Université Abdelmalek Essaâdi
ENSAH
Année Universitaire 2020/2021
AP-II, 2ème année, (S4)

TD.Probabilités et Statistiques
Série 1

Exercice 1

Une société de 498 employés procède à l'élection de 7 délégués du personnel. Chaque employé vote pour 7 candidats. On suppose qu'il n'y a ni vote nul, ni abstention. On considère 3 candidats A, B et C. 265 employés ont voté pour A, 160 pour A et B, 144 pour A et C, 108 pour A, B et C, 71 pour B et C mais pas pour A, 57 pour C mais pas pour A ni pour B, 114 pour B mais pas pour A.

1) Combien d'employés ont voté pour B ?
2) Combien d'employés ont voté pour C ?
3) Combien d'employés n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C ?

Corrigé de l'exercice 1

On a les effectifs suivant les chiffres donnés par l'énoncé :

$$card(A) = 265$$
$$card(A \cap B) = 160$$
$$card(A \cap C) = 144$$
$$card(A \cap B \cap C) = 108$$
$$card(\overline{A} \cap B \cap C) = 71$$
$$card(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 57$$
$$card(\overline{A} \cap B) = 114$$

1) Nous en déduisons que :
   $card(B) = card(B \cap A) + card(B \cap \overline{A}) = 160 + 114 = 274$
   employés ont voté pour B.
2) Nous en déduisons que :
   $$\begin{aligned} card(C) &= card(C \cap A) + card(C \cap \overline{A}) \\ &= card(C \cap A) + card(C \cap \overline{A} \cap B) + card(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= 144 + 71 + 57 = 272 \end{aligned}$$
   employés ont voté pour C.
3) $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$
   or $card(B \cap C) = card(B \cap C \cap A) + card(B \cap C \cap \overline{A})$
   donc $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C \cap \overline{A}))$.
   $card(A \cup B \cup C) = 265 + 274 + 272 - 160 - 144 - 71) = 436$.
   Nous en déduisons que :
   436 employés parmi les 498 employés ont voté pour A, B ou C, donc :
   donc $card(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 498 - 436 = 62$ employés n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C.

Exercice 2

Le code confidentiel d'une carte bancaire est un nombre constitué de 4 chiffres tous non nuls.

1) Quel est le nombre de codes possibles ?
2) Combien existe-t-il de codes :
   a) de quatre chiffres différents ?
   b) comportant une seule fois le chiffre 1 ?
   c) comportant deux fois le chiffre 1, les deux autres chiffres étant différents entre eux ?
   d) deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2 ?

Corrigé de l'exercice 2

1) Un code est une $4 - liste$ (avec répétition éventuelle) dans $[1, 9]$.
   Il y a donc $9^4 = 6561$ codes possibles.

2) (a) Un code de quatre chiffres différents est une $4 - liste$ sans répétition dans $[1, 9]$. Il y a donc $A_4^9 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ codes de quatre chiffres différents.
(b) Un code comportant une seule fois le chiffre 1 est déterminé :
i) en choisissant la position du chiffre 1 : 4 possibilités,
ii) en choisissant pour chacun des trois autres chiffres un des 8 chiffres différents de 1 : 8^3 possibilités
Il y a donc $4 \times 8^3 = 2048$ codes comportant une seule fois le chiffre 1.
(c) Un code comportant deux fois le chiffre 1, les deux autres chiffres étant différents entre eux est déterminé :
i) en choisissant la position des deux chiffres 1 parmi les 4 positions possibles : $C_4^2 = 6$ possibilités,
ii) en choisissant pour le premier des chiffres restant un des 8 chiffres différents de 1 : 8 possibilités
iii) en choisissant pour le dernier des chiffres restant un des 7 chiffres différents de 1 et du chiffre précédemment choisi : 7 possibilités
Il y a donc $6 \times 8 \times 7 = 336$ codes comportant deux fois le chiffre 1, les deux autres chiffres étant différents entre eux.
(d) Un code comportant deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2 est déterminé par le choix de la position des chiffres 1 (les chiffres 2 étant placés aux positions restant libres).
Il y a donc $C_4^2 = 6$ codes comportant deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2.

Exercice 3

1) À quelle condition sur $a \in \mathbf{R}$ la formule : $\mathbf{P}(\{\frac{1}{n}\}) = \frac{a}{3^n}$ définit-elle une probabilité sur N^* ?
2) À quelle condition sur $a \in \mathbf{R}$ la formule : $\mathbf{P}(\{\frac{1}{n}\}) = \frac{2^n a}{n!}$ définit-elle une probabilité sur N^* ?

Corrigé de l'exercice 3

1) Il faut vérifier que la probabilité totale est égale à 1. c'est à dire Il faut que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\frac{1}{n}\}) = 1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{3^n} = 1$ .En faisant la somme de la série géométrique de premier terme a, de raison $\frac{1}{3}$, nous obtenons :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{3^n} = a\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\Big) = \frac{3a}{2}$$
$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{3^n} = \frac{3a}{2} - a$
donc la probabilité totale entraine : $\frac{a}{2} = 1$,
et nous en déduisons : $a = 2$.
2) La probabilité totale entraine que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n a}{n!} = 1$. Nous reconnaissons la somme d'une série exponentielle, donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n a}{n!} = a\exp(2)$$
donc : $a\exp(2) - a = 1$, et nous en déduisons : $a = \frac{1}{\exp(2)-1}$.

Exercice 4

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.
1) a) Si A et B sont des événements négligeables, montrer que $A \cup B$ est encore négligeable.

b)Si $(A_n)_{n\in N}$ est une suite d'événements négligeables, montrer que $\cup_{n\in N} A_n$ est encore négligeable.
2) a) Si A et B sont des événements presque-sûrs, montrer que $A \cap B$ est presque-sûr.

b) Si $(B_n)_{n\in N}$ est une suite d'événements presque-sûrs, montrer que $\cap_{n\in N} B_n$ est presque-sûr.

Corrigé de l'exercice 4

1) a)D'après la formule du crible :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\cup B) &= \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)\\ &\leq \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B) = 0+0=0\end{aligned}$$

b) Soit $(A_n)_{n\in N}$ une suite d'événements négligeables. Notons $B_n = \cup_{k=0}^{n} A_k$. Nous pouvons démontrer par récurrence sur $n \in N$ que B_n est de probabilité nulle : $B_0 = A_0$ est en effet presque impossible, et $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$ est de probabilité nulle car réunion de deux événements de probabilité nulle. Puisque $B_n = \cup_{k=0}^{n} A_k$ est une suite croissante d'événements, d'après le théorème de limite monotone :
$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big)$$

2) a) Si A et B sont des événements presque-sûrs, les complémentaires sont de probabilité nulle :
$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(\overline{B}) = 0$$
donc, d'après la question 1 :
$$\mathbf{P}(\overline{A}\cup\overline{B}) = 0$$
En passant au complémentaire :
$$\mathbf{P}(A\cap B) = 1-\mathbf{P}(\overline{A}\cup\overline{B}) = 1$$
Donc $A\cap B$ est presque-sûr.

b) Si $(B_n)_{n\in N}$ est une suite d'événements presque-sûrs, les complémentaires sont de probabilité nulle :
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}(\overline{B_k}) = 0$$
donc, d'après la question 1 :
$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}\Big) = 0$$
En passant au complémentaire :
$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\Big) = 1-\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}\Big) = 1$$
donc $\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$ est presque-sûr.

Exercice 5

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.4$ et $\mathbb{P}(B) = 0.5$.
Calculer $\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)$, $\mathbb{P}(A\cap B/A)$ et $\mathbb{P}(\overline{A}/B)$ dans les cas suivants :

1. A et B sont indépendants
2. A et B sont incompatibles
3. $\mathbb{P}(A\cup B) = 0.8$

Corrigé de l'exercice 5

1. A et B sont indépendants
   A et B sont indépendants, donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.
   Ainsi $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(\overline{A}\cap B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)$
   a) Calcul de $\mathbb{P}(\overline{A}\cup B)$
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}\cup B) &= \mathbb{P}(\overline{A})+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)\\ &= 1-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)\\ &= 1-0.4+0.5-(1-0.4)\times 0.5\\ &= 0.8\end{aligned}$$
   Donc $\mathbb{P}(\overline{A}\cup B) = 0.8$
   b) Calcul de $\mathbb{P}(A\cap B/A)$

$\mathbb{P}(A\cap B/A)=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}=\mathbb{P}(B)=0.5$

c) Calcul de $\mathbb{P}(\overline{A}/B)$

$\mathbb{P}(\overline{A}/B)=\dfrac{\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\dfrac{\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}=\mathbb{P}(\overline{A})=0.6$

Donc $\mathbb{P}(\overline{A}/B)=0.6$

2. A et B sont incompatibles

   A et B sont incompatibles, donc $B\subset\overline{A}$ et $\overline{A}\cap B=B$.

   a) Calcul de $\mathbb{P}(\overline{A}\cup B)$.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}\cup B)&=\mathbb{P}(\overline{A})+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)\\&=1-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(B)\\&=1-0.4\\&=0.6\end{aligned}$$

   Donc $\mathbb{P}(\overline{A}\cup B)=0.6$

   b) Calcul de $\mathbb{P}(A\cap B/A)$

   $\mathbb{P}(A\cap B/A)=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{0}{\mathbb{P}(A)}=0$

   c) Calcul de $\mathbb{P}(\overline{A}/B)$

   $\mathbb{P}(\overline{A}/B)=\dfrac{\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}=1$ car $\overline{A}\cap B=B$

   Donc $\mathbb{P}(\overline{A}/B)=1$

3. $\mathbb{P}(A\cup B)=0.8$

   D'abord on calcule $\mathbb{P}(A\cap B)$ et $\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)$

   -) $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)=0.4+0.5-0.8=0.1$

   Donc $\mathbb{P}(A\cap B)=0.1$.

   -) $\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$ car $B=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$ et $(B\cap A)\cap(B\cap\overline{A})=\emptyset$

   $\qquad=0.5-0.1$

   Donc $\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)=0.4$

   a) Calcul de $\mathbb{P}(\overline{A}\cup B)$.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}\cup B)&=\mathbb{P}(\overline{A})+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)\\&=1-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)\\&=1-0.4+0.5-0.4\\&=1.5-0.8\end{aligned}$$

   Donc $\mathbb{P}(\overline{A}\cup B)=0.7$

   b) Calcul de $\mathbb{P}(A\cap B/A)$

   $\mathbb{P}(A\cap B/A)=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{0.1}{0.4}=0.25.$

   Donc $\mathbb{P}(A\cap B/A)=0.25$.

   c) Calcul de $\mathbb{P}(\overline{A}/B)$

   $\mathbb{P}(\overline{A}/B)=\dfrac{\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\dfrac{0.4}{0.5}=0.8$

   Donc $\mathbb{P}(\overline{A}/B)=0.8$

Exercice 6

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir ≪ *pile* ≫. n étant le nombre de lancers effectués, on remplit une urne avec 3^n boules dont une de couleur blanche et les autres de couleurs noire, et on procède à un tirage d'une boule dans cette urne

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2) On obtient une boule blanche. Quelle est la probabilité que la pièce ait donnée ≪ *Pile* ≫ du premier coup ?

Corrigé de l' exercice 6

1) Soient les événements suivants :
$P_n = \{$obtenir le premier pile au n-ième lancer$\}$,
$P_\infty = \{$ ne jamais obtenir pile $\}$,
$B_n = \{$lancer n fois la pièce avant d'obtenir $\ll$ *pile* $\gg$, puis tirer une boule blanche $\}$,
$N_n = \{$lancer n fois la pièce avant d'obtenir $\ll$ *pile* $\gg$, puis tirer une boule noire$\}$.

On a $$\mathbb{P}(P_n) = \frac{1}{2^n}$$
Sachant P_n, on tire une boule dans une urne contenant 3^n boules dont 1 blanche :
$\mathbb{P}(B_n/P_n) = \dfrac{1}{3^n}$
D'après la formule des probabilités complète on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n/P_n)\mathbb{P}(P_n) + \mathbb{P}(B_n/\overline{P_n})\mathbb{P}(\overline{P_n})\\ &= \frac{1}{3^n} \times \frac{1}{2^n} + 0 \times (1 - \frac{1}{2^n}) \quad \text{car } \mathbb{P}(B_n/\overline{P_n}) = 0.\\ &= \frac{1}{6^n}\end{aligned}$$
Soit B l'événement : $B = \{$ tirer une boule blanche $\}$. $(P_n)_{n \in N^* \cup \{+\infty\}}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap P_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6^n}$$
Nous devons calculer la somme de la série géométrique de premier terme $\frac{1}{6}$ de raison $\frac{1}{6}$:
donc $$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}$$

2) D'après la formule de Bayes, la probabilité d'avoir obtenu $\ll$ *pile* $\gg$ au premier coup sachant que l'on obtient une boule blanche est :
$$\mathbb{P}(P_1/B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap P_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}.$$
