Chapitre 3 : Étude des régimes transitoires des cicuits linéaires

A- Comportement des dipôles en régime quasi-statique

Introduction

Tout dipôle pour lequel u et i sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un dipôle linéaire.

Le cas le plus simple correspond au conducteur ohmique où u=Ri. Nous allons voir ici le cas du condensateur et de la bobine qui sont donc aussi des dipôles linéaires.

I- Le condensateur : Constitution et symbole

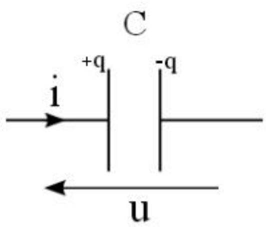
Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant appelé diélectrique.

Ils peuvent être plans, cylindriques voir sphériques.

Les condensateurs sont caractérisés par leur capacité C qui s'exprime en Farad. C'est la capacité qu'ils ont à accumuler des charges lorsqu'ils sont soumis à une certaine différence de potentiel.

L'armature qui reçoit le courant porte la charge +q, l'autre porte la charge −q.

On symbolisera ainsi le condensateur de la manière suivante :



Symbole du condensateur

1) Relation tension-intensité

On connaît la relation entre la charge portée par l'armature positive et la tension appliquée aux bornes du condensateur :

$$q(t) = Cu(t)$$

On connaît la relation entre l'intensité du courant arrivant sur le condensateur et la variation de charge de l'armature positive :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

D'où :

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

2) Comportement du condensateur sous différents régimes

Le condensateur n'est "intéressant" qu'en régime variable, c'est à dire lorsque u varie.

En effet, en régime permanent, la tension étant constante, on a :

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = 0$$

Le condensateur se comporte donc en régime permanent comme un interrupteur ouvert.

3) Énergie emmagasinée par le condensateur

L'énergie emmagasinée par le condensateur entre le temps $t = 0$ où $u = 0$ et le temps t où $u = u$ est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}Cu^2(t)$$

Attention, la puissance reçue par un condensateur peut changer de signe au cours du temps :

- Si son énergie Ec augmente, la puissance reçue (P= u(t)i(t)) est positive est le condensateur se comporte comme un récepteur.
- Si son énergie Ec diminue, la puissance reçue est négative est le condensateur se comporte comme un générateur.

4) Conséquence sur la continuité de la fonction u(t)

L'énergie emmagasinée par un condensateur dépend de la tension à ses bornes. Ce transfert d'énergie ne pouvant pas se faire instantanément, la tension u(t) aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.

5) Association de condensateur

a) Association en série

Trois condensateurs de capacité C_1, C_2, C_3 placés en série sont équivalents à un condensateur de capacité C_{eq} vérifiant la relation suivante :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

b) Association en parallèle

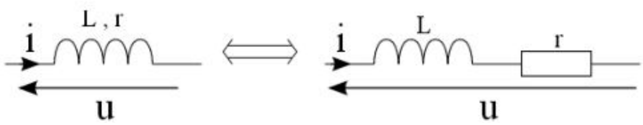
Trois condensateurs de capacité C_1, C_2, C_3 placés en parallèles sont équivalents à un condensateur de capacité C_{eq} vérifiant la relation suivante :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

II- La bobine :

1) Constitution et symbole

Une bobine est constituée d'un enroulement de spires conductrices autour d'un isolant. Elle admet donc une certaine résistance interne du fait de cette grande longueur de fil.
La bobine sera donc symbolisée en convention récepteur de la manière suivante :



Symbole de la bobine

2) Relation tension-intensité

Le phénomène qui caractérise la bobine est l'auto-induction : le passage d'un courant **i** qui varie dans les spires de la bobine créé un champ magnétique $\vec{B}$ qui fait apparaître une tension u aux bornes de celle-ci.
Mathématiquement, pour une bobine idéale (sans résistance interne), cette auto-induction s'écrit :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

où L est l'inductance de la bobine qui s'exprime en Henry (H).
En tenant compte de la résistance interne de la bobine, la tension aux bornes de celle-ci s'écrit :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} + ri(t)$$

avec **r** la résistance interne de la bobine qui s'exprime en Ohm (Ω).

3) Comportement de la bobine sous différents régimes

La bobine n'est "intéressante" qu'en régime variable, c'est à dire lorsque i varie.
En effet, en régime permanent, l'intensité étant constante, on a :

$$u(t) = L\frac{di}{dt} + ri = ri$$

La bobine se comporte donc en régime permanent comme un conducteur ohmique de faible résistance ($r = 10^{-12}\Omega$).

4) Énergie emmagasinée par la bobine

Pour une bobine idéale, l'énergie emmagasinée par celle-ci entre le temps t=0 où i=0 et le temps t où i=i est donnée par :

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Attention, la puissance reçue par une bobine peut changer de signe au cours du temps :

- Si son énergie E_L augmente, la puissance reçue ($P=u(t)i(t)$) est positive est la bobine se comporte comme un récepteur.
- Si son énergie E_L diminue, la puissance reçue est négative est la bobine se comporte comme un générateur.

Pour une bobine réelle, pendant qu'elle emmagasine l'énergie E_L, elle en dissipe aussi par effet Joule.

5) Conséquence sur la continuité de la fonction i(t)

L'énergie emmagasinée par une bobine dépend de l'intensité du courant qui la traverse. Ce transfert d'énergie ne pouvant pas se faire instantanément, l'intensité du courant i(t) parcourant une bobine est une fonction continue du temps.

6) Association de bobines

Les lois d'association en série et en parallèle des bobines sont les mêmes que celles pour les conducteurs ohmiques.

a) Association en série

On peut considérer le cas des bobines réelles :
Une association de *n* bobines réelles identiques caractérisées par le couple **L**, **r** est équivalente à une bobine d'inductance **nL** associée à un conducteur ohmique de résistance nr.

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 \ldots + L_n\,, \qquad r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3 \ldots + r_n$$

b) Association en parallèle

La modélisation en parallèle de bobines réelles n'étant pas aisée, on s'occupe de bobines idéales : Soit deux bobines idéales d'inductances L_1 et L_2 placées en parallèle, cette association est équivalente à une bobine d'inductance L_{eq} qui vérifie :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

B- Réseaux linéaires en régime transitoire

I- Définitions

1) Différents régimes

On parle de **régime permanent** pour désigner un régime de fonctionnement qui se maintient pendant un temps infiniment long. Un régime permanent peut être un *régime continu* ou un *régime variable* (comme par exemple le régime sinusoïdal permanent). On appelle **régime transitoire**, le régime de fonctionnement d'un circuit entre le moment où aucun courant ne circule pas et celui où s'établit un régime permanent.

Le régime transitoire peut être caractérisé par :
• Le facteur de qualité d'un système, noté Q, est une mesure du taux d'amortissement d'un oscillateur.
• Une constante de temps, notée τ, est une grandeur homogène à un temps, caractérisant la rapidité de l'évolution d'une grandeur physique dans le temps lorsque cette évolution est exponentielle.

2) Réponse d'un circuit

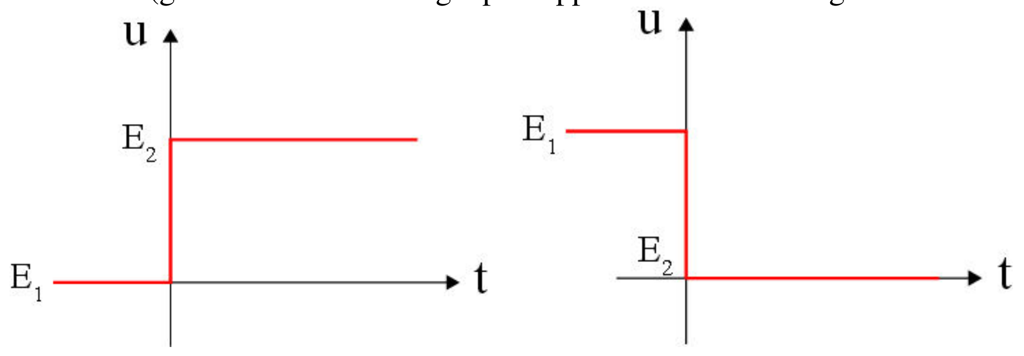
Considérons un circuit linéaire quelconque soumis à une action $x(t)$, appelée **excitation**. Cette excitation peut être une excitation en tension ($v_{in}(t)$) ou en courant ($i_{in}(t)$).
Le circuit réagit à l'excitation et on appelle **réponse** du circuit la grandeur $y(t)$ déterminée.

Dans cette partie du cours on s'intéresse principalement aux circuits linéaires soumis à un signal **échelon**, noté $U(t)$:

3) Échelon de tension

Nous allons soumettre différents circuits à un échelon de tension : on fait passer la tension aux bornes du circuit à étudier d'une valeur E_1 à une valeur E_2 en un temps très court considéré comme nul.
Pour cela, deux possibilités :

- On ferme ou on ouvre un interrupteur qui relie un générateur de tension continue à un circuit à étudier.
- On utilise un générateur basse fréquence (GBF) qui peut délivrer une tension créneau de fréquence variable.
  Dans ce cas, il faut régler la fréquence du GBF en fonction de ce que l'on souhaite observé (généralement on la règle par rapport à la durée du régime transitoire à observer).



Echelons de tension

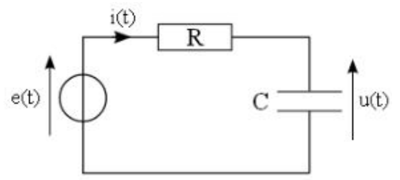
II- Réponse d'un circuit RC à échelon de tension

On cherche l'équation différentielle régissant la charge d'un condensateur à travers un conducteur ohmique puis on la résout. On trace alors l'allure de la solution, et on détermine la constante de temps τ.

1) Équation différentielle

On étudie le circuit RC soumis à une tension E = Cte, on s'intéresse à l'allure de la tension aux bornes du condensateur et à l'intensité parcourant le circuit.
Initialement, le condensateur est déchargé. On applique la loi des mailles :

$$e(t) = Ri(t) + u(t)$$



Dipôle RC soumis à un échelon de tension

Or $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$, d'où

$$E = RC\frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

Équation que l'on peut écrire :

$$\tau\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$$

avec τ = RC.

Dipôle RC soumis à un échelon de tension
Cette équation différentielle est du premier ordre, le circuit RC est appelé circuit du premier ordre.

2) Cas de notre étude

La solution de cette équation différentielle sera différente selon le cas étudié.
Pour obtenir la solution la plus générale, on additionne :

- une solution de l'équation homogène associée (sans second membre) qui correspond à la réponse du circuit RC sans excitation : c'est ce que l'on appelle le régime libre ;
- une solution particulière qui correspond au régime permanent.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

On s'intéressera ici au circuit soumis à un échelon de tension : le générateur délivre E pour la charge du condensateur.

3) Charge du condensateur

On doit trouver une solution à l'équation :

$$\tau\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$$

C'est une équation différentielle du premier ordre. Avec

Solution de l'équation homogène

$$\tau\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0 \Rightarrow \qquad \frac{du(t)}{dt} = -\frac{u(t)}{\tau}$$

$$\frac{du(t)}{dt}dt = -\frac{u(t)}{\tau}dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du(t)}{u(t)} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\int \frac{du(t)}{u(t)} = -\int \frac{dt}{\tau} + \mathrm{A}$$

$$\ln u(t) = -\frac{t}{\tau} + A$$

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}+A} = Be^{-\frac{t}{\tau}}$$

Solution particulière

On cherche une solution particulière u constante. $\frac{du(t)}{dt} = 0$

On a donc $u(t) = E$

La solution globale

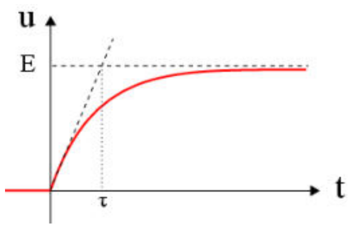
$$u(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

Utilisation de la condition initiale

L'équation différentielle que nous étudions est du premier ordre, une seule condition initiale suffit à trouver la seule constante à déterminer :
A t=0, u(t)=0 donc A+E=0 et A=−E.
Finalement, la tension aux bornes du condensateur qui se charge s'écrit :

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Et son allure est représentée ci-contre. On peut vérifier que la fonction u(t) est bien continue.



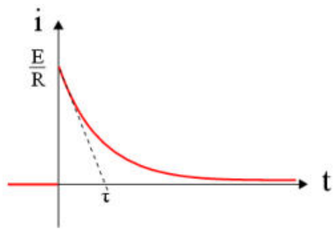
Tension aux bornes du condensateur

Allure de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge
Comme le montre la figure ci-contre, la constante de temps τ=RC peut être facilement obtenue graphiquement. Ce temps permet de caractériser la vitesse de charge du condensateur, plus il est faible plus le condensateur se charge vite.
On dit aussi souvent qu'au bout d'un temps t égal à 5τ, le condensateur est totalement chargé. On est passé du régime transitoire au régime permanent.

4) Intensité dans le circuit

On peut facilement obtenir l'équation de l'intensité du courant et son allure.
En effet, $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$ d'où :

$$u(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



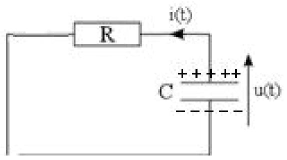
Intensité aux bornes du condensateur

La fonction i(t) est discontinue.

5) Décharge du condensateur

On doit trouver une solution à l'équation :

$$\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

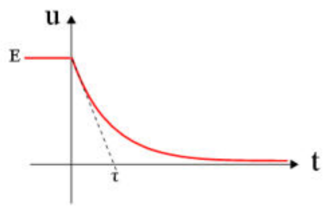


Décharge d'un condensateur

Avec : $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -C\frac{du(t)}{dt}$

La solution s'écrit donc :

$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$



Tension aux bornes du condensateur

Utilisation de la condition initiale
A t=0, u(t)=E donc A=E.
Finalement, la tension aux bornes du condensateur qui se décharge s'écrit :

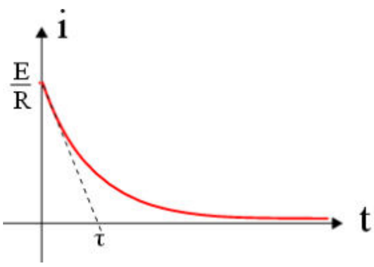
$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Et son allure est représentée ci-contre. On peut vérifier que la fonction u(t) est bien continue.

6) Intensité dans le circuit

On peut facilement obtenir l'équation de l'intensité du courant et son allure.
En effet, $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -C\frac{du(t)}{dt}$ d'où :

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Intensité aux bornes du condensateur

La fonction i(t) est discontinue.

7) Aspects énergétiques

a) Cas de la charge

Reprenons la loi des mailles utilisées pour établir l'équation différentielle concernant la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RC :

$$\begin{aligned} & Ri + u = e(t) \\ \Longleftrightarrow & R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \\ \Longleftrightarrow & Ri^2 dt + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}dt = Ei dt \\ \Longleftrightarrow & Ri^2 dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = Ei dt \end{aligned}$$

On reconnaît alors les énergies suivantes :

- La première correspond à l'énergie dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique pendant le temps dt ;
- La deuxième correspond à l'énergie stockée dans le condensateur pendant le temps dt ;
- La troisième correspond à l'énergie fournie par la source de tension pendant le temps dt.

On peut intégrer ces énergies infinitésimales sur le temps de charge du condensateur :

- Énergie fournie par le générateur :

$$E_g = \int_0^{\infty} E i dt = E \int_0^{Q} dq = EQ = CE^2$$

car i = dq/dt ; pendant la charge du condensateur ; Q = Cu et lorsque le condensateur est chargé u=E.

- Énergie stockée dans le condensateur :
-

$$E_C = \int_0^{Q} d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CE^2}{2}$$

- Énergie dissipée par effet Joule : comme la moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur, cela signifie que l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique :$\frac{CE^2}{2}$
-

$$E_J = \frac{CE^2}{2}$$

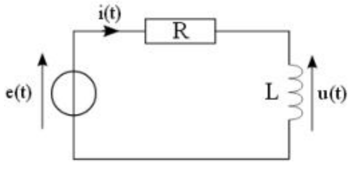
b) Cas de la décharge

A l'issue de la charge, le condensateur qui avait accumulée l'énergie $\frac{CE^2}{2}$ la restitue intégralement au conducteur ohmique qui la dissipe par effet Joule.

III- Réponse d'un circuit RL à échelon de tension

1) Équation différentielle

On étudie le circuit RL soumis à une tension e(t), on s'intéresse à l'allure de l'intensité dans le circuit et à la tension aux bornes de la bobine. On considère de plus que la bobine est idéale (r = 0). On applique la loi des mailles :



Dipôle RL soumis à un échelon de tension

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

D'où

$$\frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

Ou avec τ =L/R.

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{L}$$

Cette équation différentielle est du premier ordre, le circuit RL est appelé circuit du premier ordre.

2) Cas de notre étude

La solution de cette équation différentielle sera différente selon le cas étudié.
Pour obtenir la solution la plus générale, on additionne :

- une solution de l'équation homogène associée (sans second membre) qui correspond à la réponse du circuit RL sans excitation : c'est ce que l'on appelle le régime libre ;

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0$$

$$\frac{di(t)}{dt} dt = -\frac{i(t)}{\tau} dt$$

$$di(t) = -\frac{i(t)}{\tau} dt$$

$$\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\int \frac{di(t)}{i(t)} = -\int \frac{dt}{\tau} + A \Rightarrow \quad ln i(t) = -\frac{t}{\tau} + A \quad \Rightarrow \quad i(t) = e^{-\frac{t}{\tau}+A} = Be^{-\frac{t}{\tau}}$$

- une solution particulière qui correspond au régime permanent. $\frac{di(t)}{dt} = 0$

On s'intéressera ici au circuit soumis à un échelon de tension, donc la tension e(t) est égale à une constante : E pour l'établissement du courant dans la bobine, 0 pour sa rupture.

$$i = \frac{E}{R}$$

3) Établissement du courant

L'équation différentielle concernant le circuit RL (équation) a la même forme que celle pour le circuit RC (équation), la solution de cette équation a la même forme.
On peut donc écrire :

$$i(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

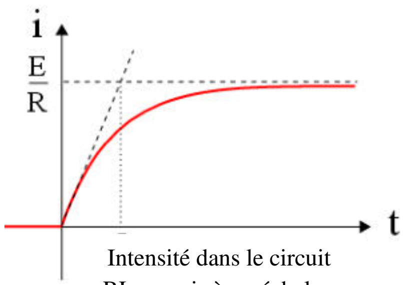
Utilisation de la condition initiale

On sait que i(t=0)=0 soit A= −E/R.
La solution s'écrit finalement :

$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Et son allure est représentée ci-dessous. On peut vérifier que la fonction i(t) est bien continue.

Comme le montre la figure, la constante de temps τ=LR peut être facilement obtenue graphiquement. Ce temps permet de caractériser la vitesse d'établissement du courant, plus il est faible plus le courant s'établit vite.



Intensité dans le circuit RL soumis à un échelon de tension

On dit aussi souvent qu'au bout d'un temps t égal à 5τ, on est passé du régime transitoire au régime permanent.

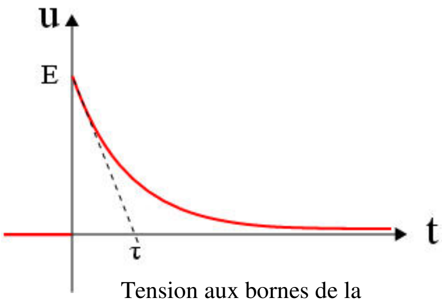
4) Tension aux bornes de la bobine

On peut facilement obtenir l'équation de la tension aux bornes de la bobine et son allure.
En effet,

$$u(t) = \frac{Ldi(t)}{dt}$$

d'où :

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$



Tension aux bornes de la bobine

La fonction u(t) est discontinue.
Allure de la tension aux bornes de la bobine lors de l'établissement du courant

5) Rupture du courant

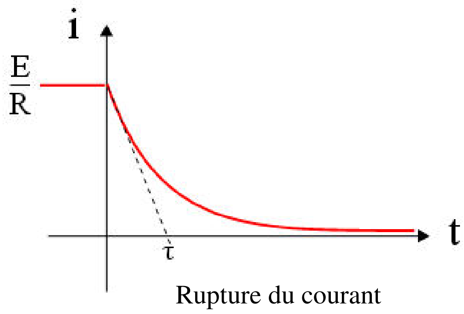
On doit trouver une solution à l'équation :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0$$

Cette équation a la même forme que celle qui concerne la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge, la solution possède donc aussi la même forme :
La solution s'écrit donc : $i(t)=Ae^{-t/\tau}$.

Utilisation de la condition initiale
A t=0, i(t)=E/R donc A=E/R.

Finalement, l'intensité dans le circuit lors de la rupture du courant s'écrit : $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$



Rupture du courant dans un dipôle RL

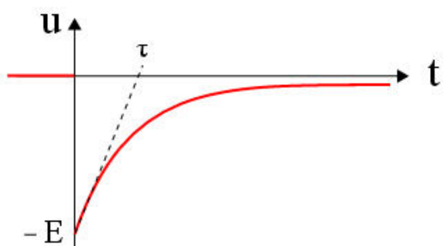
Et son allure est représentée ci-contre. On peut vérifier que la fonction est continue.
Rupture du courant dans un dipôle RL

6) Tension aux bornes de la bobine

On peut facilement obtenir l'équation de la tension aux bornes de la bobine et son allure.
En effet, u=Ldi/dt d'où :

$$u(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

La fonction u(t) est discontinue.



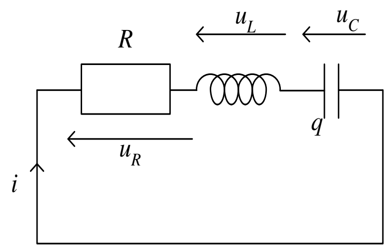
Allure de la tension aux bornes de la bobine lors de la rupture du courant

7) Aspects énergétiques

Dans le même principe que ce qui a été fait à propos du circuit RC, on montre que l'énergie que fournit le générateur pendant **l'établissement complet du courant** se partage par moitié dans la bobine où elle est stockée de façon magnétique, l'autre moitié étant dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.
A la rupture du courant, la bobine restitue l'énergie précédemment accumulée au conducteur ohmique qui la dissiper une nouvelle fois par effet Joule.

IV- Circuit R, L, C

1) Régime propre du circuit *R*, *L*, *C* série



On note $q(0) = q_0$; $i(0) = i_0$

2) Équation différentielle

D'après la loi des mailles, on a :

$$u_R + u_L + u_C = 0$$

$$\Leftrightarrow Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

On a $i = \dfrac{dq}{dt}$

Donc l'équation devient

$$R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0, \text{ soit}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

On a donc une équation différentielle homogène linéaire du 2nd ordre.

On pose :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{R}{L} = 2\lambda \ \ (\lambda \text{ est le coefficient d'amortissement}) \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \ \ (\text{Pulsation propre}) \end{array}}$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \text{ ou, en posant } \boxed{\frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda \ \ (Q \text{ est le facteur de qualité})} :$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

$$[\lambda] = \mathrm{s}^{-1} \ ; \quad [\omega_0] = \mathrm{s}^{-1} \ ; \quad [Q] = 1$$

3) Résolution de l'équation électrique :

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est $X^2 + 2\lambda X + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

a) 1er cas : $\Delta > 0$ (soit $\lambda > \omega_0$ ou $Q < \frac{1}{2}$)

On a alors deux solutions réelles $X_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$q(t) = Ae^{X_1 t} + Be^{X_2 t} = Ae^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$$

On a donc un régime apériodique.

Détermination de A et B : en prenant par exemple $q_0 \neq 0$; $i_0 = 0$

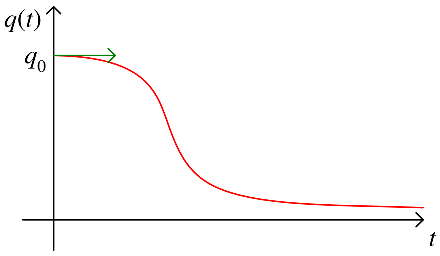
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = AX_1 e^{X_1 t} + BX_2 e^{X_2 t}$$

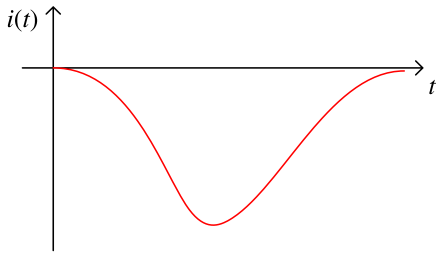
Comme le courant traversant la bobine est continu, $i(0^+) = i_0 \Leftrightarrow AX_1 + BX_2 = 0$

Comme la charge du condensateur est continue, $q(0^+) = q_0 \Leftrightarrow A + B = q_0$

$$\text{Donc } \begin{cases} A = \dfrac{q_0 X_2}{X_2 - X_1} \\ B = \dfrac{-q_0 X_1}{X_2 - X_1} \end{cases}$$

Allure des courbes :





$X_1, X_2 \approx -\lambda$

Le temps caractéristique est donc $1/\lambda$

b) 2ème cas : $\Delta = 0$ (soit $\lambda = \omega_0$ ou $Q = \frac{1}{2}$)

On a une racine double $X = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda = -\omega_0$

La solution générale est donc :

$q(t) = (At + B)e^{-\lambda \times t}$, solution du régime critique.

Détermination de A et B pour $q_0 \neq 0$; $i_0 = 0$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = Ae^{-\lambda \times t} - (At + B)\lambda e^{-\lambda \times t} = (-\lambda At + A - \lambda B)e^{-\lambda \times t}$$

Ainsi, $A - \lambda B = 0$ et $B = q_0$, soit $A = q_0 \lambda$ et $B = q_0$

Donc $q(t) = q_0(\lambda t + 1)e^{-\lambda \times t}$. Et $i(t) = -q_0 \lambda^2 t \times e^{-\lambda \times t}$

La représentation est analogue au cas où $\Delta > 0$.

Le temps caractéristique vaut $1/\lambda$ (durée du régime libre).

c) 3ème cas : $\Delta < 0$ (soit $\lambda < \omega_0$ ou $Q > \dfrac{1}{2}$)

$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) < 0$. On pose $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ (pseudo-pulsation)

Donc $\Delta = -4\omega^2$. Ainsi, $X_{1,2} = -\lambda \pm \omega \times i$

Solution générale (réelle):

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha e^{X_1 t} + \beta e^{X_2 t} = e^{-\lambda \times t}(\alpha e^{i\omega \times t} + \beta e^{-i\omega \times t}) \\ &= e^{-\lambda \times t}(A\cos\omega.t + B\sin\omega.t) \\ &= Ce^{-\lambda \times t}\cos(\omega.t + \varphi) \quad (\text{Avec } C = \sqrt{A^2 + B^2}) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} i(t) &= -\lambda e^{-\lambda \times t}(A\cos\omega.t + B\sin\omega.t) + (-A\omega\sin\omega.t + B\omega\cos\omega.t)e^{-\lambda \times t} \\ &= e^{-\lambda \times t}\left(\cos\omega.t \times (-\lambda A + B\omega) + \sin\omega.t \times (-B\lambda - A\omega)\right) \end{aligned}$$

On a un régime pseudopériodique.

Détermination de A et B pour $q_0 \neq 0$; $i_0 = 0$:

$$\begin{cases} -A\lambda + B\omega = 0 \\ A = q_0 \end{cases} \text{Donc} \begin{cases} A = q_0 \\ B = \dfrac{\lambda q_0}{\omega} \end{cases}$$

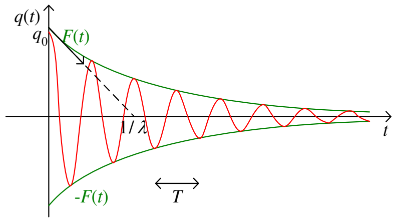
Donc

$$q(t) = q_0 e^{-\lambda \times t}(\cos\omega.t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega.t)$$

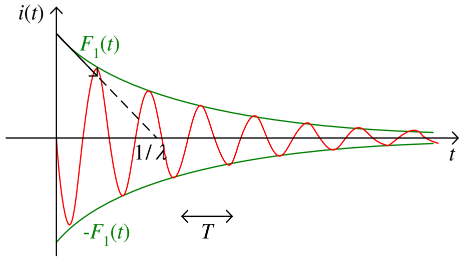
$$= \underbrace{\frac{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}}{\omega} q_0 e^{-\lambda \times t}}_{F(t)} \cos(\omega.t + \varphi) \text{ où } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \\ -\sin\varphi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \end{cases}$$

$$i(t) = \underbrace{-q_0 e^{-\lambda \times t}(\frac{\lambda^2}{\omega} + \omega)}_{F_1(t)}\sin\omega.t$$

Représentation graphique :



$$q(t) = F(t) \Leftrightarrow \cos(\omega.t + \varphi) = 1 \Leftrightarrow \omega.t + \varphi = 0\ [2\pi] \Leftrightarrow t = \frac{-\varphi}{\omega} + \underbrace{\frac{2\pi}{\omega}}_{T} n,\ n \in \mathbb{Z}$$



$$q(t+T) = q_0\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}} \times e^{-\lambda(t+T)}\cos(\omega(t+T)+\varphi) = q(t)e^{-\lambda\times T}$$

$$i(t+T) = -q_0(\frac{\lambda^2}{\omega}+\omega)\times e^{-\lambda(t+T)}\sin(\omega(t+T)+\varphi) = i(t)e^{-\lambda\times T}$$

On pose $\delta = \lambda \times T$, décrément logarithmique (sans dimension)

$$\delta = \lambda\times T = \frac{T}{1/\lambda} = \frac{\text{pseudopériode}}{\text{temps de relaxation}}$$

Ainsi,

δ petit $\Leftrightarrow$ temps d'amortissement grand par rapport à la pseudopériode

$\Leftrightarrow$ l'amortissement est faible

δ grand $\Leftrightarrow$ temps d'amortissement petit par rapport à la pseudopériode

$\Leftrightarrow$ l'amortissement est important

Relation entre l'amortissement et Q :

On suppose $Q >> 1$ on a alors : $\lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q} << \omega_0$. Donc $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \approx \omega_0^2$

Ainsi, $\delta = \lambda\times T = \lambda\dfrac{2\pi}{\omega} = \lambda\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{\omega_0}{2Q}\times\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{\pi}{Q} << 1$

On a donc un régime d'amortissement faible.

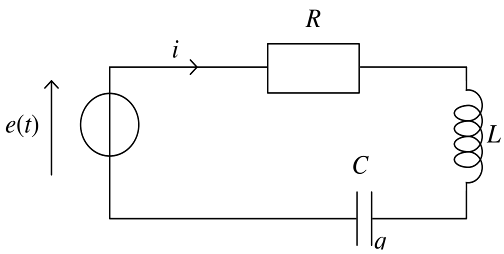
4) Réponse à un échelon de tension

a) Équation différentielle

$$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{e(t)}{L}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L}$$



b) Résolution : $e(t) = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow q(t) = 0,\ i(t) = 0 \text{ (Régime permanent)}$$

c) **Résolution :** $e(t) = E$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$$

$$q(t) = \mathrm{SP} + \mathrm{SGH}$$

$$q(t) = CE + \text{"dépend de } \lambda \text{ et } \omega_0\text{"}$$

En régime pseudopériodique :

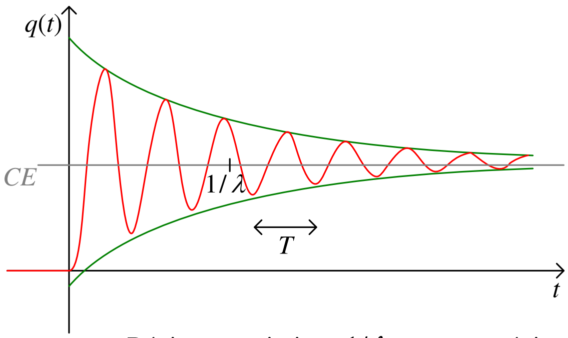
$$q(t) = CE + e^{-\lambda.t}(A\cos\omega.t + B\sin\omega.t) \text{ avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Comme $q(t)$ est continu (présence du condensateur), $q(0^+) = 0$

Donc $CE + A = 0$, $A = -CE$ et $B = \dfrac{A\lambda}{\omega} = \dfrac{-CE\lambda}{\omega}$ (en dérivant)

Donc $q(t) = CE\left(1 - e^{-\lambda.t}(\cos\omega.t + \dfrac{\lambda}{\omega}\sin\omega.t)\right)$

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = CE$$



Régime permanent Régime transitoire ~ $1/\lambda$ ...régime permanent $t >> 1/\lambda$

5) Aspect énergétique

Equation électrique $e(t) = Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C}$

Donc $i \times e(t) = Ri^2 + Li\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C}\dfrac{dq}{dt}$

Soit $P_{\text{fournie}} = P_{\text{Joule}} + P_{\text{Bobine}} + P_{\text{Condensateur}}$

En régime libre, $e(t) = 0$

$$Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)}_{\substack{\text{Energie électromagnétique} \\ \text{dans } L \text{ et } C,\, = E_{\text{ém}}}} = -Ri^2 < 0$$

Donc $E_{\text{ém}}(t)$ diminue et tend vers 0 avec une constante de temps $1/\lambda$

Perte d'énergie au cours d'une pseudo période :

$q(t+T) = e^{-\lambda.T} q(t)$

$i(t+T) = e^{-\lambda.T} i(t)$

Donc $E_{\text{ém}}(t+T) = \frac{1}{2} L \times \left(i(t+T)\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\left(q(t+T)\right)^2}{C} = E_{\text{ém}}(t) e^{-2\lambda.T}$

Perte relative d'énergie au cours d'une pseudo période :

$$p = \frac{E_{\text{ém}}(t) - E_{\text{ém}}(t+T)}{E_{\text{ém}}(t)} = 1 - e^{-2\lambda.T}$$

Pour un amortissement faible ($Q >> 1$) :

$$\delta = \frac{\pi}{Q} << 1$$

Développement limité de $x \mapsto e^x$ au voisinage de $x = 1$:

$$e^x \approx 1 + x$$

Donc $e^{-2\lambda.T} \approx 1 - 2\lambda.T$. Donc $p \approx 2\lambda.T = \frac{2\pi}{Q}$

Donc p est d'autant plus petit que Q est élevé.

Ainsi, pour $Q >> 1$, les pertes électromagnétiques sont faibles

Pour $Q \approx 1$, les pertes sont fortes (Attention, la relation $p \approx \frac{2\pi}{Q}$ n'est plus vraie : elle n'est valable que pour $Q >> 1$)