Chapitre I: QUADRIPÔLES

23 février 2017

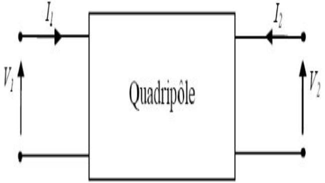
1- Définition d'un quadripôle :

Un quadripôle est un composant ou un circuit (ensemble de composants) à deux entrées et deux sorties qui permet le transfert d'énergie entre deux dipôles.
On distingue deux types de quadripôles : actifs et passifs. Quadripôle est dit passif s'il ne comporte aucune source d'énergie. Il est actif dans le cas contraire. Q = est dit linéaire si les éléments qui le composent sont linéaires (R, L, C,...).

2- Représentation d'un quadripôle :

Le quadripôle peut être défini par quatre grandeurs électriques : tension et courant d'entrée (V_1 et I_1), tension et courant de sortie (V_2 et I_2). Par convention, on donne le sens positif aux courants qui pénètrent dans le quadripôle. C'est une convention récepteur.

Symbole d'un quadripôle.



Les tensions et les courants aux bornes du quadripôle sont liés par des équations linéaires. Plusieurs représentations matricielles sont possibles.

1 - Matrice impédance :

On exprime les tensions en fonction des courants. Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédances (résistances). Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

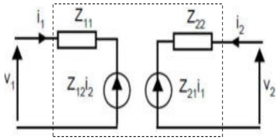
ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Z] * \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

[Z] est la matrice impédance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Z en circuit ouvert ($I_1 = 0$ ou $I_2 = 0$). Ils se définissent comme suit :

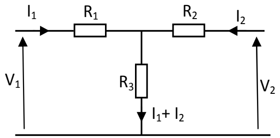
- $Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} |_{I_2=0}$ Impédance d'entrée à sortie ouverte.
- $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} |_{I_2=0}$ Impédance de transfert direct à sortie ouverte.
- $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} |_{I_1=0}$ Impédance de transfert inverse à entrée ouverte.
- $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} |_{I_1=0}$ Impédance de sortie à entrée ouverte.

Le schéma équivalent de ce quadripôle



☛ Exemple : Quadripole en T

En appliquant la loi des mailles (ou première loi de Kirschhoff) aux deux mailles de la figure, on obtient :



$$\begin{cases} V_1 = R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_2) = (R_1 + R_3)I_1 + R_3 I_2 \\ V_2 = R_2 I_2 + R_3(I_1 + I_2) = R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 \end{cases}$$

Nous trouvons :$Z_{11} = R_1 + R_3$, $Z_{12} = R_3 = Z_{21}$ et $Z_{22} = R_2 + R_3$. Donc la matrice impédance du quadripôle est :

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$

2- Matrice admittance :

Les paramètres d'admittance sont utilisés pour relier les courants aux tensions. Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

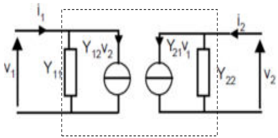
ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

[Y] est la matrice admittance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Y en court-circuit ($V_1 = 0$ ou $V_2 = 0$). Ils se définissent comme suit :

- $Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\,|_{V_2=0}$ admittance d'entrée à sortie en court-circuit ($V_2 = 0$).
- $Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\,|_{V_2=0}$ admittance de transfert à sortie en court-circuit ($V_2 = 0$).
- $Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\,|_{V_1=0}$ admittance de transfert inverse à entrée en court-circuit ($V_1 = 0$).
- $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\,|_{V_1=0}$ admittance de sortie à entrée en court-circuit ($V_1 = 0$).

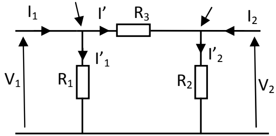
Schéma équivalent du quadripôles en Y.



Exemple : Quadripole en π

En appliquant les lois des noeuds (ou seconde loi de Kirschhoff) aux noeuds d'entrée et de sortie, on obtient :

$$\begin{cases} I_1 = I_1^{'} + I^{'} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_3} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3})V_1 - \frac{1}{R_3}V_2 \\ I_2 = I_2^{'} - I^{'} = \frac{V_2}{R_2} - \frac{V_1 - V_2}{R_3} = -\frac{1}{R_3}V_1 + (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})V_2 \end{cases}$$



Nous trouvons par identification :
$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}$, $Y_{12} = \frac{1}{R_3} = Z_{21}$ et $Y_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Donc la matrice admittance du quadripôle est :

$$\left[Y\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

3- Matrice hybride :

Les paramètres hybrides sont utilisés pour relier la tension d'entrée V_1 et le courant de sortie I_2 au courant d'entrée I_1 et à la tension de sortie V_2. Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

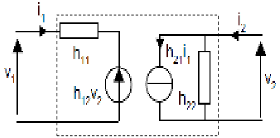
ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [H] * \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

[H] est la matrice hybride du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres (hybrides) h. Ils se définissent comme suit :

- $h_{11} = \frac{V_1}{I_1} |_{V_2=0}$ impédance d'entrée à sortie en court-circuit ($V_2 = 0$).
- $h_{21} = \frac{I_2}{I_1} |_{V_2=0}$ gain en courant à sortie en court-circuit ($V_2 = 0$).
- $h_{12} = \frac{V_1}{V_2} |_{I_1=0}$ gain en tension inverse à entrée ouverte ($I_1 = 0$).
- $h_{22} = \frac{I_2}{V_2} |_{V_1=0}$ admittance de sortie à entrée ouverte ($I_1 = 0$).

Schéma équivalent du quadripôles en H.



☛ En reprenant l'exemple du Quadripole en π, les coefficients de la matrice hybride de ce quadripole sont :

- Si la sortie est en court-circuit ($V_2 = 0$).

$$\left\{ h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \,\Big|_{V_2=0} = \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} \right. \quad ; \left\{ h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \,\Big|_{V_2=0} = -\frac{R_3}{R_1+R_3} \right.$$

- Si l'entré est en circuit-ouvert ($I_1 = 0$).

$$\left\{ h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \,\Big|_{I_1=0} = \frac{R_1+R_2+R_3}{R_2(R_1+R_3)} \right. \quad ; \left\{ h_{12} = \frac{V_2}{V_1} \,\Big|_{I_1=0} = \frac{R_1}{R_1+R_3} \right.$$

Donc la matrice hybride du quadripôle est :

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} & \frac{R_1}{R_1+R_3} \\ -\frac{R_1}{R_1+R_3} & \frac{R_1+R_2+R_3}{R_2(R_1+R_3)} \end{bmatrix}$$

4- Matrice de transfert :

Les paramètres de transfert sont utilisés pour exprimer les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée. Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} V_2 = T_{11} V_1 - T_{12} I_1 \\ I_2 = T_{21} V_1 - T_{22} I_1 \end{cases}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

[T] est la matrice de transfert du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres de transfert. Ils se définissent comme suit :

- $T_{11} = \frac{V_2}{V_1} |_{I_1=0}$ est l'amplification en tension (nombre).
- $T_{21} = \frac{I_2}{V_1} |_{I_1=0}$ est une admittance.
- $T_{12} = -\frac{V_2}{I_1} |_{V_1=0}$ est une impédance.
- $T_{22} = -\frac{I_2}{I_1} |_{V_1=0}$ est l'amplification en courant (nombre).

Attention : Contrairement aux autres représentations matricielles, pour la matrice de transfert T, on utilise le courant $-I_1$ (courant sortant du quadripole) à la place du courant I_1 (courant entrant dans le quadripole).

☛ En reprenant l'exemple du Quadripole en T.
Pour déterminer les coefficients de la matrice de transfert T de ce quadripole, nous allons considérer successivement les cas $I_1 = 0$ et $V_1 = 0$.

- Si l'entrée est en circuit-ouvert ($I_1 = 0$).

$$\left\{ T_{11} = \frac{V_2}{V_1} \,|_{I_1=0} = \frac{R_2+R_3}{R_3} \right. \quad ; \left\{ T_{21} = \frac{I_2}{V_1} \,|_{I_1=0} = \frac{1}{R_3} \right.$$

- Si l'entrée est en court-circuit ($V_1 = 0$).

$$\left\{ T_{22} = -\frac{I_2}{I_1} \,|_{V_1=0} = \frac{R_1+R_3}{R_3} \right. \quad ; \left\{ T_{12} = -\frac{V_2}{I_1} \,|_{V_1=0} = R_1 + R_2 + \frac{R_2 R_1}{R_3} \right.$$

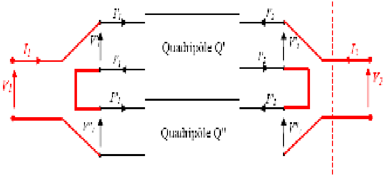
Donc la matrice de transfert du quadripôle est :

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{R_2+R_3}{R_3} & R_1 + R_2 + \frac{R_2 R_1}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & \frac{R_1+R_3}{R_3} \end{bmatrix}$$

II- Association de quadripôles :

1- Association en série de deux quadripôles :

Dans ce cas, la tension d'entrée (de sortie) du quadripôle résultant est la somme des tensions d'entrée (de sortie) des quadripôles associés en série : $V_1 = V_1^{'} + V_1^{''}$ et $V_2 = V_2^{'} + V_2^{''}$. Les courants sont identiques : $I_1 = I_2$.



Utilisons les matrices d'impédance, nous avons pour les deux quadripôles :

$$\begin{bmatrix} V_1^{'} \\ V_2^{'} \end{bmatrix} = [Z'] * \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \; et \; \begin{bmatrix} V_1^{''} \\ V_2^{''} \end{bmatrix} = [Z''] * \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

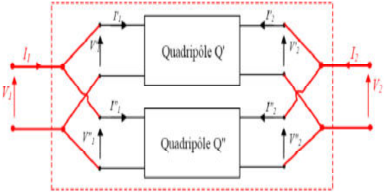
Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] * \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [Z] = [Z'] + [Z'']$$

La matrice [Z] du quadripôle équivalent à la mise en parallèle de Q' et Q" est donnée par : Z = Z' + Z''.

2- Association en parallèle de deux quadripôles :

Dans le cas de l'association en parallèle de deux quadripôles Q' et de Q'', les tensions sont communes aux deux quadripôles, nous utilisons donc les matrices admittances.



Les intensités des courants du quadripôle équivalent correspondent aux sommes des intensités des deux quadripôles :

$$\begin{cases} I_1 = I_1^{'} + I_1^{''} \\ I_2 = I_2^{'} + I_2^{''} \end{cases}$$

Nous avons en effet pour les deux quadripôles :

$$\begin{bmatrix} I_1^{'} \\ I_2^{'} \end{bmatrix} = \left[Y'\right] * \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \; et \; \begin{bmatrix} I_1^{''} \\ I_2^{''} \end{bmatrix} = \left[Y''\right] * \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

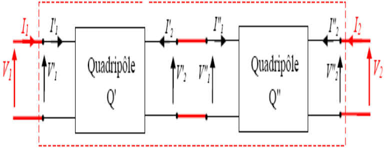
Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left[Y\right] * \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[Y\right] = \left[Y'\right] + \left[Y''\right]$$

La matrice [Y] du quadripôle équivalent à la mise en parallèle de Q' et Q" est donnée par : Y = Y' + Y''.

3- Association en chaîne ou en cascade :

Dans le cas d'une mise en cascade de deux quadripôles Q' et Q'', l'utilisation des paramètres de transfert devient particulièrement avantageuse :



Nous avons en effet pour les deux quadripôles :

$$\begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix} = [T'] * \begin{bmatrix} V_1' \\ -I_1' \end{bmatrix} \; et \; \begin{bmatrix} V_2'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = [T''] * \begin{bmatrix} V_1'' \\ -I_1'' \end{bmatrix}$$

Dans cette association, nous avons les relations suivantes entre les courants et entre les tensions :

$$\begin{cases} V_2'' = V_2 \\ I_2'' = I_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1'' = V_2' \\ I_2' = -I_1'' \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1' = V_1 \\ I_1' = I_1 \end{cases}$$

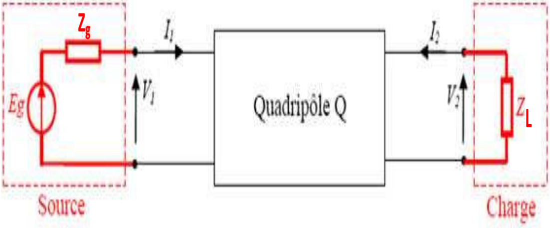
Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T] * \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_1 \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = [T''] * [T']$$

La matrice de quadripôle équivalent est donc :

La matrice [T] du quadripôle équivalent à la mise en parallèle de Q' et Q" est donnée par : T =T"*T'.

Considérons le cas très général pour lequel un quadripôle est connecté en sortie à un dipôle charge d'impédance Z_L et en entrée à un dipôle source d'impédance interne Z_g



En utilisant la matrice impédance du quadripôle nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = -Z_L I_2 \end{cases} \quad et \left\{ V_1 = E_g - Z_g I_1 \right.$$

1- Impédance d'entrée :

C'est l'impédance vue à l'entrée quand la sortie est connectée à une charge d'impédance Z_L. L'impédance d'entrée est $Z_E = \frac{V_1}{I_1}$.

D'après les équations précédentes, nous obtiendrons :

$$Z_E = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

2- Impédance de sortie :

C'est l'impédance vue à la sortie quand l'entrée est fermée par l'impédance du générateur Z_g. L'impédance de sortie est $Z_S = \frac{V_2}{I_2}|_{E_g=0}$. L'impédance de sortie Z_S vaut alors :

$$Z_S = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g + Z_{11}}$$

3- Gain en tension :

Le gain en tension est défini par le rapport de la tension de sortie V_2 du quadripôle par la tension d'entrée V_1 : $A_V = \frac{V_2}{V_1}$.

$$A_V = \frac{V_2}{V1} = \frac{-Z_L I_2}{Z_E I_1} = \frac{Z_{21}Z_L}{Z_{11}Z_L + \Delta Z}$$

avec $\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ est le déterminant de la matrice [Z].

4- Gain en courant :

Le gain en courant est défini par le rapport du courant de sortie I_2 du quadripôle par le courant d'entrée I_1 : $A_I = \frac{I_2}{I_1}$.

$$A_I = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}$$

III- Quadripôles particuliers

1-Réciprocité :

Un circuit est dit réciproque si, lorsqu'on place une source de tension à son entrée et qu'on mesure le courant de court-circuit à sa sortie, on obtient le même résultat qu'en branchant la source à la sortie et en mesurant le courant de court-circuit à l'entrée.

2-Quadripôle passif :

Nous appelons quadripôle passif un quadripôle ne comportant pas de générateurs de tension ou de courant. Soit un quadripôle passif dont la tension d'entée est E et le courant de court-circuit en sortie et I_s. D'après le théorème de réciprocité, le courant dans l'entrée en court-circuit est $I_e = I_s$ si la tension de sortie est E. En appliquant ce théorème à la matrice admittance, on a : $I_s = Y_{21}V_1 = Y_{21}E$ et $I_e = Y_{12}V_2 = Y_{12}E$ d'où $\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21}$. Des calaculs analogues montrent que pour un quadripole passif on aussi :

$$\begin{cases} Z_{12} = Z_{21} \end{cases} ; \begin{cases} h_{12} = -h_{21} \end{cases} \begin{cases} \Delta T = 1 \end{cases}$$

3- Quadripôle symétrique :

Un quadripôle est dit symétrique si la permutation des deux accès entre eux ne modifie pas le quadripôle. Nous avons alors :

$$\begin{cases} Z_{11} = Z_{22} \end{cases} ; \begin{cases} Y_{11} = Y_{22} \end{cases} ; \begin{cases} T_{11} = T_{22} \end{cases} ; \begin{cases} \Delta H = 1 \end{cases}$$

Lien entre tous les paramètres d'un quadripôle

	Matrice [Z]	Matrice [Y]	Matrice [H]	Matrice [T]
Matrice [Z]	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{\Delta Y} & \frac{-Y_{12}}{\Delta Y} \\ \frac{-Y_{21}}{\Delta Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{T_{11}}{T_{21}} & \frac{\Delta T}{T_{21}} \\ \frac{1}{T_{21}} & \frac{T_{22}}{T_{21}} \end{bmatrix}$
Matrice [Y]	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} \\ \frac{-T_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta H}{H_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{T_{22}}{T_{12}} & \frac{-\Delta T}{T_{12}} \\ \frac{-1}{T_{12}} & \frac{T_{11}}{T_{12}} \end{bmatrix}$
Matrice [H]	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{-Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{T_{12}}{T_{22}} & \frac{\Delta T}{T_{22}} \\ \frac{-1}{T_{22}} & \frac{T_{21}}{T_{22}} \end{bmatrix}$
Matrice [T]	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{1}{Y_{21}} \\ \frac{\Delta Y}{Y_{21}} & \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-\Delta H}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{-1}{H_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$

$$\left\{ \Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} \right. \qquad \left\{ \Delta Y = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21} \right.$$

$$\left\{ \Delta H = H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21} \right. \qquad \left\{ \Delta H = H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21} \right.$$