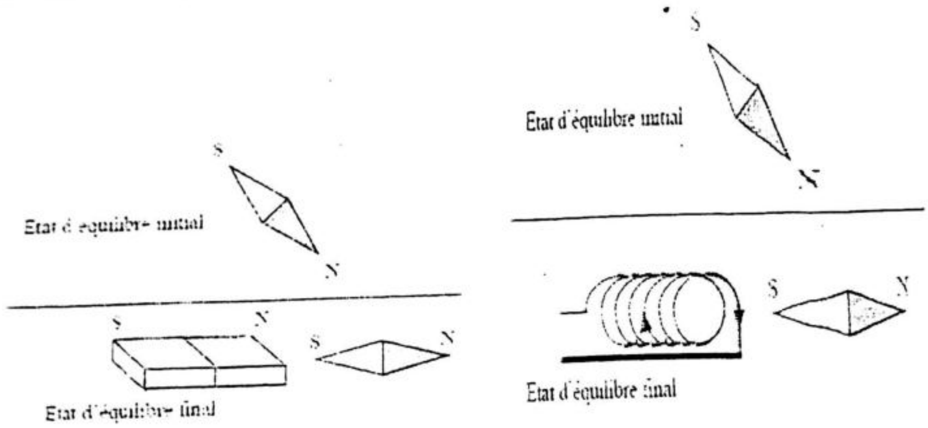
مكتبة الطالب
05.39.80.7 .87
attalibilib@gmail.com

1 Rappel

1-2 Introduction

Comme il est connu, certain minerais de fer tel que le magnétite, ont des propriété particulière d'attirer les petits morceaux de fer

Ce même comportement est observé avec des bobines de fils conducteur parcourue par un courant électrique. Cette propriété physique porte le nom de **magnétisme**



L'effet d'un aimant sur l'aiguille *l'effet d'un courant sur l'aiguille*

1-2 loi de Biot et Savart

Soit un fil conducteur parcouru par un courant electrique I; soit dl un élément infiniment petit de fil, et M un point de l'espace : voir la figure si dessus

Scanned by CamScanner

N°46
4PH

$$\boxed{\overrightarrow{dB} == \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{I\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}} \qquad 1-1$$

I : le courant électrique qui traverse le fil

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$: la distance entre l'élément de fil $\overrightarrow{dl}$ et le point M

$\overrightarrow{dB}$: est le champ d'induction magnétique élémentaire créé par $\overrightarrow{dl}$

μ_0 : est une constante appelée perméabilité magnétique du vide avec :

$$\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2 = 1 \qquad \mu_0 = 4\pi.10^{-7}$$

c : est la vitesse de la lumière

La relation de Biot et Savart donne tous le propriété de champ $\overrightarrow{dB}$:

La direction : est donné par le produit vectoriel $\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r}$ donc le vecteur $\overrightarrow{dB}$ est perpendiculaire au plan former par $\overrightarrow{dl}$ et $\vec{r}$

Le sens : est donné par la régle de tire bouchon ou la main droite telque ($\overrightarrow{dl}$, $\vec{r}$ et $\overrightarrow{dB}$) forme un trièdre directe

Le module : est donné par $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl.\sin(\alpha)}{r^2}$ α est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{dl}$ et le vecteur $\vec{r}$

Pour trouver le champ total créé par le fil conducteur il faut intégré sur tout la longueur de fil (c'est à dire faire la somme)

$$\boxed{\vec{B} \doteq \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{I\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}} \qquad 1-2$$

Scanned by CamScanner

2-3 Le régime variable

Dans l'électrostatique et magnetostatique les champs ne dépendent pas du temps. Le régime variable est caractérisé par des propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps. Ces particularités sont :

a) Le phénomène d'induction : Un circuit filiforme, au repos et parcouru par un courant invariable, n'entraîne l'apparition d'aucune f.é.m ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos. Il n'en est pas de même si le courant varie ou si les circuitsen présence se déplacent l'un par rapport à l'autre: la f.é.m ou le courant qui apparaissent sont dus au **phénomène d'induction**. Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit); ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique .

b) Le phénomène de capacité : Un circuit comprenant un condensateur alimenté par une source de tension variable en fonction du temps, est parcouru par un courant variable bien que la continuité électrique soit interrompue par l'espace entre les armatures du condensateur. Dans ce cas l'intensité du courant n'est plus conservée tout au long du circuit puisqu'elle est nulle dans l'espace entre les armatures. Il n'est donc plus possible d'appliquer le théorème d'Ampère. Pour conserver la validité de ce dernier, nous serons amenés à introduire le courant de déplacement.

c) Le phénomène de propagation: Considérons un ensemble constitué par des circuits parcourus par des courants et par des distributions de charge variant en fonction du temps ; cet ensemble pouvant être au repos ou en mouvement. Au voisinage de ces distributions régnent un champ électrique et un champ magnétique. Contrairement au cas stationnaire, ces champs ne sont pas synchrones avec les sources, c'est-à-dire qu'à un instant t donné, ces champs dépendent des valeurs des sources à un instant antérieur qui est fonction de la distance séparant le point d'observation des sources.

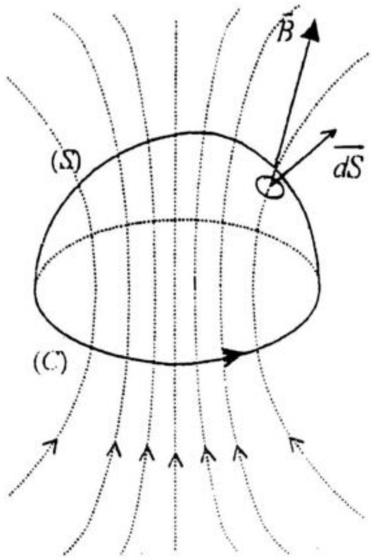
Nous exprimons ce fait en disant qu'il y a propagation à vitesse finie des champs à partir des sources qui leur donnent naissance et le retard est d'autant plus grand que le point où l'on désire connaître les champs est éloigné des sources.

Toutefois dans le cas de régimes variant assez lentement en fonction du temps, on fait des approximations qui permettent de négliger certains termes dans les équations de Maxwell. Cet ensemble d'approximations est appelé l'approximation du régime quasi stationnaire (déjà vu dans le chapitre précedent)

Scanned by CamScanner

2-3 flux d'induction magnétique :

Si on considère un circuit (c) de surface S dans un champ d'induction magnétique $\vec{B}$. Si $\overrightarrow{ds}$ est un élément de surface de circuit (C) et $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface dS. On appelle le flux d'induction magnétique ϕ à travers la surface S la quantité :



$$\boxed{\phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{ds} = \iint_{surface} \vec{B}.\vec{n}ds = \iint_{surface} B\ ds\ cos(B, ds)} \qquad 2-1$$

B en teslas (T)

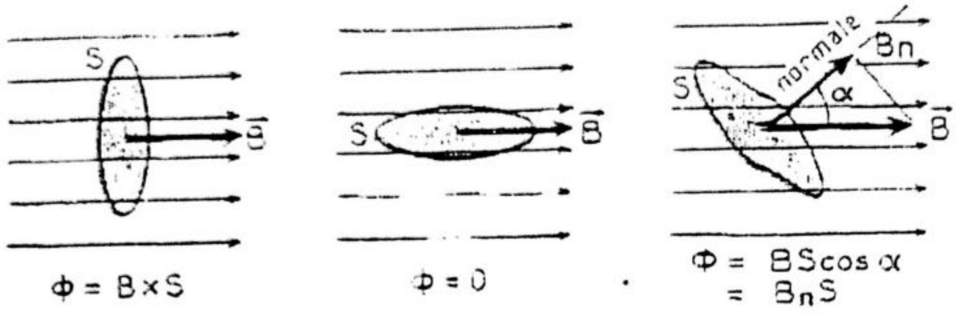
S en mètres carré (m^2).

ϕ L'unité du flux d'induction magnétique est le **Weber** (**symbole Wb**)

Exemple :

Considérons une spire de surface S placée dans un champ magnétique B identique en tout points et dont les lignes d'inductions sont des droites parallèles.

Scanned by CamScanner

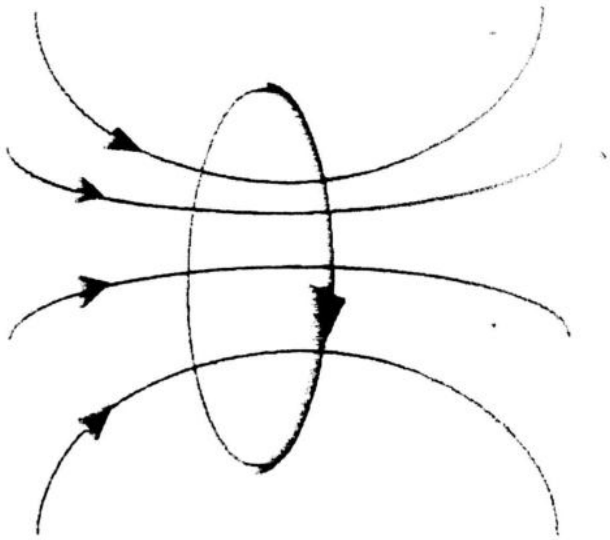


D'aprés la position de la spire par apport au champ on trouve les différentes valeurs de flux

2-4 Induction et auto-induction

a) Loi de lorenz

Ce phenomene ete découvert par Faraday en 1831. Prenons deux circuits C_1 et C_2. L'un (C_1) est alimente en courant i_1 grace à un generateur. L'autre (C_2) ne contient aucun générateur mais est muni d'un dispositif permettant de détecter le passage d'un courant.



Lorsque les deux circuits sont immobiles et que le courant i_1 est constant, $i_2=0$. Par contre, on voit apparaitre un courant i_2 dans chacun des cas suivants

- soit si l'un des circuits se déplace par rapport à l'autre
- soit si le courant i_1 varie.
- soit si l'un des circuits se déforme.

Le même phénomène est observé si l'on déplace un aimant permanent à proximité de C_2.

Dans tous ces cas, il ya variation de flux à travers le circuit C_2. Et cette variation est la résponsable de l'apparition de courant dans le circuit. Lenz a montré que le sens du courant qui apparaît est tel que le champ magnétique qu'il crée s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naiss

ance.

b) Loi de Faraday (demonstration pendant la seance de cours):

La variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre une force électromotrice (fem) induite donné par :

$$\boxed{e = -\frac{d\phi}{dt}} \qquad 2-2$$

$d\phi$: la variation de flux magnétique.

e : force électromotrice d'induction

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps, est valable pour tout régime variable et elle sert de base à l'étude de l'électromagnétisme classique

c) auto-induction

Scanned by CamScanner

Si on considère un circuit isolé, parcouru par un courant I, on s'aperçoit que le courant I engendre un champ magnétique dans tout l'espace et il existe donc un flux de ce champ à travers le circuit lui-même. Ce Flux est exprimé par :

$$\phi = Li \qquad 2-3$$

Et la fem :

$$e = L\frac{dI}{dt} \qquad 2-4$$

Où L est le coefficient d'auto-induction ou auto-inductance (ou self), exprimé en Henry (symbole H). Il ne dépend que des propriétés géométriques du circuit et est nécessairement positif.

Si I =constante alors e = 0

Pour une bobine la tension entre les bores de celle-ci est donné par :

$$U = Ri - e \qquad 2-5$$

Avec

R : est la résistance interne de la bobine

e : est la fem de la bobine

i : le courant qui circule dans la bobine

$$\boxed{U = R_L i + L\frac{di}{dt}}$$

Scanned by CamScanner

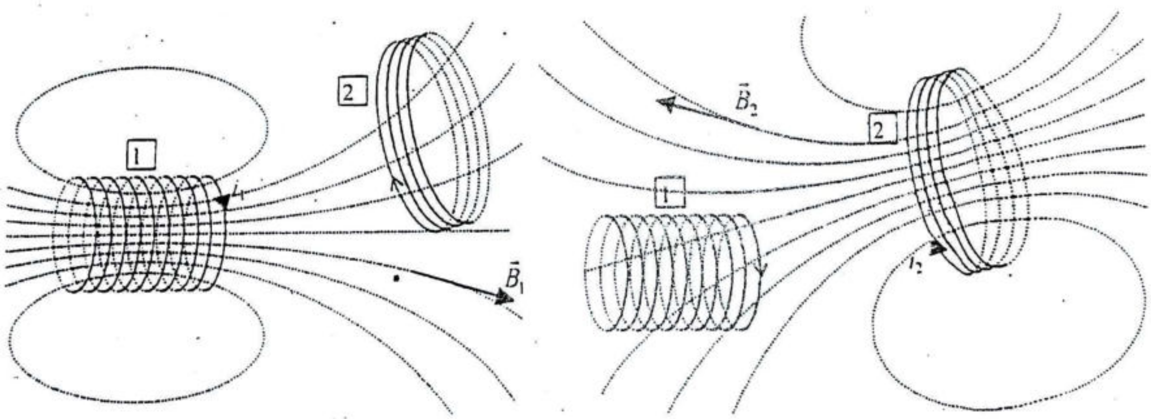
Pour une bobine (R_L,L) alimentè par un générateur (E,r) ; le courant qui circule dans le circuit est donné par :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_L + r}(1 - e^{\frac{(R_L + r)}{L}})}$$

d) Inductance mutuelle

Soient deux circuits orientés repérés par (1) et (2) tels que :

- quand le circuit (1) est parcouru par une intensité de courant i_1, le circuit (2) embrasse une partie (ou la totalité) du champ magnétique B_1 crée par (1).
- quand le circuit (2) est parcouru par une intensité de courant i_2, le circuit (1) embrasse une partie (ou la totalité) du champ magnétique B_2 crée par (2).



Le flux à travers les deux circuit est donné par :

Le flux à travers le circuit 1 :

$$\phi_1 = \phi_{1\to1} + \phi_{2\to1} = L_1 i_1 + M_{2\to1} i_2 \qquad 2-6$$

avec :

ϕ_1 le flux total a travers le circuit 1

$\phi_{1\to1} = L_1 i_1$ est le flux de champ B_1 à travers le circuit 1 (flux propre). L_1 est le coefficient d'auto-induction de circuit 1

Scanned by CamScanner

$\phi_{2\to 1} = \iint_{S1} B_2 ds_1 = M_{2\to 1} i_2$ est le flux de champ B_2 à travers le circuit 1. $M_{2\to 1}$ est l'inductance mutuelle entre le circuit 1 et 2

Le flux à travers le circuit 2:

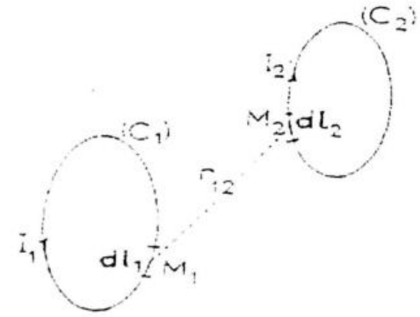
$$\phi_2 = \phi_{2\to 2} + \phi_{1\to 2} = L_2 i_2 + M_{1\to 2} i_1 \qquad 2-7$$

ϕ_2 le flux total a travers le circuit 2
$\phi_{2\to 2} = L_2 i_2$ est le flux de champ B_2 à travers le circuit 2 (flux propre). L_2 est le coefficient d'auto-induction de circuit 2

$\phi_{1\to 2} = \iint_{S2} B_1 ds_2 = M_{1\to 2} i_1$ est le flux de champ B_1 à travers le circuit 2. $M_{1\to 2}$ est l'inductance mutuelle entre le circuit 2 et 1

La relation de Neumann

En generale. les deux inductances mutuelles sont égales et elles sont données par la relation de Neumann



$$M = M_{1\to 2} = M_{2\to 1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C1} \oint_{C2} \frac{dl_1 . dl_2}{r_{12}} \qquad 2-8$$

2-6 Equation de Maxwell

2-6-1 Rapelle mathematique

Dans un referensiel $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on definie les operateurs suivants :

Scanned by CamScanner

$$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \qquad \vec{V}=\begin{pmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{pmatrix}$$

. On definie la divergence d'un champ V par :

$$\mathrm{div}\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad 2-9$$

L'opérateur **rotationnel** est un opérateur différentiel aux dérivées partielles definie par :

$$\mathrm{rot}\vec{V}=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}\\ \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\\ \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}V_x\vec{\imath}\\ V_y\vec{\jmath}\\ V_z\vec{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z})\vec{\imath}\\ (\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x})\vec{\jmath}\\ (\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y})\vec{k}\end{pmatrix} \qquad 2-10$$

on admet les deux théoremes suivants:

Théorème de Green-Ostrogradski

$$\oiint \vec{V}\times\overrightarrow{ds} = \oiiint div\,\vec{V}.\overrightarrow{dv}$$

Théorème de Stokes

$$\oint \vec{V}\times\overrightarrow{dl} = \oiint_{surface} rot\vec{V}\times\overrightarrow{ds}$$

Les équations de Maxwell sont des équations locales qui expriment des relations entre le champ Electromagnetique (E, B) et ses sources (ρ , j)

En régime stationnaire on a les 4 relations suivantes:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = \vec{0}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = \vec{0}$$

Scanned by CamScanner

2-6-2 Equation de Maxwell-Gauss (MG)

la relation suivante reste toujours valable en régime variable :

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad 2-11$$

$\vec{E}$ est le champ électrique

ρ est la densité volumique de charge

ε_0 est la permittivité diélectrique du vide

$$\iiint_{volume} div\vec{E}\,dv = \iiint_{volume} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad 2-13$$

Theoéme de green-Ostrogradski

$$\boxed{\iiint_{volume} div\vec{E}\,dv = \oiint \vec{E}\,\overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

On trouve le théoréme de gauss

2-6-3 Equation de Maxwell-flux magnétique

Daprés le Theoréme de green-Ostrogradski on peut écrire

$$\boxed{\iiint_{volume} div\vec{B}\,dv = \oiint \vec{B}\,\overrightarrow{ds}} \qquad 2-12$$

Or

$$\text{div}\,\vec{B} = \vec{0} \qquad 2-13$$

donc :

$$\boxed{\iiint_{volume} div\vec{B}\,dv = \iint_{surface\,fermer} \vec{B}\,\overrightarrow{ds} = 0} \qquad 2-14$$

Scanned by CamScanner

2-6-4 Equation de Maxwell-Faraday (MF) :

$$le\ flux\ magnétique = \phi = \oiint_{surface} \vec{B} \times \overrightarrow{ds}$$

Dérivons les deux membre de l'équation par rapport au temps et en tenant compte des deux formule: (D'après faraday : $-\frac{\partial \phi}{\partial t} = e$) et $(-\overrightarrow{grad}V = \vec{E})$ on obtient :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \oiint_{surface} \vec{B} \times \overrightarrow{ds} = e(potentiel) = \oint_{circuit} \overrightarrow{Edl}$$

D'après le théorème *de Stokes*

$$\oiint_{surface} rot\vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oint_{circuit} \overrightarrow{Edl} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = \oiint_{surface} -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \times \overrightarrow{ds}$$

On conclue :

$$\boxed{rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad 2-15$$

$$\boxed{\oint_{circuit} \overrightarrow{Edl} = -\frac{\partial}{\partial t} \oiint_{surface} \vec{B} \times \overrightarrow{ds}}$$

2-6-5 Equation de Maxwell-Ampère (MA) :

Sa formulation intégrale découle du théorème d'Ampère exprimé en fonction du champ magnétique et en régime statique par:

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Scanned by CamScanner

d'après maxwell on aura la formule suivante

$$\oint \vec{B} \times \overrightarrow{dl} = \oiint_{surface} rot\vec{B} \times \overrightarrow{ds} = \mu_0 \oiint \vec{J}\overrightarrow{ds} + \varepsilon_0\mu_0 \oiint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\overrightarrow{ds}$$

$$\boxed{rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \qquad 2-16$$

Le terme $\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est ajouté pour eviter un paradoxe (div rot$\vec{B}$=0)

2-7 Existence de potentiels (A,V), jauge de Lorentz

2-7-1 Rappels mathématiques

- Si un champ vectoriel a un rotationnel nul, alors il existe au moins un champ scalaire dont il est le gradient.

$$\vec{A} = -\overrightarrow{grad}\, W \rightarrow rot\, \vec{A} = 0$$

- Si un champ vectoriel a une divergence nulle, alors il existe au moins un champ vectoriel dont il est le rotationnel.

$$\vec{A} = rot\, \vec{C} \rightarrow div\, \vec{A} = 0$$

2-7-2 Définition des potentiels $(\vec{A}, V)$

D'après l'equation de Maxwell-flux magnétique :

$$div\vec{B} = \vec{0}$$

Donc il existe un champ vecteriel $\vec{A}$ dont il est le rotationnel de $\vec{B}$

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

Si l'on introduit cette relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, il vient :

Scanned by CamScanner

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\frac{\partial rot\overrightarrow{A}}{\partial t}$$

Soit :

$$\boxed{rot\left(\vec{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}} \qquad 2-17$$

Il existe donc au moins un champ scalaire que l'on notera V (**V est appelé potentiel scalaire)** tel que :

$$\boxed{\left(\vec{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{grad}\, V} \qquad 2-18$$

soit

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}} \qquad 2-19$$

Dans le cas du régime permanent $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$, on retrouve l'expression classique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

On suppose que, pour un champ électromagnétique donné, on dispose de deux couples (A_0, V_0) *et* (A, V) de potentiels. Alors :

$$\vec{B} = rot\overrightarrow{A_0} = rot\,\overrightarrow{A} \quad \rightarrow \quad rot\left(\overrightarrow{A_0} - \overrightarrow{A}\right) = \vec{0}$$

Par conséquent, en notant $\varphi(\vec{r}, t)$ un champ scalaire quelconque :

$$\left(\overrightarrow{A} - \vec{A}_0\right) = \overrightarrow{grad}\, \varphi(\vec{r}, t) \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{A} = \overrightarrow{grad}\, \varphi(\vec{r}, t) + \vec{A}_0$$

Le potentiel vecteur $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{grad}\, \varphi(\vec{r}, t) + \vec{A}_0$ ($\varphi(\vec{r}, t)$ **désigne un champ scalaire quelconque**) convient également : le potentiel vecteur est défini à un gradient près.

De même, pour le potentiel scalaire :

Scanned by CamScanner

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V_0 - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{grad}\,(V - V_0) + \frac{\partial(\vec{A} - \vec{A}_0)}{\partial t} = \overrightarrow{grad}\left[V - V_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0 \qquad 2-20$$

Après integration, la fonction additive du temps qui s'introduit est mise sous forme d'une dérivée par rapport au temps :

$$(V - V_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} \qquad 2-21$$

En posant : $\psi = \varphi(\vec{r}, t) - F(t)$

$$\overrightarrow{grad}\left[V - V_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}, t) + \overrightarrow{grad}\psi(\vec{r}, t)} \text{ et } \boxed{V(\vec{r}, t) = V_0(\vec{r}, t) - \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}} \qquad 2-22$$

Il existe donc une infinité de couples de potentiels vecteurs : faire le choix d'un d'entre eux est faire un choix de jauge (il existe une infinité de jauges). On dit qu'il y a indétermination de jauges.

Le champ EM est par contre invariant de jauge ; lui seul a un sens physique alors que les potentiels sont seulement un moyen mathématique d'expression des champs (en mécanique classique).

2-7-3 Equations vérifiées par les potentiels :

A partir de l'équation de Maxwell-Ampère, on élimine E et B

Scanned by CamScanner

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\left[\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(-\overrightarrow{grad}\,\mathrm{V} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t})\right]$$

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0(-\overrightarrow{grad}\,\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2})$$

Par ailleurs :

$$rot\vec{B} = rotrot\vec{A} = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Avec : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \frac{1}{c^2}\overrightarrow{grad}\,\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}} \qquad 2-23$$

Soit l'équation aux dérivées partielles vérifiées par le potentiel vecteur :

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \overrightarrow{grad}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V} + div\vec{A}\right] \qquad (2-23)'$$

A partir de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \mathrm{div}\left[-\overrightarrow{grad}\,\mathrm{V} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Scanned by CamScanner

Donc :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\partial \mathrm{div}\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Si l'on choisit **(condition de Jauge de Lorentz) :**

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V} + div\vec{A} = 0}$$

Les équations deviennent simplement :

soit

$$\boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad 2' - 24$$

Et à partir de l'equation $(2-23)'$

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}} \qquad 2-25$$

2-8 Onde électromagnétique

Dans la théorie de Maxwell, l'interaction entre deux particules est transmise par l'intermédiaire de modifications de proche en proche du champ Electromagnétique. Cette propagation de l'interaction par l'intermédiaire du champ Electromagnétique se fait précisément sous forme d'ondes EM avec la célérité c.

En effet prenons l'équation de :

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

On fait entrer le rotationnel sur l'équation :

Scanned by CamScanner

$$rot\, rot\vec{E} = -rot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial rot\vec{B}}{\partial t} = -(\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right])$$

$$rot\, rot\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}$$

Or

$$rot\, rot\vec{E} = \overrightarrow{grad}\, div\vec{E} - \Delta\vec{E}$$

Et $$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'équation devient

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{grad}\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}} \qquad 2-26$$

On suivant le même raisonnement pour B on trouve

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\overrightarrow{rot\vec{J}}} \qquad 2-27$$

Dans une région sans charges ni courants : $\vec{J} = 0 \quad et\ \rho = 0$

Les équations deviennent :

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \qquad 2-28$$

$$\boxed{\Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}} \qquad 2-29$$

Scanned by CamScanner

C'est l'équation de d'Alembert ($\Delta f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$) qui est une équation classique de propagation des ondes . La solution de ce type de type d'équation est sous forme :

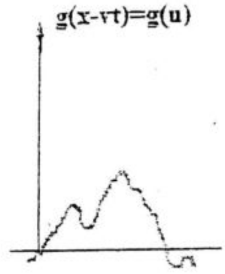
$S= f(x+vt)+g(x-vt)$ avec f et g sont des fonctions arbitraires

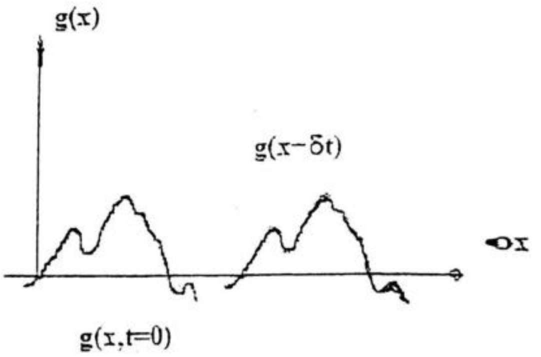
Interprétation physique :

Pour simplifier, on considère une fonction a une dimension $s= g(x-vt)$ comme solution de l'équation de d' Alembert $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

g(x-vt) est un signal qui ce propage le long de l'axe OX sans déformation.

On va tracer cette fonction pendant deux temps différents (t=0 et t=δt)





Ce signal s'est déplacé de $\delta X = v\delta t$. v est la vitesse de déplacement de signale

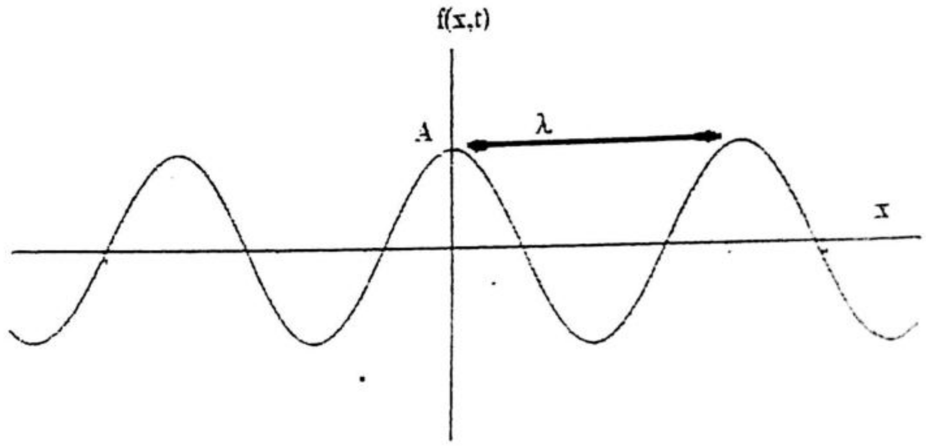
Scanned by CamScanner

2-8-1 Ondes monochromatiques :

Une onde monochromatique est en générale décrite par une fonction sinusoïdale tel que :

$$f(x,t) = asin(k(x+vt)) + bcos(k(x-vt)) = Acos(k(x-vt) - \varphi)$$

Représentation de la fonction f(x,t) à t fixe (t=0)



On aura

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

λ est la longueur d'onde (c'est la longueur pour avoir le même amplitude maximum)
k est appelé le nombre d'onde

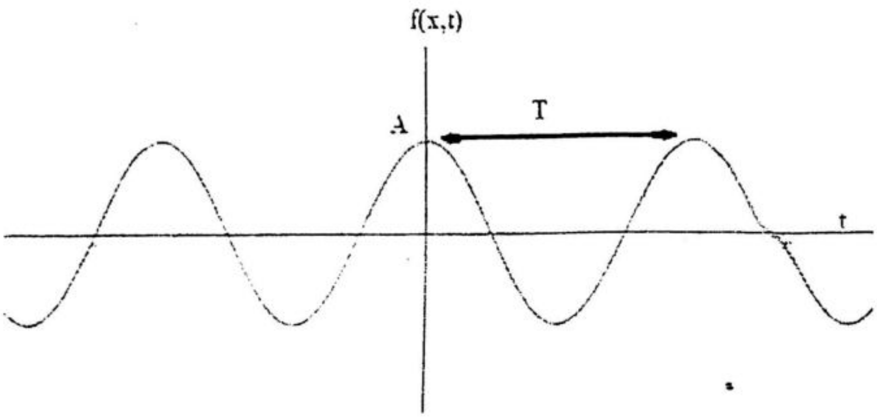
Représentation de la fonction f(x,t) à x fixe (x=0)

Scanned by CamScanner

λ est la longueur d'onde (c'est la longueur pour avoir le même amplitude maximum)

k est appelé le nombre d'onde

Représentation de la fonction f(x,t) à x fixe (x=0)



$$\boxed{T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}}$$

T est la période de l'onde (c'est le temps nécessaire pour avoir le même amplitude maximum)

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$: f est la fréquence de l'onde, ω est l'impulsion

Enfin on peut écrite la fonction $f(x,t)$ comme suit :

$$\boxed{f(x,t) = A\cos(kx - wt - \varphi)}$$

Cette fonction est une solution de l'équation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

2-8-2 Solution en 3dimension

Scanned by CamScanner

maintenant on va chercher la solution de l'équation en trois dimension

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}$$

Les fonctions $f(x.y.z.t) = A\cos(k_1 x + k_2 y + k_3 z - wt - \varphi)$ en sont les solutions.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) = -{k_1}^2 f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y, z) = -{k_2}^2 f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) = -{k_3}^2 f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, y, z) = -\varphi^2 f(x, y, z)$$

On trouve que :

$$\boxed{{k_1}^2 + {k_2}^2 + {k_3}^2 = \frac{\omega^2}{v^2}}$$

$$\boxed{\|\vec{k}\|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}}$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(\vec{r}, t) = A\cos(\vec{k}.\vec{r} - wt - \varphi)}$$

$f(r, t) = A\cos(\vec{k}.\vec{r} - wt - \varphi)$ est une des solutions pour l'équation $\Delta f \ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ à condition d'avoir l'égalité suivante $\boxed{\|\vec{k}\|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}}$

Scanned by CamScanner

2-8-3 Onde plane monochromatique

Considérons la fonction qui décris une onde au point A suivante

$$f(\overrightarrow{r_A}, t) = f_0 cos(\vec{k}.\overrightarrow{r_A} - \omega t + \varphi)$$

En quels points B la fonction est –elle égale à celle en A ?

$$f(\overrightarrow{r_A}, t) = f(\overrightarrow{r_B}, t)$$

$$cos\left(\vec{k}.\overrightarrow{r_A} - \omega t + \varphi\right) = cos(\vec{k}.\overrightarrow{r_B} - \omega t + \varphi)$$

$$\vec{k}.\overrightarrow{r_A} - \omega t + \varphi = \vec{k}.\overrightarrow{r_B} - \omega t + \varphi + 2\pi n$$

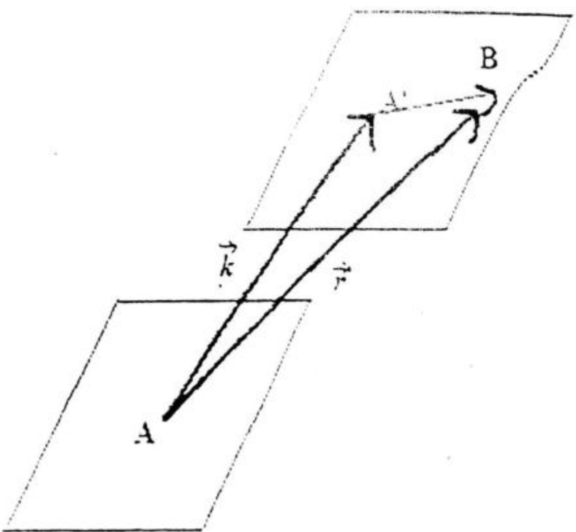
$$\vec{k}.\overrightarrow{r_A} - \vec{k}.\overrightarrow{r_B} = 2\pi n \quad \text{avec n } n \in N$$

$$\boxed{\vec{k}(\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}) = 2\pi n}$$

Dans un repère orthonormé (o,x,y,z) on prend:
$\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{OB}$

Ce qui nous donne

$$\vec{k}\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = 2\square n = \vec{k}.\overrightarrow{AB}$$



Scanned by CamScanner

$$\vec{k}.\overrightarrow{AB} = \vec{k}.\vec{r} = 2\pi n$$

Prenons $n=1$

$$\vec{k}.\vec{r} = \vec{k}.(\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) = 2\pi$$

$$\vec{k}.\vec{r}_{\parallel} + \vec{k}.\vec{r}_{\perp} = 2\pi$$

$$\vec{k}.\vec{r}_{\perp} = 0$$

$$\vec{k}.\vec{r}_{\parallel} = 2\pi$$

$$\vec{k}.\overrightarrow{AA'} = 2\pi$$

$$\boxed{\vec{k}.\overrightarrow{AA'} = 2\pi = k.AA'}$$

$$\boxed{r_{\parallel} = AA' = \frac{2\pi}{k} = \lambda}$$

Cette longueur est la distance qui sépare deux plans parallèles. Donc on aura une succession de plan parallèle d'où le nom de l'onde plane. Les surfaces d'onde sont des plans parallèles espacés de λ.

2-8-4 Notation complexe des fonctions d'onde

On peut définir la fonction complexe de l'onde à partir de notre fonction réel que nous avons vu précédemment :

$$\boxed{\overline{f}(\vec{r},t) = F_0 e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\varphi)}}$$

Scanned by CamScanner

$$Ree\left(\overline{f}(\vec{r},t)\right) = f(\vec{r},t) = F_0cos(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

La notation complexe en générale facilite les calcules.

Revenons à notre onde électromagnétique. La fonction f n'est que une des composante de champ électrique et le champ magnétique :

Pour le champ électrique :

$$\overline{E_x}(\vec{r},t) = E_{x0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\varphi)} = \overline{E}_{x0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \text{ et } E_x = E_{x0}cos(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

$$\overline{E_y}(\vec{r},t) = E_{y0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\varphi)} = \overline{E}_{y0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \text{ et } E_y = E_{y0}cos(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \varphi')$$

$$\overline{E_z}(\vec{r},t) = E_{z0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\varphi)} = \overline{E}_{z0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \text{ et } E_z = E_{z0}cos(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \varphi'')$$

$$\boxed{\overline{\vec{E}} = \overline{\vec{E}}_0e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\varphi t)}}$$

Pour le champ magnétique

$$\overline{B_x}(\vec{r},t) = B_{x0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\varphi)} = \overline{E}_{x0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \text{ et } B_x = B_{x0}cos(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

$$\overline{B_y}(\vec{r},t) = B_{y0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\varphi')} = \overline{B}_{y0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \text{ et } B_y = B_{y0}cos(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \varphi')$$

$$\overline{B_z}(\vec{r},t) = B_{z0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\varphi'')} = \overline{B}_{z0}e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \text{ et } E_z = B_{z0}cos(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \varphi'')$$

$$\boxed{\overline{\vec{B}} = \overline{\vec{B}}_0e^{j(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}}$$

Question a répondre pendant la séance de cours

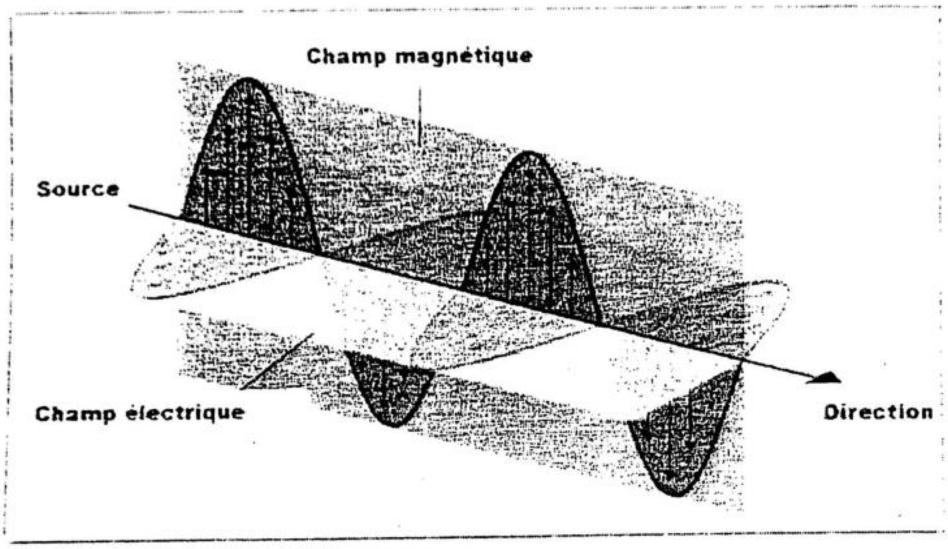
Calculer la $div\overline{\vec{E}}$ et montrer que dans le vide $\vec{E} \wedge \vec{k}$

Montré que le $rot\overline{\vec{E}} = -j\vec{k}\wedge\overline{\vec{E}}$

en utilisant l'équation de Maxwell faites une relation entre $\overline{\vec{E}}$ et $\overline{\vec{B}}$ $(rotE = \frac{\partial B}{\partial t})$ et vérifier que $\vec{E} \perp \vec{k} \perp \vec{B}$

Scanned by CamScanner

présentation de la propagation d'une onde plane monochromatique



2-9 Densité volumique d'énergie électromagnétique, vecteur de Poynting, équation locale de conservation de l'énergie :

2-9-1 Puissance volumique cédée par le champ EM à la matière

Un champ EM (E, B) va interagir avec des particules chargées et leur fournir de l'énergie. En effet, une charge q est soumise de la part de ce champ EM à la force de Lorentz, dont la puissance s'écrit :

$$PL = \frac{travail\ de\ la\ force}{dt} = \frac{(\overrightarrow{F_E} + \overrightarrow{F_B}).\overrightarrow{dl}}{dt}$$

Scanned by CamScanner

$$PL = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt}(q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B})$$

$$PL = \vec{v}.\left(q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}\right) = q\vec{E}.\vec{v}$$

Cette expression est pour une charge

Pour un nombre n de charge par unité de volume, la puissance volumique cédée par le champ EM à la matière s'écrit

$$\boxed{Pl = \frac{dPL}{dV} = n.q.\vec{v}.\vec{E} = \vec{j}.\vec{E}}$$

pl : Densité volumique de puissance elle correspond à une puissance transférée du champ vers les courants.

On admet que la densité d'énergie électromagnétique est donnée par :

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left\|\vec{E}\right\|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left\|\vec{B}\right\|^2}$$

Equation locale de conservation de l'énergie :

Revenons à présent à l'idée d'une équation locale de conservation de l'énergie qui doit être contenue dans les équations de Maxwell.

Prenons l'équation de maxwell- ampère

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

multipliant scalairement les deux termes par le vecteur de champ électrique $\vec{E}$

$$\vec{E}.rot\vec{B} = \mu_0(\vec{J}\,\vec{E} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E})$$

Scanned by CamScanner

- $$\frac{1}{\mu_0}\vec{E}.rot\vec{B} = \vec{J}\,\vec{E} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}$$

Prenons l'équation de maxwell-

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Multipliant l'éaution par $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0}.rot\vec{E} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Enfin, en effectuant la différence des deux équations, on obtient :

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}.rot\vec{B} - \vec{B}.rot\vec{E}\right) = \frac{\vec{B}}{\mu_0}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{J}\,\vec{E} + \varepsilon_0\vec{E}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Donc :

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}.rot\vec{B} - \vec{B}.rot\vec{E}\right) = \vec{J}\,\vec{E} + \frac{1}{2\mu_0}.\frac{\partial\overrightarrow{B^2}}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t}$$

On a la propriété suivante :

$$div\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right) = \vec{B}rot\vec{A} - \vec{A}rot\vec{B}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{-div\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\Lambda\vec{B}\right) = \vec{J}\,\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\overrightarrow{B^2}}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}\right]}$$

On posons :

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\Lambda\vec{B}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$\boxed{-div\vec{R} = \vec{J}\,\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}\right] = pl + \frac{\partial}{\partial t}Q}$$

Le vecteur ainsi introduit est appelé **vecteur de Poynting** et cette équation représente l'équation locale de conservation de l'énergie que l'on peut interpréter sous sa forme intégrale. En intégrant sur un volume fini τ, on obtient :

$$\boxed{\iiint_\tau -div\vec{R}\,d\tau = \iiint_\tau pl\,d\tau + \iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}Q\,d\tau}$$

$$\boxed{\iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}Q\,d\tau = -\iiint_\tau div\vec{R}\,d\tau - \iiint_\tau pl\,d\tau}$$

D'où

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau Q\,d\tau = -\iiint_\tau div\vec{R}\,d\tau - \iiint_\tau pl\,d\tau}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}EM = -P_{rayonne} - P_{cedé}}$$

Cette dernière équation représente la forme intégrale de conservation de l'énergie. Elle montre que la variation par unité de temps de l'énergie électromagnétique contenue dans un volume τ se compose en général de deux termes. Le premier terme est la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges mobiles du volume τ.

La puissance rayonnée le premier terme qui peut encore s'écrire

$$\boxed{P_{rayonné} = \iiint_\tau div\vec{R}\,d\tau = \iint_{surface\ de\ \tau} \vec{R}\,\overrightarrow{ds}}$$

Scanned by CamScanner

La puissance rayonnée représente alors le flux à travers la surface limitant le volume τ du vecteur de Poynting. Elle s'interprète comme la puissance associée à l'énergie qui traverse la paroi du volume τ, **comptée positivement pour une énergie sortante**. Le vecteur $\vec{R}$ apparaît alors comme un vecteur "densité de courant de puissance" analogue au vecteur $\vec{j}$.

Scanned by CamScanner