Correction_TD2_Torseurs

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par :

$$\begin{vmatrix} v_x = 1 + 3y - tz \\ v_y = -3x + 2tz \\ v_z = 2 + tx - t^2 y \end{vmatrix} \quad \text{où t est un paramètre réel.}$$

1- Calculer le vecteur $\vec{v}(M)$ au point O.

2- Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?

3- Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur (résultante et moment en O).

4- Décomposer le torseur associé à $\vec{v}(M)$ en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on indiquera les éléments de réduction.

5- Déterminer la position de l'axe central du torseur pour t = 0 et t=2.

Corrigé

1- Le point O a pour coordonnés : $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2- Equiprojectivité, on utilise les points O et M ;

tq : $\overrightarrow{V(O)}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V(M)}\overrightarrow{OM} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3y - tz \\ 2tz - 3x \\ 2 + tx - t^2 y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow t^2 - 2t = 0 \Longrightarrow t = 0 \; ou \; t = 2.$

Le champ $\overrightarrow{V(M)}$ est équiprojectif pour $t = 0 \; ou \; t = 2$; $\overrightarrow{V(M)}$ est un torseur pour ces valeurs de t.

3- Pour $t = 0$, on a $\vec{R}(\text{t} = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$;

Pour $t = 2$, on a $\vec{R}(\text{t} = 2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$;

4- Soit les deux torseurs associés à $t = 0 : [\Im_0]$ et à $t = 2 : [\Im_2]$;

Calculons pour les deux valeurs l'invariant scalaire :

$$I_0 = \vec{V}(O).\vec{R}(\text{t} = 0) = -6 \neq 0$$

$$I_2 = \vec{V}(O).\vec{R}(\text{t} = 2) = -10 \neq 0$$

Donc les deux torseurs sont quelconques (ni glisseur ni couple) chacun peut cependant etre décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$[\Im_0] = [\vec{V}(O), \vec{R}(\text{t} = 0)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(\text{t} = 0)]$

De meme : $[\Im_2] = [\vec{V}(O), \vec{R}(\text{t} = 2)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(\text{t} = 2)]$

Donc : $\begin{cases} \text{Couples} : \vec{C}(M) = \vec{V}(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \forall M \\ \text{Glisseurs} : \vec{G}(M) = \vec{0} + \vec{R}(\text{t}) \wedge \overrightarrow{OM} \end{cases}$.

5- Soit $P \in$ à l'axe central du torseur, la positionde P par rapport à O est donnée par :

$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}(\text{t}) \wedge \overrightarrow{V(M)}}{R^2} + \lambda \vec{R}$ avec $\lambda \in R$

Pour $\lambda = 0$, $\overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{R}(\text{t}) \wedge \overrightarrow{V(O)}}{R^2}$,

Donc pour t = 0, $\vec{R}(\text{t} = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient alors : $\overrightarrow{OP_0} = -\frac{1}{3}\vec{j}$

L'axe central pour t = 0, passe par P_0 et parralèle à $\vec{R}(\text{t} = 0) \Longrightarrow$ parralèle à $\vec{k}$.

de la meme façon on obtient l'axe central pour t = 2 :

L'axe central pour t = 0, passe par $P_0 = \begin{pmatrix} -4/29 \\ -5/29 \\ 2/29 \end{pmatrix}$ et parralèle à $\vec{R}(\text{t} = 2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

Dans un repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs :

$\vec{V}_1=(1,0,-1)$ d'origine $A=(1,0,0)$
$\vec{V}_2=(1,2,2)$ d'origine $B=(0,1,0)$
$\vec{V}_3=(\lambda,\mu,\nu)$ d'origine $C=(0,0,1)$
Soit [T] la somme des trois glisseurs.
1- Déterminer (λ,μ,ν) pour que [T] soit un couple et trouver son moment.
2- Déterminer la relation que doit lier λ,μ et ν pour que [T] soit un glisseur ?
3- Dans le cas où $(\lambda,\mu,\nu)=(-2,0,-1)$, trouver les équations de l'axe central de [T]. Que peut-on dire de la direction de l'axe central ?

Corrigé

On peut écrire le torseur $[T]=[\vec{R},\vec{M}]$ avec $\vec{R}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ et $\vec{M}_O=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{v}_1+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{v}_2+\overrightarrow{OC}\wedge\vec{v}_3$

On obtient $\vec{M}_O=\begin{pmatrix}2-\mu\\1+\lambda\\-1\end{pmatrix}$

1- Pour avoir un couple, il faut et il suffit qu'on ait $\vec{R}=\vec{0}$ or $\vec{R}=\begin{pmatrix}\lambda+2\\\mu+2\\\nu+1\end{pmatrix}$

D'où on a un couple pour $\lambda=-2$, $\mu=-2$ et $\nu=-1$.

Alors $\vec{M}_p=\vec{M}_O=\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad\forall P$.

2- Pour avoir un glisseur il faut et il suffit que l'on ait : $\vec{R}\bullet\vec{M}_p=0$ et $\vec{R}\neq\vec{0}$, avec $\vec{M}_p=\vec{M}_O+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}$. Par conséquent,
$\vec{R}\bullet\vec{M}_p=\vec{R}\bullet\left(\vec{M}_O+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}\right)=\vec{R}\bullet\vec{M}_O+\vec{R}\bullet(\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP})=\vec{R}\bullet\vec{M}_O$

L'invariant scalaire de $[T]$.est $I=\vec{R}\bullet\vec{M}_p=\vec{R}\bullet\vec{M}_O$

$\vec{R}\bullet\vec{M}_O=0\Rightarrow 4\lambda-\mu-\nu+5=0$ et $\vec{R}\neq\vec{0}\Rightarrow(\lambda,\mu,\nu)\neq(-2,-2,-1)$.

2- Soit $P(x,y,z)$, on veut l'ensemble des points P où $\vec{M}_p\ //\ \vec{R}$.
On écrit $\vec{M}_p=\vec{M}_O+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{R}$. Comme on peut écrire $\vec{M}_p\wedge\vec{R}=\vec{0}$

On trouve $z=-1$, $x=-\dfrac{1}{2}$. L'axe central est la parallèle à $\vec{y}$ passant par le point $(-\dfrac{1}{2},y,-1)$.

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les torseur $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction en O sont respectivement $\left[\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0; -a\sin(\alpha), a\cos(\alpha), 0\right]$ et $\left[\cos(\alpha), -\sin(\alpha), 0; -a\sin(\alpha), -a\cos(\alpha), 0\right]$, a et α sont des constantes non nulles données avec $\alpha \in]0, \pi[$.

1- Préciser la nature des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$.
2- λ_1 et λ_2 étant deux réels, soit $[T] = \lambda_1[T_1] + \lambda_2[T_2]$. Trouver l'invariant scalaire I de $[T]$, le produit scalaire (ou le comoment) de $[T_1]$ et $[T_2]$. Trouver une relation entre I et ce comoment.

Corrigé

Les deux torseurs sont donnés par

$[T_1] = [\vec{R}_1, \vec{M}_1]$ et $[T_2] = [\vec{R}_2, \vec{M}_2]$ avec $\alpha \in]0,\pi[$ et a une constante non nulle. Les résultantes sont données par $\vec{R}_1 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ et $\vec{R}_2 = (-a\sin(\alpha), a\cos(\alpha), 0)$. Les moments sont donnés par $\vec{M}_1 = (-a\sin(\alpha), a\cos(\alpha), 0)$ et $\vec{M}_2 = (-a\sin(\alpha), -a\cos(\alpha), 0)$.

1- On examine les invariants scalaires I_1 et I_2 de $[T_1]$ et $[T_2]$ ($I_1 = \vec{R}_1 \bullet \vec{M}_1, I_2 = \vec{R}_2 \bullet \vec{M}_2$).
On trouve $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$ or $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ ne peuvent être nuls, donc on a $[T_1]$ et $[T_2]$ sont des glisseurs.

2- T réduit en O est défini par

$$[T] = \lambda_1[T_1] + \lambda_2[T_2] = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)\cos(\alpha) & -a(\lambda_1 + \lambda_2)\sin(\alpha) \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\sin(\alpha) & a(\lambda_1 - \lambda_2)\cos(\alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'invariant scalaire $I = \vec{R} \bullet \vec{M} = -4a\lambda_1\lambda_2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)$, donc en général $[T]$ n'est pas un glisseur puisque $I \neq 0$ (sauf pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Le comoment des deux torseurs est défini par :

$$[T_1] \bullet [T_2] = \vec{M}_1 \cdot \vec{R}_2 + \vec{M}_2 \cdot \vec{R}_1 = -4a\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{I}{\lambda_1\lambda_2}.$$