Université Abdelmalek Essaâdi
ENSAH
Année Universitaire 2020/2021
AP-II, 2ème année, (S4)

TD.Probabilités et Statistiques
Série 2

Exercice 1

Une urne contient cinq boules, deux qui portent le numéro 1 et trois qui portent le numéro 2. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. On appelle coïncidence le fait de tirer une boule de numéro i au i-ème tirage, avec $i = 1, 2$.
Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de coïncidences observées.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Corrigé de l'exercice 1

1. Le nombre possible de coïncidences est $0, 1$ ou 2. Aucune coïncidence correspond au tirage d'une boule 2, puis d'une boule 1 :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(21) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Une coïncidence unique peut se produire au premier ou au second tirage :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(11) + \mathbb{P}(22) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{10}$$

Pour deux coïncidences :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(12) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

2. $$E(X) = \sum_{n=0}^{2} n p_n = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} = 1$$

et

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{2} n^2 p_n = 0^2 \times p_0 + 1^2 \times p_1 + 2^2 \times p_2 = \frac{4}{10} + \frac{12}{10} = \frac{8}{5}.$$

Donc

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}.$$

Exercice 2

La fonction de répartition F d'une v.a. X est définie par :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 1\\ 1-\dfrac{1}{1\times 2} & \text{si } 1<x\leq 2\\ 1-\dfrac{1}{2\times 3} & \text{si } 2<x\leq 3\\ \text{.............} & \text{.......}\\ 1-\dfrac{1}{n\times(n+1)} & \text{si } n<x\leq n+1\\ \text{.............} & \text{.......}\end{cases}$$

1) Calculer les probabilités $p_n=\mathbb{P}(X=n),\ n\in N^*$.
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$

Corrigé de l'Exercice 2

1) Calcule des probabilités $p_n=\mathbb{P}(X=n),\ n\in N^*$.
$p_1=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X\leq 1)=F(1)=0$
$p_2=\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(1<X\leq 2)=F(2)-F(1)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$
$p_3=\mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(2<X\leq 3)=F(3)-F(2)=1-\dfrac{1}{2\times 3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$
et plus généralement pour $n\geq 3$:
$p_n=\mathbb{P}(n-1<X\leq n)=F(n)-F(n-1)=(1-\dfrac{1}{(n-1)\times n})-(1-\dfrac{1}{(n-2)\times n-1})$
$=\dfrac{1}{n-1}\times(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n})=\dfrac{2}{(n-1)\times n\times(n-2)}$
donc $\boxed{p_n=\dfrac{2}{(n-1)\times n\times(n-2)}}$

2) – $E(X)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}np_n=1\times 0+2\times\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{+\infty}n\times\frac{2}{(n-1)\times n\times(n-2)}$

$$=1+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2}{(n-1)\times(n-2)}$$
$$=1+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n-2}\right)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n-1}\right)$$
$$=1+(\frac{2}{2}-\frac{2}{1})+(\frac{2}{3}-\frac{2}{2})+(\frac{2}{4}-\frac{2}{3})+.....$$
$$=1-2=-1$$

Donc $\boxed{E(X)=-1.}$

– $V(X)=E(X^2)-E((X)^2)$.

Or $E(X^2)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2p_n=1\times 0+2^2\times\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{+\infty}n^2\times\frac{2}{(n-1)\times n\times(n-2)}$

$$=2+\sum_{n=3}^{+\infty}\times\frac{2n}{(n-1)\times(n-2)}$$

Or le terme général de cette série est équivalent à $\frac{2}{n}$, terme de la série harmonique divergente, donc cette variable aléatoire n'admet pas de moment d'ordre deux, d'où la variable aléatoire X n'admet pas de variance.

Exercice 3

On lancé un dé. Soient X le numéro obtenu et $Y = 6 - X$.
Déterminer les lois de probabilité de X et Y

Corrigé de l' exercice 3

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Les lois de probabilité de X et de Y sont données au tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(Y = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Exercice 4

Soient X et Y deux VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$, a un réel telles que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^{i+j}}$$

1) Calculer a.
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y .
3) X et Y sont-elles des VARD indépendantes ?

Corrigé de l' exercice 4

1) $$\begin{aligned}\sum_i \sum_j p_{i,j} = 1 &\iff \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} \frac{a}{2^{i+j}} = 1 \\ &\iff a \sum_{i\geq 0} \frac{1}{2^i} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2^j} = 1 \\ &\iff a \Big(\sum_{i\geq 0} \frac{1}{2^i} \Big)^2 = 1 \\ &\iff a \Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Big)^2 = 1 \\ &\iff 4a = 1\end{aligned}$$

   ainsi $\boxed{a = \frac{1}{4}}$.

2) D'après la question précédente, $a = \frac{1}{4}$.

   Donc $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{2^{i+j+2}}$.

   On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. $\forall i \in \mathbb{N}$

   $p_{i,\cdot} = \sum_{j\geq 0} p_{i,j} = \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2^{i+j+2}} = \frac{1}{2^{i+2}} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i+2}} \times 2 = \frac{1}{2^{i+1}}$

   De même $p_{\cdot,j} = \sum_{i\geq 0} p_{i,j} = \frac{1}{2^{j+1}}$.

   Ainsi $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p_{i,\cdot} = \frac{1}{2^{i+1}}$ et $p_{\cdot,j} = \frac{1}{2^{j+1}}$.

3) $p_{i,\cdot} \times p_{\cdot,j} = \dfrac{1}{2^{i+1}} \times \dfrac{1}{2^{j+1}} = \dfrac{1}{2^{i+j+2}} = p_{i,j}$

Donc X et Y sont des VARD indépendantes.

Exercice 5

Soit X une VARD telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f(n) = \frac{4}{n} f(n-1)$$

Déterminer la loi de probabilité de X.

Corrigé de l'exercice 5

• Si $f(0) = 0$ alors par récurrence immédiate, $f(n) = 0$ pour tout entier naturel n : impossible.
•On suppose donc $f(0) \neq 0$.Par récurrence immédiate, on a :
$f(n) = \frac{4^n}{n!} f(0)$ pour tout entier naturel n.

• f étant la loi de probabilité de X avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = 1$

$$\bullet \ \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} f(0) = 1$$
$$\iff f(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} = 1$$
$$\iff f(0) e^4 = 1$$
$$\iff f(0) = e^{-4}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ f(n) = e^{-4} \dfrac{4^n}{n!}}$

Exercice 6

Soit X une v.a. de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{3} & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

La loi de X est-elle continue ?

Corrigé de l'exercice 6

On a $F(0) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} F(x) = \frac{1}{3} \neq F(0)$.
Donc la fonction F n'est pas continue à gauche en 0 .
Par suite la variable aléatoire X n'est pas continue.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la fonction de répartition de X.

2) Calculer $\mathbb{P}\{|X-1|<x\}$ pour x réel quelconque.

Corrigé de l'exercice 7

1) On a $F(x)=0$ pour $x\leq 0$ et $F(x)=1$ pour $x\geq 2$. Si $x\in[0,1]$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$.
Si $x\in[1,2]$, $F(x)=F(1)+\displaystyle\int_1^x(2-t)dt=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2x-\frac{x^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+2x-1.$
Donc

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x\in[0,1]\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & \text{si } x\in[1,2]\\ 1 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

2) – Si $x\leq 0$
On a $(|X-1|<x)=\emptyset$, donc $\mathbb{P}(|X-1|<x)=0$.

– Si $x>0$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-1|<x)&=\mathbb{P}(1-x<X<x+1)\\&=F(x+1)-F(1-x)\end{aligned}$$

– Pour $x\in[0,1]$
On a $(1-x)\in[0,1]$ et $(1+x)\in[1,2]$, donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-1|<x)&=-\frac{(x+1)^2}{2}+2(x+1)-1-\frac{(1-x)^2}{2}\\&=-x^2+2x.\end{aligned}$$

– Pour $x>1$
On a $(1-x)<0$ et $(1+x)>2$, donc
$\mathbb{P}(|X-1|<x)=1-0=1$