec{PQ})\,\vec{\Omega}_{S/\Re}-(\vec{\Omega}_{S/\Re}.\vec{\Omega}_{S/\Re})\,\vec{PQ}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow\ \vec{\Gamma}_{\Re}(Q)=\vec{\Gamma}_{\Re}(P)+\frac{d\vec{\Omega}_{S/\Re}}{dt}\wedge\vec{PQ}+(\vec{\Omega}_{S/\Re}.\vec{PQ})\,\vec{\Omega}_{S/\Re}-|\vec{\Omega}_{S/\Re}|^{2}\,\vec{PQ}}\qquad(2.9)$$

Ce qui montre que le champ des accélérations d'un solide n'est pas antisymétrique.

II-4- DIFFERENTS MOUVEMENTS D'UN SOLIDE : (Détermination de $\vec{\Omega}(S/\Re)$ et paramétrage du solide)

Soit $\Re=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. (S) un solide en mouvement par rapport à $\Re$.
On va lier à ce solide un repère orthonormé direct $\Re_1=(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$
O_1 étant un point quelconque du solide. (On verra plus loin, dans le chapitre suivant, qu'on choisira le point G appelé centre d'inertie du solide ou bien un point du solide qui reste fixe dans $\Re$ (s'il existe))



Parler du mouvement de (S) par rapport à $\Re$ ou du mouvement de $\Re_1$ par rapport à $\Re$, c'est la même chose.

Soit alors $\vec{\Omega}(S/\Re)$ (ou $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$), le vecteur rotation instantanée de (S) par rapport à $\Re$. (Ce vecteur peut être déterminé si on connait la nature du mouvement de (S), comme on va le voir par la suite)

<u>Paramètres de position du solide à chaque instant t :</u>

1) Rappelons que la position d'un point matériel P, en mouvement par rapport à un repère $\Re$, est donnée par 3 paramètres. Ce sont les 3 coordonnées cartésiennes ou les 3 coordonnées cylindriques ou les 3 coordonnées sphériques. On dit que, dans le cas général, un point matériel a 3 degrés de liberté (3 paramètres de position). Ceux ci correspondent aux 3 translations.

2) Pour un solide indéformable (parfait) : Par définition, le solide est parfait si quelques soient 3 points du solide, leurs distances respectives restent alors constantes au cours du temps. On a 3 points (donc 9 paramètres de position), mais ces paramètres sont liés par 3 relations (les 3 distances qui doivent rester constantes). Ceci nous donne 9 – 3 = 6 paramètres de position.

Ainsi, dans le cas général, la position d'un solide est déterminée, à chaque instant t, par 6 paramètres de position. On dit que, dans le cas général, un solide a 6 degrés de liberté (6 paramètres de position). Ceux ci correspondent aux 3 translations et aux 3 rotations.

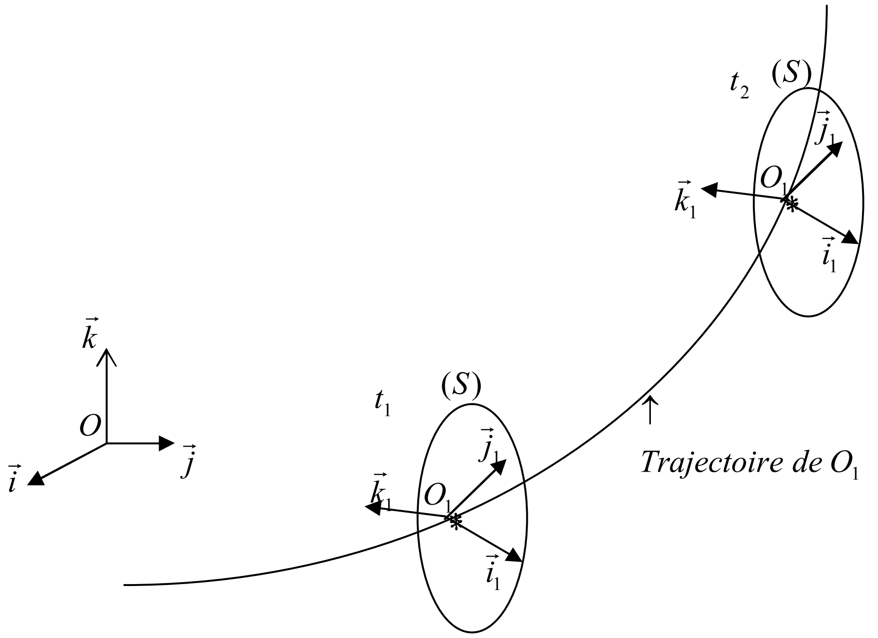
On verra, dans la suite, comment choisir ces paramètres.

II-4-1 Mouvement de translation :

Soit $\Re = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. (S) un solide en mouvement par rapport à $\Re$.

On va lier à ce solide un repère orthonormé direct $\Re_1 = (O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$

Le mouvement du solide (*S*) par rapport au repère est **un mouvement de translation**, si les axes $(O_1,\vec{i}_1)$, $(O_1,\vec{j}_1)$, *et* $(O_1,\vec{k}_1)$ gardent, au cours du temps, les mêmes directions par rapport à $\Re$



On sait que (voir TD, relation importante) :

$$\forall \text{ un vecteur } \vec{U}(t) \text{ et } \forall \text{ 2 repères } \Re \text{ et } \Re_1 \text{ :}$$

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{U}$$

Appliquons cette relation, dans le cas où le mouvement de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est une translation, en prenant $\vec{U} \equiv \vec{i}_1$

$$\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} = \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{i}_1$$

Or : $\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re_1} = \vec{0}$ Car $\vec{i}_1$ est lié à $\Re_1$

$\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} = \vec{0}$ Car $\vec{i}_1$ garde une direction fixe par rapport à $\Re$

Donc :

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{i}_1 = \vec{0}$$

De même, en prenant ($\vec{U} \equiv \vec{j}_1$) ou ($\vec{U} \equiv \vec{k}_1$), on trouve :

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{j}_1 = \vec{0} \quad \text{Et} \quad \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{k}_1 = \vec{0}$$

Ces 3 relations imposent donc la relation :

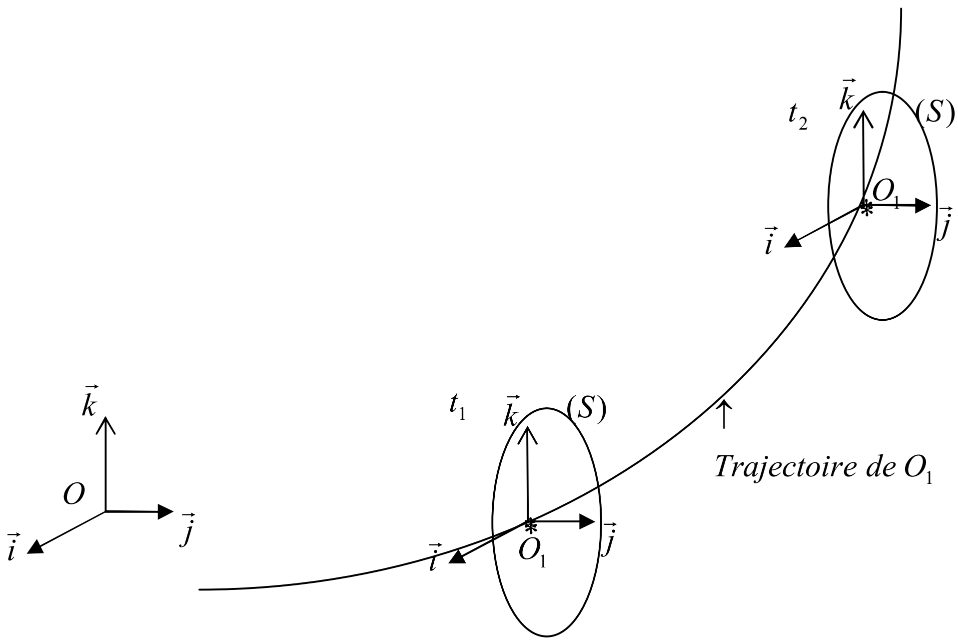
$$\boxed{\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{\Omega}(S/\Re) = \vec{0}} \qquad (2\text{-}10)$$

Lors d'une translation, le vecteur « rotation instantanée » est donc nul.

Dans la pratique, lors d'une translation du solide, on choisit dès le départ les axes $(O_1,\vec{i}_1)$, $(O_1,\vec{j}_1)$, *et* $(O_1,\vec{k}_1)$, de telle façon que $\vec{i}_1=\vec{i}$; $\vec{j}_1=\vec{j}$ et $\vec{k}_1=\vec{k}$

Ainsi, nous avons :

$$\boxed{\Re=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})\ ;\ \Re_1=(O_1,\vec{i},\vec{j},\vec{k})\ \text{ et }\ \vec{\Omega}(\Re_1/\Re)=\vec{\Omega}(S/\Re)=\vec{0}}$$



On dit que le passage du repère $\Re=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ au repère $\Re_1=(O_1,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, à chaque instant, se fait par une translation. Cette translation est caractérisée par la donnée des 3 coordonnées du point O_1 dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\Re=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \quad \xrightarrow{\quad\quad Translation \quad\quad} \quad \Re_1=(O_1,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \equiv (S) \\ \overrightarrow{OO_1} =_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right. \end{array}}$$

Et

$$\boxed{\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)=\vec{\Omega}(S/\Re)=\vec{0}}$$

On constate que le nombre de paramètres de position du solide, lors d'une translation, est égal à 3. Ce sont les coordonnées du point O_1.

On peut déterminer le vecteur vitesse du point O_1 par rapport à $\Re$:

$$\vec{V}(O_1/\Re) = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{\Re} =_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} \begin{vmatrix} dx/dt = \overset{\circ}{x} \\ dy/dt = \overset{\circ}{y} \\ dz/dt = \overset{\circ}{z} \end{vmatrix}$$

Ainsi, le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, au point O_1 appartenant au solide :

$$[V(S/\Re)] = {}_{O_1\in(S)}\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) = \vec{0} \\ \vec{V}(O_1/\Re) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} \end{bmatrix}$$

Pour un autre point P quelconque du solide, le vecteur vitesse se détermine en écrivant que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique (relation (2-8)).

$$\vec{V}(P/\Re) = \vec{V}(O_1/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1P} = \vec{V}(O_1/\Re)$$

Et le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, au point P appartenant au solide :

$$[V(S/\Re)] = {}_{P\in(S)}\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) = \vec{0} \\ \vec{V}(P/\Re) = V(O_1/\Re) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} \end{bmatrix}$$

Ainsi le torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à $\Re$ est un « Couple ». Le champ des vitesses est uniforme.

$$\forall\ (P,Q) \text{ de } S,\ \ \vec{V}(P/\Re) = \vec{V}(Q/\Re)$$

Ceci veut dire que les trajectoires de tous les points du solide sont parallèles. Elles ne sont pas nécessairement rectilignes, mais ce sont des courbes égales qui se déduisent les unes des autres par des translations géométriques indépendantes du temps.

Si l'une des trajectoires dans $\Re$ des points liés à (S) est une droite, alors toutes les autres le sont, et le mouvement est dit de « ***translation rectiligne*** ». Cela correspond au cas où $\vec{V}(O_1/\Re)$ garde une direction constante dans $\Re$.

Si en plus, le module de $\vec{V}(O_1/\Re)$ demeure constant dans $\Re$ ($\left|\vec{V}(O_1/\Re)\right| = Cste$), alors le mouvement est dit de « ***translation rectiligne uniforme*** ».

Si la trajectoire de O_1 est circulaire (par exemple) , la translation est dite circulaire. Si en plus $\left|\vec{V}(O_1/\Re)\right| = Cste$, le mouvement est dit de « ***translation circulaire uniforme*** ».

II-4-2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

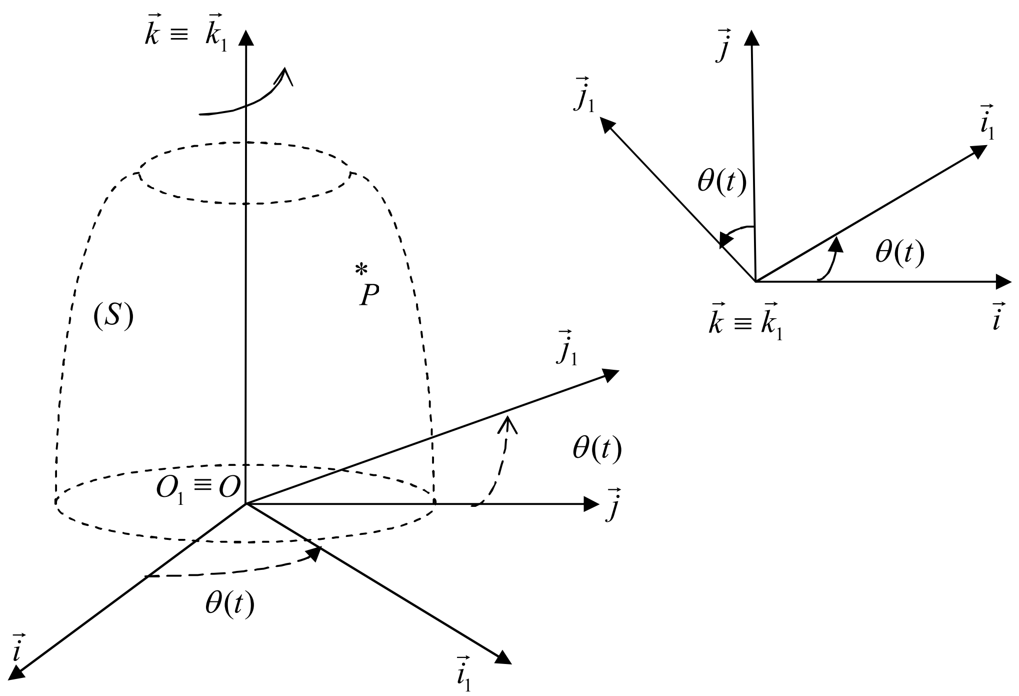
Soit $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct. (S) un solide en mouvement par rapport à $\Re$. On va lier à ce solide un repère orthonormé direct $\Re_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$

Supposons que le mouvement du solide (S) est une rotation autour d'un axe (Δ) (fixe dans $\Re$), appelé axe de rotation.

Pour fixer les idées, prenons l'axe de rotation (Δ) confondu avec l'axe $(O, \vec{k})$. Ceci veut dire que le point O est un point qui appartient aussi au solide.

Pour le choix du repère $\Re_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, lié au mouvement du solide, on peut prendre les points O et O_1 confondus et $(O_1, \vec{k}_1) = (O_1, \vec{k})$:

$$\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad \text{et} \quad \Re_1 = (O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$$



On dit que le passage du repère $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère $\Re_1 = (O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$, à chaque instant, se fait par une rotation autour de l'axe $(O, \vec{k})$. Cette rotation est caractérisée par la donnée de l'angle de rotation : $\theta(t) = Angle\,(\vec{i}, \vec{i}_1) = Angle\,(\vec{j}, \vec{j}_1)$

$$\Re = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \xrightarrow[\theta(t)]{Rotation\ autour\ de\ (O,\vec{k})} \Re_1 = (O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}) \equiv (S)$$

On constate que le nombre de paramètres de position du solide, lors d'une rotation autour d'un axe, est égal à 1. C'est l'angle de rotation $\theta(t)$

Déterminons maintenant le vecteur $\vec{\Omega}(S/\Re)$:

$$\vec{i}_1 = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$$
$$\vec{j}_1 = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$$
$$\vec{k}_1 = \vec{k}$$

On peut vérifier que :

$$\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right]_\Re = \frac{d\theta}{dt}\vec{j}_1 = \overset{\circ}{\theta}\vec{j}_1 \quad ; \quad \left[\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right]_\Re = -\frac{d\theta}{dt}\vec{i}_1 = -\overset{\circ}{\theta}\vec{i}_1 \quad \text{et} \quad \left[\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right]_\Re = \vec{0}$$

Soit maintenant la relation de la dérivée vectorielle dans deux repères :

$$\forall\ un\ vecteur\ \vec{U}(t)\ \text{ et } \forall\ 2\ repères\ \Re\ et\ \Re_1\ :$$
$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_\Re = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{U}$$

Prenons : $\vec{U} \equiv \vec{k}_1$

$$\left[\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right]_\Re = \left[\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re_1} + \vec{\Omega}(S/\Re)\wedge\vec{k}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}(S/\Re)\wedge\vec{k}_1 = \vec{0}$$

Ceci veut dire que $\vec{\Omega}(S/\Re)$ est colinéaire avec $\vec{k}_1 = \vec{k}$. Donc, il existe un scalaire λ tel que :

$$\vec{\Omega}(S/\Re) = \lambda\vec{k}$$

Prenons : $\vec{U} \equiv \vec{i}_1$

$$\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right]_\Re = \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re_1} + \vec{\Omega}(S/\Re)\wedge\vec{i}_1 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{\theta}\vec{j}_1 = \vec{0} + \lambda\vec{k}\wedge\vec{i}_1 = \lambda\vec{j}_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \overset{\circ}{\theta}$$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{\Omega}(S/\Re) = \overset{\circ}{\theta}\vec{k}} \qquad (2\text{-}11)$$

Le point O est un point qui appartient au solide (S). Il est fixe dans $\Re$. Par conséquent $\vec{V}(O/\Re) = \vec{0}$

Ainsi, le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, au point O appartenant au solide :

$$[V(S/\Re] \underset{O\in(S)}{=} \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) = \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k} \\ \vec{V}(O/\Re) = \vec{0} \end{bmatrix}$$

Pour un autre point P quelconque du solide, le vecteur vitesse se détermine en écrivant que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique (relation (2-8)).

$$\vec{V}(P/\Re) = \vec{V}(O/\Re) + \vec{\Omega}(\vec{S}/\Re) \wedge \vec{OP} = \vec{\Omega}(\vec{S}/\Re) \wedge \vec{OP}$$

Chaque point *P* de (*S*) décrit un cercle centré sur l'axe $(O,\vec{k})$

Et le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, au point P appartenant au solide :

$$[V(S/\Re] \underset{P\in(S)}{=} \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) = \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k} \\ \vec{V}(P/\Re) = \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{OP} \end{bmatrix}$$

Ainsi le torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à $\Re$ est un « Glisseur » d'axe $(O,\vec{k})$.

II-4-3 Mouvement hélicoïdal simple (Translation + Rotation) :

Soit $\Re = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. (S) un solide en mouvement par rapport à $\Re$. On va lier à ce solide un repère orthonormé direct $\Re_1 = (O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$

Supposons que le mouvement du solide (*S*) est composé par une translation suivant l'axe $(O,\vec{k})$ et une rotation autour de celui ci.

On choisit, dès le départ : $(\vec{k} = \vec{k}_1)$

Considérons tout d'abord la translation suivant l'axe $(O,\vec{k})$:

On introduit un repère orthonormé direct intermédiaire $\Re_{O_1} = (O_1,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ qui va caractériser cette translation.

$$\Re = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \xrightarrow{\quad Translation \quad} \Re_{O_1} = (O_1,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$$

$$\overrightarrow{OO_1} \underset{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}{=} \left| \begin{array}{l} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) \end{array} \right.$$

Et $\quad \vec{\Omega}(\Re_{O_1}/\Re) = \vec{0}$

Et, ensuite, on passe du repère $\Re_{O_1} = (O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère lié au solide $\Re_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, par une rotation autour de l'axe commun $(\vec{k} = \vec{k}_1)$ d'angle $\theta(t) = Angle\,(\vec{i}, \vec{i}_1) = Angle\,(\vec{j}, \vec{j}_1)$

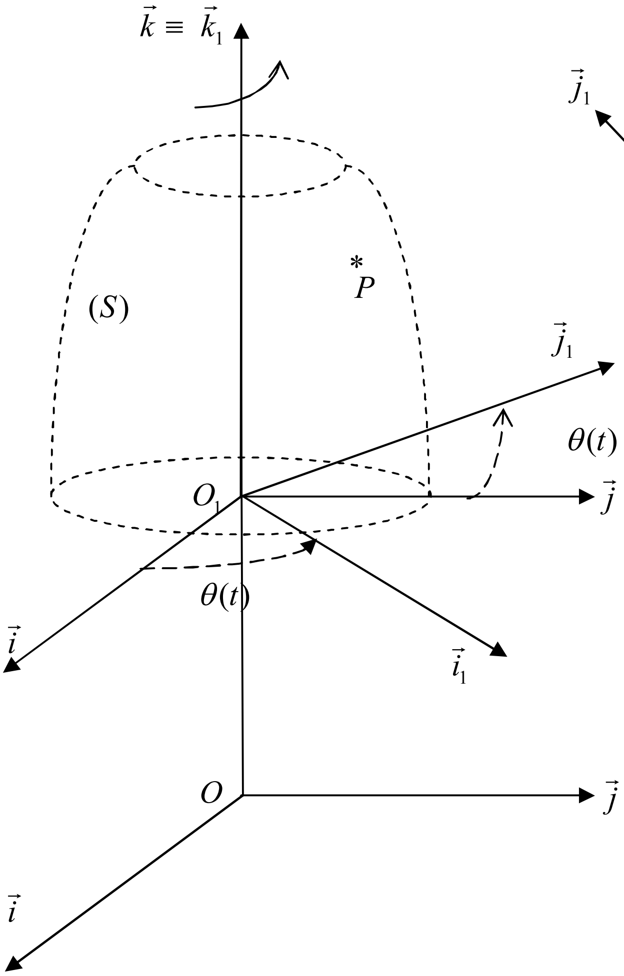
$$\Re_{O_1} = (O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow[\theta(t)]{Rotation\ autour\ de\ (\vec{k})} \Re_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}) \equiv (S)$$

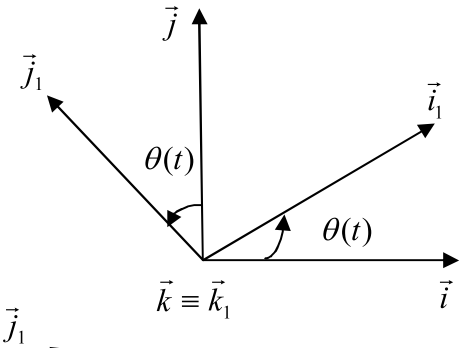
$$\Rightarrow \quad \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re_{O_1}) = \vec{\Omega}(S / \Re_{O_1}) = \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k}$$

Donc :

$$\vec{\Omega}(S / \Re) = \vec{\Omega}(S / \Re_{O_1}) + \vec{\Omega}(\Re_{O_1} / \Re) = \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k}$$

On constate que les paramètres de position du solide, sont z(t) (position de O₁, et l'angle de rotation $\theta(t)$





$$\overrightarrow{OO_1} = z(t)\,\vec{k}$$

Ainsi, le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, au point O_1 appartenant au solide :

$$[V(S/\Re)] = \underset{O_1 \in (S)}{\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) = \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k} \\ \vec{V}(O/\Re) = \dfrac{d\,\overrightarrow{OO_1}}{dt} = \overset{\circ}{z}\,\vec{k} \end{bmatrix}}$$

Pour un autre point P quelconque du solide, le vecteur vitesse se détermine en écrivant que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique (relation (2-8)).

$$\vec{V}(P/\Re) = \vec{V}(O/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{OP} = \overset{\circ}{z}\,\vec{k} + \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Et le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, au point P appartenant au solide :

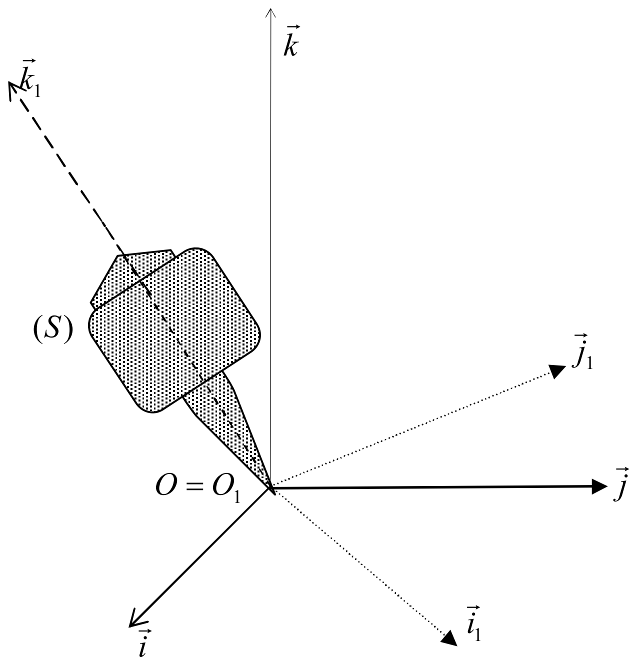
$$[V(S/\Re)] = \underset{P \in (S)}{\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) = \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k} \\ \vec{V}(P/\Re) = \overset{\circ}{z}\,\vec{k} + \overset{\circ}{\theta}\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{OP} \end{bmatrix}}$$

La trajectoire du point P est **une hélice circulaire.**

Ainsi le torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à $\Re$ est la somme d'un couple (translation) et d'un « Glisseur » d'axe $(\vec{k})$.
L'axe central de ce torseur est l'axe $(O,\vec{k})$. C'est-à-dire que chaque point du solide appartenant, au même temps à l'axe $(\vec{k})$, a un vecteur vitesse parallèle à $\vec{\Omega}(S/\Re)$ (Voir en particulier le point O_1).

II-4-4 Rotation d'un solide autour d'un point fixe - Angles d'Euler.

Soit $\Re = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. (S) un solide en mouvement par rapport à $\Re$.
On va lier à ce solide un repère orthonormé direct $\Re_1 = (O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$
Supposons que le mouvement du solide est **une rotation autour du point fixe O**.
On choisit $O_1 = O$
Prenons l'exemple classique de la rotation d'une toupie symétrique autour du point fixe O :



Comment, alors passer de $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$?

Pour cela, on va suivre la démarche dite **d'Euler**. On va voir que ce passage va se faire par 3 rotations successives autour de 3 axes bien précis. Les angles des rotations autour de ces trois axes sont appelés : Angles d'Euler.

Prenons tout d'abord, à un instant t, la direction qui est l'intersection des deux plans $(\vec{i},\vec{j})$ et $(\vec{i}_1,\vec{j}_1)$. Soit alors $\vec{u}$ un vecteur unitaire orientant cette direction.

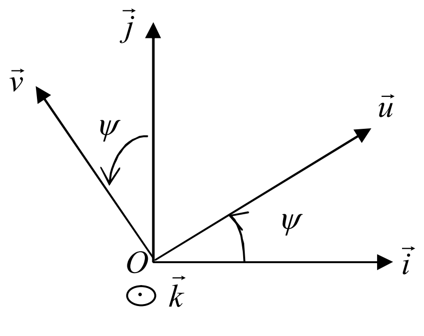
$\vec{u} \in plan(\vec{i},\vec{j})$ et $\vec{u} \in plan(\vec{i}_1,\vec{j}_1)$. C'est-à-dire que $\vec{u}$ *est orthogonal à* $\vec{k}$ et *à* $\vec{k}_1$

1) Soit le plan formé par $\vec{u},\vec{i}$ *et* $\vec{j}$. Il est orthogonal à $\vec{k}$

Appelons $\psi(t)$ l'angle entre les directions $\vec{i}$ et $\vec{u}$: $\psi(t) = Angle(\vec{i},\vec{u})$

Soit alors le vecteur unitaire $\vec{v}$ appartenant à ce plan et orthogonal à $\vec{u}$. Nous avons donc un nouveau repère orthonormé direct $R' = (O,\vec{u},\vec{v},\vec{k})$. Il est obtenu par rapport à $R = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par une rotation autour de $\vec{k}$ d'angle $\psi(t)$

L'angle $\psi(t)$ est appelé : **Angle de précession**



$$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}$$
$$\vec{v} = -\sin\psi\,\vec{i} + \cos\psi\,\vec{j}$$

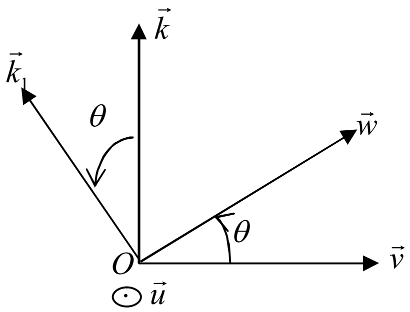
$$\vec{\Omega}(R'/R) = \dot{\psi}\,\vec{k}$$

2) Soit maintenant le plan contenant $\vec{k}$ et $\vec{k}_1$. Il est orthogonal à $\vec{u}$ et il contient obligatoirement $\vec{v}$

Appelons $\theta(t)$ l'angle entre les directions $\vec{k}$ et $\vec{k}_1$: $\theta(t) = Angle(\vec{k}, \vec{k}_1)$

Soit alors le vecteur unitaire $\vec{w}$ appartenant à ce plan et orthogonal à $\vec{k}_1$. Nous avons donc un nouveau repère orthonormé direct $R'' = (O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}_1)$. Il est obtenu par rapport à $R' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ par une rotation autour de $\vec{u}$ d'angle $\theta(t)$

L'angle $\theta(t)$ est appelé : **Angle de nutation**



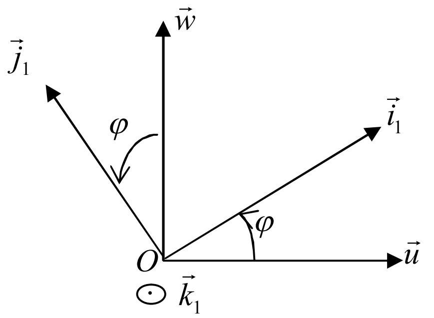
$$\vec{w} = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{k}_1 = -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{\Omega}(R''/R') = \dot{\theta}\,\vec{k}$$

1) Soit le plan formé par $\vec{u}, \vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$. Il est orthogonal à $\vec{k}_1$ et il contient obligatoirement $\vec{w}$

Appelons $\varphi(t)$ l'angle entre les directions $\vec{u}$ et $\vec{x}_1$: $\varphi(t) = Angle(\vec{u}, \vec{i}_1) = Angle(\vec{w}, \vec{j}_1)$

Le repère $R_1 = (O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, lié au solide, est alors par rapport à $R'' = (O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}_1)$ par une rotation autour de $\vec{k}_1$ d'angle $\varphi(t)$

L'angle $\theta(t)$ est appelé : **Angle de rotation propre**



$$\vec{i}_1 = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{w}$$
$$\vec{j}_1 = -\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\,\vec{w}$$
$$\vec{\Omega}(R_1/R'') = \dot{\varphi}\,\vec{k}_1$$

Les trois angles intervenant dans cette transformation sont appelés « ***angles d'Euler*** », et cette transformation peut être schématisée comme suit :

R= $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

↓

Par une rotation d'angle (ψ) dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ autour de l'axe $\vec{k}$

(ψ) est appelé « *angle de précession* », la direction de $\vec{u}$ est appelée « ligne des nœuds », on passe à :

↓

$R' = (O,\vec{u},\vec{v},\vec{k})$

↓

Par une rotation d'angle (θ) dans le plan $(\vec{v},\vec{k})$ autour de l'axe $\vec{u}$ où (θ) est appelé « *angle de nutation* » on passe à :

↓

$R'' = (O,\vec{u},\vec{w},\vec{k}_1)$

↓

Par une rotation d'angle (φ) dans le plan $(\vec{u},\vec{w}) = (\vec{i}_1,\vec{j}_1)$ autour de l'axe $\vec{k}_1$ où (φ) est appelé « *angle de rotation* propre» on passe à :

↓

$R_1 = (O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$

1

$$\Re = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\vec{\Omega}(R'/R) = \overset{\circ}{\psi}\,\vec{k}$$

2

$$\Re' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$$
$$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}$$
$$\vec{v} = -\sin\psi\,\vec{i} + \cos\psi\,\vec{j}$$

$$\vec{\Omega}(R''/R') = \overset{\circ}{\theta}\,\vec{u}$$

3

$$\Re'' = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{k}_1)$$
$$\vec{w} = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{k}_1 = -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{\Omega}(R_1/R'') = \overset{\circ}{\varphi}\,\vec{k}_1$$

4

$$\Re_1 = (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$$
$$\vec{i}_1 = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{w}$$
$$\vec{j}_1 = -\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\,\vec{w}$$

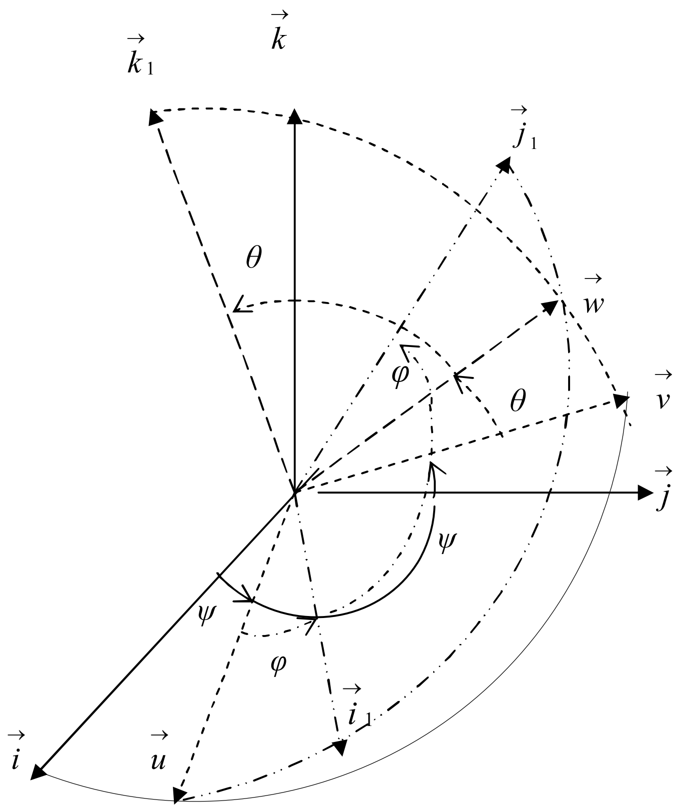


Schéma directeur des rotations successives d'angles « *les angles d'Euler* »

$$\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \xrightarrow{\overset{\circ}{\psi}\,\vec{k}} \Re'(O,\vec{u},\vec{v},\vec{k}) \xrightarrow{\overset{\circ}{\theta}\,\vec{u}} \Re''(O,\vec{u},\vec{w},\vec{k}_1) \xrightarrow{\overset{\circ}{\varphi}\,\vec{k}_1} \Re_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$$

Finalement le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(R_1/R)$ s'exprime en fonctions des vecteurs rotation instantanés lors des rotations simples par :

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{\Omega}(R_1/R'') + \vec{\Omega}(R''/R') + \vec{\Omega}(R'/R) = \dot{\varphi}\,\vec{k}_1 + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\vec{k}$$

i-1- Expression de $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(R_1/R)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$

$$\vec{k}_1 = -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k} \Rightarrow \quad \vec{\Omega}(S/R) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

i-2- Expression de $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(R_1/R)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{k}_1)$

$$\vec{k} = \sin\theta\,\vec{w} + \cos\theta\,\vec{k}_1 \Rightarrow \quad \vec{\Omega}(S/R) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

i-3- Expression de $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(R_1/R)$ dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$

$$\begin{matrix} \vec{k} = \sin\theta\sin\varphi\,\vec{i}_1 + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j}_1 + \cos\theta\,\vec{k}_1 \\ \vec{u} = \cos\varphi\,\vec{i}_1 - \sin\varphi\,\vec{j}_1 \end{matrix} \Rightarrow \quad \vec{\Omega}(S/R) = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

i-4- Expression de $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(R_1/R)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{matrix} \vec{k}_1 = \sin\theta\sin\psi\,\vec{i} - \sin\theta\cos\psi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j} \end{matrix} \Rightarrow \quad \vec{\Omega}(S/R) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Remarque.

$O \in S$, et $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$

Ainsi, le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, au point $O \in (S)$:

$$[V(S/\Re)] = {}_{O\in(S)}\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) \\ \vec{V}(O/\Re) = \vec{0} \end{bmatrix}$$

Pour un autre point P quelconque du solide, le vecteur vitesse se détermine en écrivant que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique (relation (2-8)).

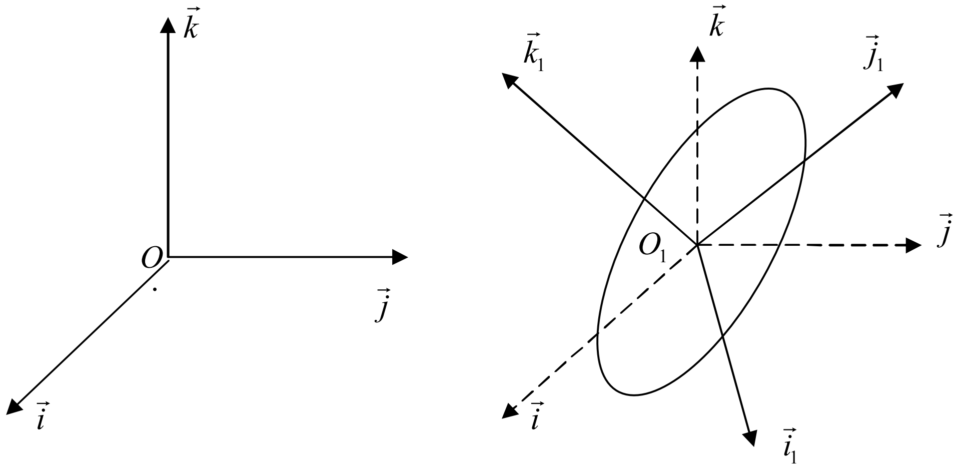
$$\vec{V}(P/\Re) = \vec{V}(O/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{OP} = \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{OP}$$

Et le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, au point P appartenant au solide :

$$[V(S/\Re)] = {}_{P\in(S)}\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) \\ \vec{V}(P/\Re) = \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{OP} \end{bmatrix}$$

II-4-3 : Mouvement le plus général d'un solide

Si le solide n'admet pas de point fixe dans le repère $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Soit O_1 un point de (S) (En général on prend son centre d'inertie : voir chapitre suivant)). Soit $\Re_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au solide



Le passage du repère $\Re$ vers le repère $\Re_1$ se fait par une translation $\vec{OO_1}$ suivie d'une rotation autour de G

$$\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{Translation\ (\overrightarrow{OO_1})} \Re_{O_1} = (O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{\psi,\theta,\varphi} \Re_1 = (G, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$$

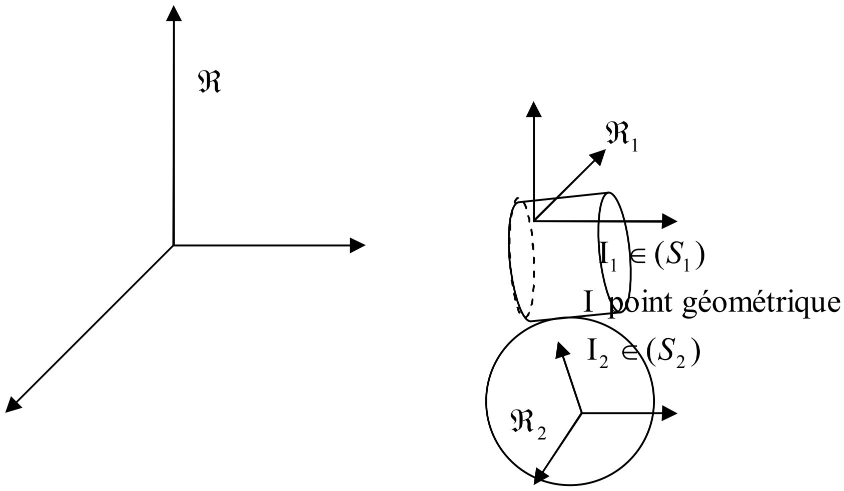
$$\vec{OO_1} = \left|\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right._{\Re}$$

Le nombre de paramètres qui déterminent la position du solide par rapport à $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est 6 : Les 3 coordonnées du point O_1 dans $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les 3 angles d'Euler habituels $\psi, \theta\ et\ \varphi$

$$\vec{\Omega}(S/\Re) = \vec{\Omega}(S/R_{O_1}) + \vec{\Omega}(R_{O_1}/\Re) + \vec{\Omega}(R'/R) = \overset{\circ}{\varphi}\vec{k}_1 + \overset{\circ}{\theta}\vec{u} + \overset{\circ}{\psi}\vec{k} + \vec{0}$$

II-5- CINEMATIQUE DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES - NOTION DE GLISSEMENT-

Soit $\Re$ un repère quelconque fixe, et soient $(S_1 \equiv \Re_1)$ et $(S_2 \equiv \Re_2)$ deux solides en mouvement l'un par rapport à l'autre



Supposons qu'à l'instant t, (S_1) et (S_2) sont en contact en un point géométrique I.
Soient I_1 et I_2 les deux particules appartenant respectivement à (S_1) et (S_2), et qui à l'instant t, occupent simultanément la position I. c'est-à-dire

$$\text{à l'instant } t \quad I = I_1 = I_2 \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} I_1 \in (S_1) \\ \text{I point géométrique} \\ I_2 \in (S_2) \end{array} \right.$$

Définition.

On appelle vitesse de glissement de (S_1) par rapport à (S_2), la quantité vectorielle :
$\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}(I \in S_1/S_2)$

Calcul de la vitesse de glissement (de (S_1) par rapport à (S_2))

Cas où (S_2) est fixe.

Le solide (S_2) étant lié au repère $\Re$ fixe, donc $(\Re \equiv \Re_2)$ et

$$\boxed{\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}(I \in S_1/R)}$$

Soit $A \in S_1$: $\quad \vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}(A \in S_1/R) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{AI}$

Cas où (S_2) est mobile.

Dans ce cas on peut considérer $\Re$ comme repère absolu et $\Re_2$ comme repère relatif, et on écrit

$$\vec{V}(\mathrm{I} \in S_1 / \Re) = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

La vitesse relative est :

$\vec{V}_r(I \in S_1) = \vec{V}(I \in S_1 / \Re_2) = \vec{V}_g\,(S_1 / S_2)$

La vitesse d'entrainement est :

$\vec{V}_e(I \in S_1) = \vec{V}(I \in S_2 / \Re)$

Car la vitesse d'entrainement d'un point est la vitesse absolue de ce point considéré fixe par rapport au repère relatif.

Finalement :

$$\boxed{\vec{V}_g(S_1 / S_2) = \vec{V}(\mathrm{I} \in S_1 / S_2) = \vec{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S}_1 / \Re) - \vec{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S}_2 / \Re)}$$

Définition :

Lorsqu'à tout instant *t*, au cours d'une phase du mouvement la vitesse de glissement de (S_1) par rapport à (S_2) en un point de contact I **est nulle**, l'on dit que (S_1) roule (ou roule et pivote) sans glisser sur (S_2) en I.

Remarque :

La vitesse de glissement $\vec{V}_g(S_{1/S_2})$ est contenue dans le plan tangent aux deux solides (S_1) et (S_2) au point commun I, et $\vec{V}_g(S_{1/S_2})$ est l'une des coordonnées vectorielles (le moment) du torseur cinématique $[V]_{S_{1/S_2}}$ en I. La résultante de ce dernier est le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{S_{1/S_2}}$, dont les projections $\vec{\Omega}_T$ et $\vec{\Omega}_n$ sur le plan tangent $\boldsymbol{\pi}$ et sur la normale à $\boldsymbol{\pi}$ sont respectivement par définition :

- « *le vecteur- vitesse* (angulaire) *de roulement* $\vec{\Omega}_T$ » dans le plan tangent $\boldsymbol{\pi}$.
- Et « *le vecteur- vitesse* (angulaire) *de pivotement* $\vec{\Omega}_n$ » normal au plan $\boldsymbol{\pi}$.

Lorsque $\vec{V}_g(S_{1/S_2})$ est nulle, le torseur $[V]_{S_{1/S_2}}$ est donc un glisseur, le solide mobile roule et pivote sans glisser, d'où la définition suivante :