Exercice d'application 1 : Les torseurs

Soient les trois vecteurs $\vec{V_1} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V_2} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{V_3} = \vec{i} - \vec{j}$ définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et liés respectivement au points $A(0,1,2)$, $B(1,0,2)$, $C(1,2,0)$

1) Construire le torseur $[T]_O$ associé au système de vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$;
2) En déduire l'automoment ;
3) Calculer le pas du torseur ;
4) Déterminer l'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement.

Solution :

1) Les éléments de réduction du torseur $[T]_O$ sont :

La résultante : $\vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = \vec{j} + 3\vec{k}$

Le moment au point O : $\vec{M_O} = \vec{OA} \wedge \vec{V_1} + \vec{OB} \wedge \vec{V_2} + \vec{OC} \wedge \vec{V_3}$

$$\vec{M_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) L'automoment : $A = \vec{R} \bullet \vec{M_O} = \left(\vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\right) = -2 - 3 = -5$

3) Pas du torseur : $p = \dfrac{\vec{R} \bullet \vec{M_O}}{R^2} = \dfrac{-5}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = -\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

4) Equation vectorielle de l'axe central :

Si l'axe (Δ) est un axe central alors : $\forall \ P \in (\Delta) \ \Rightarrow \ \vec{M_P} = \lambda \vec{R}$

Son équation vectorielle est donnée par : $\vec{OP} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{M_O}}{R^2} + \lambda \vec{R}$ avec $\lambda \in IR$

$$\vec{OP} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{i} + \left(-\frac{3}{10} + \lambda\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{10} + 3\lambda\right)\vec{k}$$

Si $\vec{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_{R_0}$ alors : $x = \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{3}{10} + \lambda$ et $z = \dfrac{1}{10} + 3\lambda$

D'où : $z = \dfrac{1}{10} + 3\left(y + \dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{1}{10} + 3y + \dfrac{9}{10} = 3y + 1$

L'axe central est une droite dans un plan parallèle au plan *(yOz)* situé à $x = \dfrac{1}{2}$ et d'équation : $z = 3y + 1$

<u>***Correction du TD-1 de la mécanique des solides indéformables***</u>

<u>***Exercice 1 :***</u>

Soit le torseur $[T_1]_0$ défini par les trois vecteurs $\overrightarrow{V_1} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 7\vec{k}$, $\overrightarrow{V_2} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_3} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 8\vec{k}$ définis dans un repère orthonormé $R\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ et liés respectivement aux points $(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$ et le torseur $[T_2]_0 : \begin{cases} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{H_2} \end{cases}$ avec $\overrightarrow{R_2}=2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{H_2} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}$.

1- Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_0$. Conclusion;

2- Déterminer le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_0$;

3- Calculer la somme et le produit des deux torseurs;

4- Calculer l'automoment du torseur somme.

Solution :

1) Eléments de réduction du torseur: $[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R_1} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} \\ \overrightarrow{M_{1O}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V_3} \end{cases}$

$$\vec{R_1} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_{1O}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + 6\vec{j}$$

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R_1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{1O}} = \vec{i} + 6\vec{j} \end{cases}$$

2) Pas et axe central du torseur $[T_2]_O$

$$\textit{Pas du torseur : } P_2 = \frac{\vec{R_2} \cdot \overrightarrow{M_2}}{R_2^2} = \frac{\left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(-3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}\right)}{4+1+9} = \frac{-3+2-21}{14} = -\frac{11}{7}$$

$$\textit{Axe central du torseur : } \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R_2} \wedge \overrightarrow{M_2}}{R_2^2} + \lambda \vec{R_2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{14} + 2\lambda \\ \frac{5}{14} + \lambda \\ \frac{1}{2} + 3\lambda \end{pmatrix}$$

3) Somme et produit des deux torseurs

a) Somme des deux torseurs :

$$[T]_O = [T_1]_O + [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{M_{1O}} + \overrightarrow{M_{2O}} = -2\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 7\,\vec{k} \end{cases}$$

b) Produit des deux torseurs :

$$[T_1]_O \bullet [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1O}} \end{cases} \bullet \begin{cases} \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{2O}} \end{cases} = \vec{R_1} \bullet \overrightarrow{M_{2O}} + \vec{R_2} \bullet \overrightarrow{M_{1O}} = \left(2\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}\right) \bullet \left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -25$$

4) Automoment du torseur somme :

$$F = \vec{R} \bullet \overrightarrow{M_O} = \left(2\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}\right) \bullet \left(-2\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -17$$

<u>**Exercice 2 :**</u>

Soit A un point de l'espace dans un repère orthonormé $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ avec $\overrightarrow{OA} = -\frac{21}{9}\vec{\imath} - \frac{4}{9}\vec{\jmath} - \frac{12}{9}\vec{k}$ et un vecteur $\overrightarrow{V_1} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$ dont l'axe passe par le point A.

Soit un torseur $[T_2]_0$ défini au point O par ses éléments de réduction $\overrightarrow{R_2}$ et $\overrightarrow{H_2}$ tel que :

$$[T_2]_0 : \begin{cases} \overrightarrow{R_2} = (\alpha - 4)\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath} + 3\alpha\vec{k} \\ \overrightarrow{H_2} = (2\alpha + 9)\vec{\jmath} + \left(-3\alpha - \frac{2}{3}\right)\vec{k} \end{cases}$$

1- Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_0$ dont la résultante est le vecteur $\overrightarrow{V_1}$;

2- Pour quelle valeur de α les deux torseurs sont égaux;

3- En déduire le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_0$ pour cette valeur de α;

4- Calculer le produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$.

Solution :

1) Eléments de réduction du torseur $[T_1]_0$

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{V_1} = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} \end{cases} \quad ; \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} = \begin{pmatrix} -21/9 \\ -4/9 \\ -12/9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix}$$

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{V_1} = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{10}} = 11\,\vec{j} - (11/3)\,\vec{k} \end{cases}$$

2) Les deux torseurs sont égaux si leurs éléments de réductions sont égaux.

$$[T_1]_0 = [T_2]_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{V_1} = \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{M_{20}} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (\alpha - 4)\,\vec{i} + \alpha\,\vec{j} + 3\alpha\,\vec{k} \\ 11\,\vec{j} - \frac{11}{3}\vec{k} = (2\alpha + 9)\,\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\,\vec{k} \end{cases}$$

Cette égalité est vérifiée pour : $\underline{\alpha = 1}$

4) Pas et axe central du torseur $[T_2]_0$ pour $\alpha = 1$.

Le torseur s'écrit : $[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{20} = 11\vec{j} - (11/3)\vec{k} \end{cases}$

Pas du torseur : $P_2 = \dfrac{\vec{R}_2 \bullet \overrightarrow{M}_{20}}{R_2^2} = \dfrac{1}{19}\left(-3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(11\vec{j} - \dfrac{11}{3}\vec{k}\right) = 0$

Axe central du torseur : C'est l'ensemble des point P tel que : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{M}_{20}}{R_2^2} + \lambda \vec{R}_2$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{110}{57} - 3\lambda \\ -\dfrac{11}{19} + \lambda \\ -\dfrac{33}{19} + 3\lambda \end{pmatrix}$$

si (x, y, z) sont les coordonnées du point P alors : nous aurons les trois équations scalaires:

$$x = -\frac{110}{57} - 3\lambda \quad , \quad y = -\frac{11}{19} + \lambda \quad , \quad z = -\frac{33}{19} + 3\lambda$$

le point P décrit la courbe : $2x + 3y + z = -\dfrac{385}{57}$

5) Produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Pour $\alpha = 2$ le torseur $[T_2]_0$ s'écrit : $[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{20} = 13\vec{j} - \dfrac{20}{3}\vec{k} \end{cases}$

$$[T_1]_O \bullet [T_2]_O = \begin{cases} \vec{V}_1 \\ \overrightarrow{M}_{1O} \end{cases} \bullet \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_{2O} \end{cases} = \vec{V}_1 \bullet \overrightarrow{M}_{2O} + \vec{R}_2 \bullet \overrightarrow{M}_{1O} = -7$$

<u>Exercice 3 :</u>

Soient deux torseurs $[T_1]_A$ et $[T_2]_A$ définis au même point A par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$[T_1]_A = \begin{cases} \vec{R}_1 = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{1A} = 4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad [T_2]_A = \begin{cases} \vec{R}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{2A} = 4\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer l'axe central et le pas du torseur $[T_1]_A$;

2) Déterminer l'automoment du torseur $[T_1]_A$, montrer qu'il est indépendant du point A ;

3) Construire le torseur $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A$ avec a et $b \in IR$;

4) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur $[T]_A$ soit un torseur couple ;

5) Montrer que le torseur couple est indépendant du point ou on le mesure ;

6) Déterminer le système le plus simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

Solution :

1) Axe central et Pas du torseur $[T_1]_A$

Axe central : Il est défini par l'ensemble des points P tel que : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{M}_{1A}}{R_1^2} + \lambda \vec{R}$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{12}{17} - 3\lambda \\ -\dfrac{13}{17} + 2\lambda \\ -\dfrac{5}{17} + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Pas du torseur $[T_1]_A$: $P_1 = \dfrac{\vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_{1A}}{R_1^2} = \dfrac{1}{17}\left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \bullet \left(4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -\dfrac{28}{17}$

2) Automoment du torseur $[T_1]_A$: $\vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_{1A} = \left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \bullet \left(4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -28$

L'automoment est indépendant du point A. En effet, d'après la formule de transport nous pouvons écrire : $\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_1 \Rightarrow \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_B + \vec{R}_1 \bullet \left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_1\right)$

$\vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_B$, on voit bien qu'il est indépendant du point A.

3) $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A \Leftrightarrow [T]_A = \begin{cases} \vec{R} = a\,\vec{R}_1 + b\,\vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_A = a\,\overrightarrow{M}_{1A} + b\,\overrightarrow{M}_{2A} \end{cases}$

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = -3(a-b)\,\vec{i} + 2(a-b)\,\vec{j} + 2(a-b)\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} - (a-b)\,\vec{j} - 7(a-b)\,\vec{k} \end{cases}$$

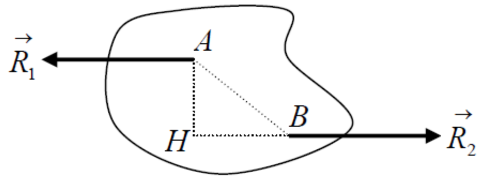
4) Condition pour que $[T]_A$ soit un torseur couple :

il faut que la résultante soit nulle : $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow a = b$

Le moment dans ce cas sera égal à : $\overrightarrow{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} = 8a\,\vec{i}$

5) Le moment d'un torseur couple où les résultantes R_1 , R_2 ont le même module mais de sens opposées et appliquées aux points quelconque A et B s'écrit :

$$\vec{M}_A = \vec{OA} \wedge \vec{R_1} + \vec{OB} \wedge \vec{R_2} = \vec{OA} \wedge \vec{R_1} + \vec{OB} \wedge (-\vec{R_1})$$
$$= \vec{BA} \wedge \vec{R_1} = \left(\vec{BH} + \vec{HA}\right) \wedge \vec{R_1}$$
$$= \vec{HA} \wedge \vec{R_1} = -\vec{AH} \wedge \vec{R_1} = \vec{AH} \wedge \vec{R_2}$$



Le moment d'un couple est indépendant de la distance entre les points A et B , il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des résultantes. Cette distance est appelée bras de levier.

6) Système simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

Le torseur somme $[T]_A$ est donné par : $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = 8\,\vec{i} \end{cases}$

La résultante peut être décomposées en deux vecteurs quelconque de même module et de sens opposé dont l'un des vecteurs est placé au point A, on obtient alors :

$$\vec{M}_A = \vec{AA} \wedge \vec{V} + \vec{AB} \wedge -\vec{V} = \vec{AB} \wedge -\vec{V} = 5\,\vec{i}$$

système de deux vecteurs glissants : $\left(A,\ \vec{V}\right)$

et $\left(B,\ -\vec{V}\right)$, tel que : $\vec{V} \bullet \vec{M}_A = 0$